M. Voicu

TEHNICI DE ANALIZĂ a stabilității sistemelor automate

AUTOMATICĂ

SERIA PRACTICĂ

ELECTRONICĂ

INFORMATICĂ

MANAGEMENT

AUTOMATICA

INFORMATICA

SERIA PRACTICĂ

ELECTRONICA

MANAGEMENT

BIBLIOTECA DE AUTOMATICĂ, INFORMATICĂ, ELECTRONICĂ, MANAGEMENT

SERIA PRACTICĂ

L. Zamfirescu, I. Oprescu. **Automatizarea cuptoarelor industriale**
I. Papadache. **Automatica aplicată, ediţia I şi a II-a**
Şt. Alexandru. **Automatizarea proceselor tehnologice în industria lemnului**
G. Raymond. Tehnica televiziunii în culori
J. J. Samuelly, J. Pignaret, A. Sarazin. **Instrumentaţia electronică în fizica nucleară**
T. Homoş. **Capacitatea de producţie în construcţii de maşini**
S. Radu D. Filoti. **Centrale telefonice automate. Sisteme de comutaţie**
M. Bodea ş.a. **Tranzistoare cu efect de cîmp**
D. N. Şapiro. **Proiectarea radioreceptoarelor**
V. Antonescu, M. Popovici. **Ghid pentru controlul statistic al calităţii producţiei**
N. Stanciu ş.a. **Tehnica imaginii în cinematografie şi televiziune**
P. Vezeanu, Şt. Pătraşcu. **Măsurarea temperaturii în tehnică**
T. Penescu, V. Petrescu. **Măsurarea presiunii în tehnică**
P. Popescu, P. Mihordea. **Măsurarea debitului în tehnică**
P. Vezeanu. **Măsurarea nivelului în tehnică**
C. Hidoş, P. Isac (coordonatori). **Studiul muncii, vol. I — VIII**
V. Baltac ş.a. **Calculatorul FELIX C-256. Structură şi programare**
G. Sonea M. Siletchi. **Creşterea planificată a productivităţii muncii**
R. L. Morris. **Proiectarea cu circuite integrate TTL**
I. Stăncioiu. **Eficienţa economică a asimilării de utilaje noi**
Ishikawa Kaoru. **Controlul de calitate pentru maiştri**
Magnus Radke. 222 **măsuri pentru reducerea costurilor**
A. M. Buhtiarov ş.a. **Culegere de probleme de programare**
P. Constantinescu, C. V. Negoiţă **Sisteme informatice, modele ale conducerii şi sistemelor conduse**
E. S. Buffa. **Conducerea modernă a producţiei, vol. I şi II**
A. Vătăşescu ş.a. **Dispozitive semiconductoare. Manual de utilizare**
A. Nadolo. **Măsurarea volumului şi cantităţii lichidelor în industrie**
Ch. Jones. **Design. Metode şi aplicaţii**
Gh. Pisău ş.a. **Elaborarea şi introducerea sistemelor informatice**
C. Hidoş. **Analiza şi proiectarea circuitelor informaţionale în unităţile economice**
A. Vătăşescu ş.a. **Circuite integrate liniare. Manual de utilizare**
M. Silişteanu ş.a. **Scheme de televizoare, magnetofoane, picupuri vol. I şi** *2* **ed. a II-a**
D. W. Dawis. **Reţele de interconectarea calculatoarelor**
V. Pescaru ş.a. **Fişiere, baze şi bănci de date**
D. Patriche. **Marketing industrial**
Gh. Baştiurea ş.a. **Comanda numerică a maşinilor-unelte**
N. Sprinceană, R. Dobrescu, Th. Borangiu. **Automatizări discrete în industrie. Culegere de probleme**
M. Florescu, ş.a. **Cibernetică, automatică, informatică în industria chimică**
S. Călin, ş.a. **Optimizări în automatizări industriale**
S. Maican. **Sisteme numerice cu circuite integrate**
I. Ristea ş.a. **Manualul muncitorului electronist**
M. Simonescu. **Proiectarea unitară a circuitelor electronice**
C. Cluceru. **Tehnica măsurărilor în telecomunicaţii**
P. Niţulescu. **Electroalimentarea instalaţiilor de telecomunicaţii**
R. Răpeanu ş.a. **Circuite integrate analogice. Catalog**
Şt. Lozneanu ş.a. **Casetofoane. Depanare. Funcţionare**
T. Rădulescu ş.a. **Centrale telefonice automate**
S. Călin, I. Dumitrache ş.a. **Reglarea numerică a proceselor tehnologice**
G. Ionescu ş.a. **Traductoare pentru automatizări industriale, vol. I**
D. Boboc, Ş. Burada, G. Iordăchescu, F. Oprea, G. Slapciu. **Cartea operatorului şi lucrătorului de întreţinere de la panourile şi tablourile de comandă echipate cu mijloace de măsurare şi automatizare**
A. Millea **Cartea metrologului. Metrologie generală**

Dr. ing. MIHAIL VOICU

Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate

EDITURA TEHNICĂ
București — 1986

Control științific: dr. ing. **Neculai Andrei**
Redactor: ing. **Mircea Grosu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta: **Simona Dumitrescu**

Bun de tipar: 26.07.86. Coli de tipar: 24,5

CZ 62—52:531.391

Tiparul executat sub comanda
nr. 986 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918".
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România

STABILITY ANALYSIS TECHNIQUES OF THE AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

(Abstract)

The aim of this book is to present, in a coherent way and from the viewpoint of the automatic control engineer, the most important stability results concerning the mono- and multivariable automatic control systems. It is a tentative to open a bridge between theory and practice by the fact that the major conception reason was to blend the apparent paradox that „nothing is as practical as a good theory„ (Helmholtz) with the didactic precept that „examples are more useful than rules" (Newton).

Most of the results of the book are devoted to the stability analysis. According to the practical viewpoint that this cannot be purpose by itself, we also approache certain design techniques as a natural continuation of the analysis.

In view of the major outlook, most of the theoretic results are accompanied by proofs and all the examples (about 90) are solved. The book is almost self-contained and the only prerequisite is an elementary course of mathematics for engineers. In this respect, chapter I summarises the principal aspects of the mathematical modelling and, on this basis we introduce the internal and external stability concepts. The subsequent chapters are concerned with the stability analysis techniques for linear (II), nonlinear (III) and multivariable (IV) automatic control systems. For an easier handling of the book, a general scheme of all the stability types and the analysis techniques is available (Annex F). The book is addressed to the engineers, designes, scientists, and students who usually operate with automatic control concepts.

CONTENTS

III. *Stability analysis techniques of the nonlinear automatic control systems*: 1. Describing function techniques; 2. State plane method; 3. Liapunov direct method (including absolute stability).

IV. *Stability analysis techniques of the multivariable automatic control systems*: 1. Linear multivariable automatic control systems; 2. Stabilization problem; 3. Nonlinear multivariable automatic control systems (hyperstability).

Annexes: A. Laplace transform; B. Z — transform; C. Vectorial and normed spaces; D. Quadratic and Hermitian forms; Sylvester criterion; E. A Schur's formula; F. A general scheme of the stability types and of the analysis techniques.

PREFAȚĂ

Conceptul de stabilitate are, neîndoielnic, o origine intuitiv-experimentală. Formalizarea și caracterizarea lui analitică constituie o preocupare veche a gîndirii științifice. Dacă primele aplicații din acest domeniu au avut ca obiect studiul stabilității sistemului solar, o dată cu desăvîrșirea mașinismului și cu apariția primelor sisteme automate industriale, stabilitatea devine o problemă tehnică de prim ordin. Abordarea ei pe baze exclusiv experimentale nu a dus la rezultate concludente, astfel că utilizarea modelelor matematice pentru rezolvarea unor probleme de proiectare a fost singura cale de urmat. Dacă avem în vedere numai două probleme tehnice rezolvate, și anume: stabilitatea hidroturbinelor și stabilitatea mașinii cu abur prevăzută cu reglare automată a turației, tragem concluzia că în epocă ele erau de importanță vitală și că mai mult ca oricînd gîndirea fizico-matematică a început să determine aspecte majore și totodată subtile ale progresului tehnic în general.

Prezenta carte are ca scop cuprinderea într-un cadru unitar și din punctul de vedere al inginerului automatist a celor mai importante rezultate de stabilitate utilizate în domeniul sistemelor automate. Ea este o tentativă de deschidere a unei punți între teorie și practică, prin aceea că încearcă o îmbinare a aparentului paradox că „nimic nu este mai practic ca o teorie bună“ (Helmholtz) cu preceptul, docimologic, conform căruia „exemplele sînt mai utile ca regulile“ (Newton).

O scurtă privire asupra cuprinsului cărții pune în evidență faptul că ea este consacrată în primul rînd analizei stabilității sistemelor automate. Avînd în vedere că aceasta, din punct de vedere practic, nu constituie un scop în sine, s-au abordat, în limita spațiului, și unele probleme de sinteză (în sensul proiectării efective), ca o continuare firească a analizei. Prin factură și conținut, cartea se adresează îndeosebi inginerilor automatiști (din producție, cercetare-proiectare și învățămînt), precum și altor categorii de specialiști care operează în mod curent cu concepte proprii automaticii și ciberneticii.

Conform scopului cărții, majoritatea rezultatelor teoretice sînt demonstrate și toate exemplele sînt rezolvate. Pentru a nu întrerupe cursivitatea, trimiterile bibliografice în text se fac numai dacă este strict necesar. Ca și *în alte domenii ale științei, literatura din domeniul stabilității sistemelor automate este extrem de bogată. În virtutea ideii directoare a acestei cărți, bibliografia de la sfîrșitul volumului cuprinde numai o parte din cele mai importante lucrări publicate de-a lungul timpului în domeniul stabilității sistemelor automate. Foarte multe rezultate interesante, de amănunt și de nuanțare, nu și-au putut găsi locul meritat între limitele coperților acestui volum. Oricum, îndrăznim să credem că prezenta carte corespunde unei necesități reale, dar desigur ultimul cuvînt în această privință îl vor avea cititorii.*

Considerăm ca pe o plăcută îndatorire să ne exprimăm pe această cale sentimentele de gratitudine față de dr. ing. Neculai Andrei, *care cu prilejul analizei manuscrisului a formulat o serie de sugestii de ordin general vizînd obținerea în final a unui produs editorial de bună calitate. Una dintre acestea a avut ca rezultat* schema de analiză a stabilității sistemelor automate *(anexa F), din care transpare un sistem expert dedicat unei atare analize pe baza ansamblului de concepte și rezultate existente în prezenta carte și pe care cititorii nu vor întîrzia, sperăm, să o utilizeze cu succes atît pe parcursul studiului, cît și în activitatea profesională.*

AUTORUL

Cuprins

Listă de simboluri și notații

D — începutul demonstrației
■ — sfîrșitul demonstrației
N — mulțimea numerelor naturale
Z — mulțimea numerelor întregi
R — mulțimea numerelor reale
$\mathbf{R}_+$ — mulțimea numerelor reale nenegative
C — mulțimea numerelor complexe
$\mathbf{R}^n$ — spațiul vectorilor reali n-dimensionali
$\mathbf{C}^n$ — spațiul vectorilor complecși n-dimensionali
$\mathcal{L}$ — transformarea Laplace directă
$\mathcal{L}^{-1}$ — transformarea Laplace inversă
$\mathcal{Z}$ — transformarea z directă
$\in$ — simbolul apartenenței
A^{-1} — inversa matricii A
A^T — matricea transpusă
$\det A$ — determinantul matricii A
adj A — adjuncta matricii A
diag ( ) — matrice diagonală
$\|\cdot\|$ — simbolul normei
$\bar{z}$ — conjugatul numărului complex z
$|z|$ — modulul lui z
Re z — partea reală a lui z
Im z — partea imaginară a lui z
arg z — argumentul lui z
sgn x — funcția signum (-1 pentru $x < 0$ și $+1$ pentru $x > 0$)
$f^{(k)}(t)$ — derivata de ordinul k a funcției $f(t)$
$f^{(k)}(t)$ — derivata generalizată de ordinul k a funcției $f(t)$

Capitolul I

Fundamentele conceptului de stabilitate

1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice

1.1. Sistem şi mediu înconjurător

În sens fizic larg, prin *sistem* se înţelege un complex unitar, relativ delimitat, printr-o *structură internă*, faţă de mediu. Pentru explicitarea acestei afirmaţii se consideră un sistem dinamic (atributul „dinamic" indică faptul că sistemul evoluează în timp), a cărui schemă funcţional-constructivă este reprezentată în fig. I.1. Desfăşurarea corectă a procesului tehnologic implică rezolvarea simultană a următoarelor două probleme:

a) Să se modifice adecvat debitul Q_i astfel încît nivelul lichidului în recipientul R să rămînă constant în raport cu variaţia debitului Q_e. Pentru rezolvarea acestei probleme se poate folosi un operator uman sau un regulator automat de nivel. Elementele care concură la realizarea scopului propus — stabilizarea nivelului — acţionează într-o ordine şi sînt intercorelate. Încălzirea sau răcirea lichidului (prin schimbătorul de căldură SC), în condiţiile în care coeficientul de dilataţie termică a

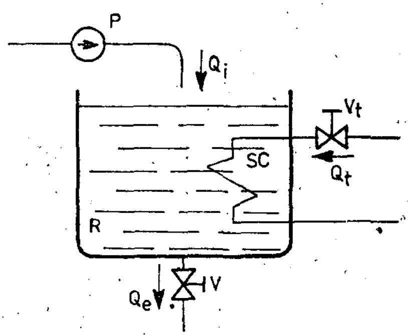


Fig. I. 1. Schema prelucrării unui lichid: P — pompă; R — recipient; SC — schimbător de căldură; V şi V_t — ventile; Q_i şi Q_e — debitele lichidului prelucrat; Q_t — debitul agentului termic.

lichidului este mic, nu aparţine unităţii şi reprezintă mediu exterior. S-a pus în evidenţă astfel un sistem.

b) Să se modifice adecvat debitul Q_t al agentului termic astfel încît temperatura lichidului din recipientul R să rămînă constantă. Ca şi mai sus, pentru rezolvare acestei probleme se poate folosi un operator uman sau un regulator automat de temperatură. Şi în acest caz se evidenţiază o unitate, respectiv un sistem. De această dată variaţia nivelului lichidului din recipient aparţine unităţii, deoarece temperatura lichidului depinde şi de debitele Q_t şi Q_e.

Pe baza acestui exemplu simplu se pot formula următoarele caracterizări relative la noţiunea de sistem:

1° Pentru un sistem este esenţial faptul că *părţile sale componente sînt într-o anumită relaţie*, care constituie totodată criteriul de delimitare faţă de mediul înconjurător.

2° Părţile sau elementele sistemului au funcţii precise şi ocupă în cadrul sistemului poziţii bine determinate, ceea ce permite să se afirme că sistemul se caracterizează printr-o anumită *structură*.

3° Între mărimile fizice ale sistemului există *legături de cauzalitate*, concretizate în procesarea *substanţei, energiei şi informaţiei* în conformitate cu legile generale ale naturii.

4° Legăturile de cauzalitate pot fi astfel ordonate încît în cadrul sistemului să existe *legături inverse* — reacţii — (pozitive sau negative). Acest tip special de conexiune (realizabilă şi în cazul exemplului din fig. I.1 prin folosirea unui operator uman sau a două regulatoare) este specifică *sistemelor cibernetice* (naturale sau tehnice).

5° *Acţiunea comună* a părţilor sistemului asigură realizarea unui anumit *scop* — pentru exemplul considerat stabilizarea nivelului sau a temperaturii. Prin reunirea părţilor sistemul dobîndeşte *calităţi noi*, care nu pot fi identificate în părţile sale, luate separat. O astfel de calitate (în cazul sistemului din fig. I.1 este vorba de stabilizarea nivelului şi a temperaturii) este aceea determinată de prezenţa reacţiei.

6° Realizarea scopului propus se poate face folosind un operator uman sau un regulator automat. Funcţional, cele două soluţii au la bază aceeaşi *structură abstractă* a comunicaţiilor între părţile sistemului, respectiv sînt *izomorfe*.

7° Noţiunea de sistem este *relativă*, deoarece una şi aceeaşi realitate fizică poate cuprinde diverse sisteme, corelate sau nu între ele.

Pe de altă parte, din punct de vedere practic, sistemele din natură, dar în special cele tehnice, prezintă utilitate dacă posedă următoarele proprietăţi principale:

1° Fiind dat un anumit regim de echilibru al mărimilor unui sistem, orice perturbare de scurtă durată a acestui regim este urmată de revenirea naturală a sistemului, în timp, la regimul de echilibru care a precedat perturbarea. Această proprietate, esenţială pentru evoluţia normală, sau chiar pentru existenţa marii majorităţi a sistemelor, se numeşte *stabilitate*.

2° În sfera cauzalităţii, fenomenele care au loc în sisteme sînt determinate prin *mărimi-cauze* şi pot fi observate prin *mărimi-efecte*. Proprietatea conform căreia pentru orice evoluţie dorită a mărimilor-efecte există o evoluţie a mărimilor-cauze sub acţiunea cărora sistemul realizează respectiva evoluţie a mărimilor-efecte se numeşte *controlabilitate*.

3° Dacă pentru o anumită evoluţie cunoscută a mărimilor-efecte, realizată de sistem sub acţiunea unor mărimi-cauze necunoscute, este posibilă determinarea evoluţiei respectivelor mărimi cauze, se spune că sistemul are proprietatea de *observabilitate*.

4° Fenomenele care au loc în cadrul sistemelor le caracterizează din punct de vedere structural şi parametric. Dacă pe baza cunoaşterii evoluţiei mărimilor-cauze şi a evoluţiei corespunzătoare a mărimilor-efecte se pot determina structura şi parametrii sistemului, se spune că acesta posedă proprietatea dc *identificabilitate*.

5° Calităţile sistcmelor, naturale sau tehnice, se apreciază fie pe baza proprietăţilor de mai sus, fie, mai ales, pe baza unor indicatori simpli sau sintetici care caracterizează relaţia dintre mărimile-cauze şi mărimile-efecte. Dacă un sistem nu posedă o anumită calitate (nu satisface un anumit indicator), dar prin modificări structurale (cu adăugarea unor părţi şi a unor conexiuni noi) şi ajustări parametrice adecvate noul sistem evidenţiază calitatea respectivă, se spune că sistemul iniţial are proprietatea de *adaptabilitate*. Pentru evitarea eventualelor confuzii, precizăm că, în cazul sistemelor tehnice modificarea structurii şi ajustarea parametrilor se pot face definitiv, pentru sistemele cu structură fixă şi parametri constanţi în timp, sau de cîte ori este necesar (prin structuri adecvate de *autoadaptare*), în cazul sistemelor cu structură şi parametri variabili în timp.

6° Proprietatea unui sistem de a-şi conserva, între limite precizate sau precizabile, o anumită calitate bine definită (dintre cele de mai sus sau altele), în condiţiile în care parametrii şi/sau structura sistemului se modifică (în mod cunoscut sau nu) între anumite limite admisibile, se numeşte *robusteţe*.

Este de la sine înţeles că între proprietăţile enumerate mai sus există anumite relaţii ,determinate de însuşi sistemul natural sau tehnic. Cunoaşterea lor, ca şi a înseşi proprietăţilor şi a calităţilor sistemelor, sînt de o mare importanță pentru practica inginerească în general și pentru conceperea unor sisteme tehnice performante, în special.

Cunoașterea sistemelor reale (naturale sau tehnice) se bazează pe construcția — prin sistematizarea observațiilor, sintetizarea rezultatelor măsurărilor și cunoașterea legilor generale ale naturii — a unei *imagini*, de regulă idealizate și esențializate, a fenomenelor reale. Această imagine a realității reprezintă ea însăși un complex unitar, caracterizat, printr-o structură internă, respectiv un *sistem abstract*. Descrierea sistemului abstract se face cu ajutorul unui model (verbal sau matematic), pe baza căruia se pot explicita proprietățile cunoscute ale sistemului real și predicta altele noi, neevidențiate de observații și măsurări, putîndu-se concepe experimente pentru punerea în evidență a respectivelor proprietăți noi.

Validarea sistemului abstract, etapă esențială în procesul dinamic-iterativ al cunoașterii sistemelor reale, constă în regăsirea în realitate, prin experimente adecvate, a acelor proprietăți evidențiate de *teoria* care fundamentează sistemul abstract. În aceste condiții un sistem abstract poate fi acceptat sau respins. Criteriile de acceptare sau de respingere, foarte variate în formele lor concrete, se bazează pe erorile admisibile introduse de sistemul abstract în raport cu sistemul real. Reducerea acestor erori implică, pe de o parte, rafinarea procedeelor de obținere a datelor primare (observații și măsurări) și, pe de altă parte, rafinarea mijloacelor de descriere a sistemului abstract. În acest sens are loc atît o continuă diversificare a instrumentației și a metodelor experimentale de studiu al sistemelor reale, cît și o orientare semnificativă, în toate științele, spre utilizarea modelelor matematice pentru descrierea sistemelor abstracte. Este deja de domeniul evidenței că modelele matematice judicios elaborate pot reprezenta satisfăcător sistemele reale și că aceste modele constituie, în numeroase aplicații, principala bază pentru proiectarea și realizarea unor sisteme, tehnice sau de altă natură, cu calități prestabilite. Este un fapt bine știut că, printre aceste calități, *stabilitatea* se situează, în marea majoritate a cazurilor, pe primul loc.

1.2. Modelul matematic al unui sistem dinamic

Un model matematic Σ este în esență un set de ecuații care descrie anumite aspecte ale comportării unui sistem dinamic $\mathcal{S}$, într-o formă relativ ușor de utilizat și cu o acuratețe acceptabilă în raport cu sistemul $\mathcal{S}$ (o definiție matematic riguroasă a sistemului dinamic abstract a fost dată în [K1]). Pentru explicitarea acestei afirmații, să considerăm că începînd cu un *moment* inițial t_0 se aplică sistemului $\mathcal{S}$ o *mărime de intrare* (mărime-cauză: forță, tensiune electrică etc.) $u(t)$, $t \geqslant t_0$, pe o durată finită de timp, numită *interval de observare*. Pe acest interval de timp se măsoară *mărimea de ieșire* (mărimea-efect: deplasare, curent electric etc.) $y(t)$. Pe baza experimentelor se deduce ușor că $y(t)$ depinde, pe de o parte, de $u(t)$ și, pe de altă parte, de starea inițială a sistemului, caracterizată prin *mărimea de stare* $x(t_0)$. De exemplu, în cazul unui oscilator mecanic, format dintr-un corp greu suspendat de un resort, comportarea sa este complet determinată pentru $t \geqslant t_0$ de forța perturbatoare aplicată în centrul de greutate al corpului greu și de starea inițială definită prin poziția și viteza aceluiași centru de greutate la momentul t_0. Concluzia firească este că din punct de vedere funcțional orice descriere a evoluției sistemului $\mathcal{S}$ trebuie să se bazeze pe conceptele de *mărime de intrare, mărime de ieșire și mărime de stare*

De asemenea, se constată experimental că evoluția stării $x(t), t \geqslant t_0$, începînd cu $x(t_0)$, sub influența lui $u(\theta)$, $\theta \in [t_0, t]$, nu depinde numai de $u(t)$, ci și de „istoria" influenței intrării asupra stării pe intervalul de observație $[t_0, t]$. Acest fapt, consecință directă a dependenței lui $y(t)$ de starea inițială $x(t_0)$, poate fi pus în evidență foarte ușor cu ajutorul următorului exemplu.

Exemplul 1.1. Se consideră cuadripolul RC din fig. I.2, unde $u(t)$ este tensiunea de intrare (cauza) și $y(t)$ este tensiunea de ieșire (efectul). Este evident că evoluția lui $y(t)$ depinde atît de $u(t)$, cît și de sarcina electrică inițială $x(t_0)$ a capacitorului C. Mai mult, sarcina electrică $x(t)$, $t \geqslant t_0$, depinde nu numai de $u(t)$, ci și de influența acesteia asupra cuadripolului pe intervalul $[t_0, t]$. Într-adevăr, scriind ecuațiile cuadripolului din fig. I.2, obținem

$$R\dot{x}(t) + \frac{1}{C}x(t) = u(t), \tag{1.1}$$

$$y(t) = \frac{1}{C}x(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{1.2}$$

Pentru $u(t)$ de formă oarecare (funcție continuă pe porțiuni) soluția ecuației diferențiale (1.1) este formată din două componente, și anume

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), \tag{1.3}$$

unde $x_l(t)$ este soluția ecuației omogene corespunzătoare ecuației (1.1), care satisface condiția inițială

$$x_l(t_0) = x(t_0), \tag{1.4}$$

și $x_f(t)$ este soluția particulară a ecuației neomogene (1.1).

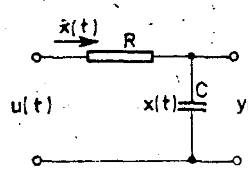


Fig. I.2. Cuadripol RC.
x — sarcina electrică; u, y — tensiuni.

Se ştie că

$$x_l(t) = x(t_0)\, e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{1.5}$$

şi

$$x_f(t) = v(t)\, e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{1.6}$$

unde $v(t)$ se determină din condiţia ca $x_f(t)$ să satisfacă ecuaţia (1.1) (metoda variaţiei constantelor).

Înlocuind (1.6) în (1.1), după calcule elementare, se determină $v(t)$ şi apoi din (1.6) se obţine

$$x_f(t) = \frac{1}{R}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{RC}(t-\theta)} u(\theta)\, d\theta, \quad t \geqslant t_0. \tag{1.7}$$

Soluţia ecuaţiei (1.1), conform relaţiilor (1.3), (1.5) şi (1.7), are expresia

$$x(t) = x(t_0)\, e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + \frac{1}{R}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{RC}(t-\theta)} u(\theta)\, d\theta, \quad t \geqslant t_0. \tag{1.8}$$

Este evident că $x(t)$ depinde de $x(t_0)$ şi de $u(\theta)$, $\theta \in [t_0, t]$. Acest ultim fapt corespunde prezenţei tensiunii u în integrandul din (1.8).

Prezenţa integralei în (1.8) permite să se afirme că sistemul dinamic din fig. I.2 are „memorie", în sensul că acesta îşi „aminteşte" de „istoria" influenţei intrării asupra sa. „Memoria" este continuu selectivă (ponderată prin $e^{-(t-\theta)/RC}$, $\theta \in [t_0, t]$), în sensul că influenţele mai vechi ale lui u (θ apropiat de t_0) au un efect mai mic decît influenţele recente (θ apropiat de t).

Examinarea dinamicii cuadripolului RC ne permite să tragem concluzia că modelul matematic Σ al unui sistem real $\mathcal{S}$ constă din două ecuaţii: *ecuaţia de stare* şi *ecuaţia ieşirii*, adică

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \tag{1.9}$$

$$y(t) = g[t, x(t), u(t)], \tag{1.10}$$

unde $t \in T \subseteq \mathbf{R}$ (T este mulţimea de timp a sistemului), $x(t) \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ (X este mulţimea de evoluţie a stării), $u(t) \in U \subseteq \mathbf{R}^m$($U$ este mulţimea admisibilă a valorilor intrării) şi $y(t) \in Y \subseteq \mathbf{R}^p$($Y$ este mulţimea valorilor ieşirii), cu n, m, p numere naturale. Funcţiile f şi g sînt funcţii vectoriale de dimensiuni adecvate.

Dacă f îndeplineşte anumite condiţii (vor fi expuse la § 2.2) atunci ecuaţia (1.9) admite o soluţie unică care satisface condiţia iniţială $x(t_0) = x_0 \in X$, de forma

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}), \quad t \geqslant t_0, \tag{1.11}$$

unde prin $u_{[t_0, t]}$ se înţelege restricţia funcţiei u la intervalul $[t_0, t] \subseteq T$.

Funcția φ se numește *funcția de tranziție a stărilor* și în cazul cuadripolului RC (fig. I.2) are expresia (1.8). Ea satisface, lucru ușor de verificat și pentru (1.8), următoarele proprietăți, [K1], [I1]:

1° *Consistență*

$$\varphi(t_0; t_0, x_0, u(t_0)) = x_0 \text{ pentru orice } (t_0, x_0) \in T \times X. \tag{1.12}$$

2° *Compozabilitate*

$$\varphi(t_2; t_0, x_0, u_{[t_0, t_2]}) = \varphi(t_2; t_1, \varphi(t_1; t_0\, x_0, u_{[t_0, t_1]}), u_{[t_1, t_2]}) \tag{1.13}$$

pentru orice $t_0, t_1, t_2 \in T$, cu $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ și orice $x_0 \in X$.

3° *Cauzalitate*

$$\varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) = \varphi(t; t_0, x_0, \tilde{u}_{[t_0, t]}), t \geqslant t_0, \tag{1.14}$$

pentru orice $(t_0, x_0) \in T \times X$ și pentru orice $u(t), \tilde{u}(t) \in U$, cu $u_{[t_0, t]} = \tilde{u}_{[t_0, t]}$.

În spațiul $\mathbf{R}^n$ ecuației (1.11) îi corespunde o curbă numită *traiectoria sistemului* Σ. Starea sistemului parcurge această traiectorie atunci cînd timpul t crește.

Reprezentarea unui sistem dinamic abstract sub forma (1.9), (1.10), inspirată de metoda coordonatelor generalizate din *mecanica analitică*, numită *reprezentare intrare-stare-ieșire*, a dobîndit o importanță deosebită în ultimele trei decenii. Acest fapt se datorește unor facilități incontestabile, cum ar fi analiza și sinteza în domeniul timpului cu ajutorul calculatorului electronic (PAC — proiectare asistată de calculator, în engleză CAD — *computer aided design*), în rezolvarea unor probleme de mare complexitate în conducerea proceselor multivariabile (navigația spațială, fisiunea nucleară etc.).

Examinînd expresiile (1.10) și (1.11) se trage concluzia că $x(t)$ poate fi eliminat, astfel că sistemul abstract Σ admite și reprezentarea

$$y(t) = g[t, \varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}), u(t)],\ t \geqslant t_0, \tag{1.15}$$

numită *reprezentare intrare-ieșire*. Uzual aceasta are forma unui sistem de p ecuații diferențiale, fiecare de ordin cel mult egal cu n, a cărui soluție este (1.15).

Reprezentarea intrare-ieșire folosită inițial intens, în special în domeniul sistemelor automate, revine în actualitate cu evidență după 1980, cu deosebire în cazul sistemelor dinamice liniare invariante în timp, pentru care se poate face uz în mod avantajos de transformările integrale Laplace și Fourier.

1.3. Tipuri de sisteme dinamice

Din cele arătate pînă aici este evident că trebuie să se facă o distincție clară între sistemele dinamice reale și sistemele dinamice abstracte. Fără a pierde din vedere acest aspect major, din rațiuni de simplificare a limbajului convenim să folosim în cele ce urmează denumirea de *sistem dinamic* pentru modelul matematic al unui sistem dinamic real.

În cadrul acestui subcapitol, pornind de la principiul clasificării dihotomice, se vor prezenta și caracteriza cu ajutorul modelului matematic principalele tipuri de sisteme dinamice.

a) Dacă T este izomorfă cu $\mathbf{R}$ (de exemplu T este un interval) atunci sistemul dinamic Σ se numește *continuu* în timp.

Dacă T este izomorfă cu $\mathbf{Z}$ (mulțimea numerelor întregi) atunci sistemul dinamic Σ se numește *discret în timp*. În acest caz ecuațiile sistemului dinamic pot fi aduse la forma

$$x(k+1) = f[k, x(k), u(k)], \tag{1.16}$$

$$y(k) = g[k, x(k), u(k)], \qquad k \in \mathbf{Z}, \tag{1.17}$$

în care x, u, y, f și g au aceleași semnificații ca în cazul sistemului (1.9), (1.10).

b) Dacă X, U și Y sînt spații liniare și funcțiile f și g sînt liniare simultan în argumentele x și u atunci sistemul dinamic Σ se numește *liniar*.

Dacă f și/sau g nu sînt liniare atunci sistemul dinamic se numește *neliniar*.

c) Dacă funcțiile f și g nu depind *explicit* de timp atunci sistemul dinamic Σ se numește *invariant în timp (constant)*.

Dacă funcțiile f și/sau g depind explicit de timp atunci sistemul dinamic Σ se numește *variant în timp*.

d) Dacă în cadrul sistemului se pune în evidență o singură variabilă independentă — și anume *timpul* — atunci sistemul dinamic Σ se numește cu *parametri concentrați*. Aceste sisteme sînt descrise de ecuații diferențiale ordinare (în cazul sistemelor continue în timp — de forma (1.9)).

Dacă în cadrul sistemului se pune în evidență și o altă variabilă independentă, diferită de cea temporală, cum ar fi de exemplu o *variabilă spațială*, atunci sistemul dinamic Σ se numește cu *parametri distribuiți*. Astfel de sisteme sînt descrise de ecuații cu derivate parțiale (la 1.4.4 se va examina un exemplu tipic).

e) Dacă o mărime oarecare a sistemului este un proces stohastic atunci sistemul dinamic Σ se numește *stohastic*.

Dacă nici o mărime a sistemului nu este proces stohastic atunci sistemul dinamic Σ se numește *determinist.*

Combinînd în mod adecvat clasificările de mai sus, se pot defini tipuri mai nuanțate de sisteme dinamice.

Experiența acumulată pînă în prezent în domeniul modelării matematice indică cu suficientă certitudine că, la o analiză foarte precisă, sistemele dinamice reale pot fi caracterizate prin atributele: neliniare, variante în timp și stohastice. Alegerea unui anumit tip de model matematic pentru o anumită realitate presupune esențializarea și chiar idealizarea fenomenelor reale și este în același timp, într-o anumită măsură, arbitrară, în sensul că depinde de posibilitățile de tratare analitică sau numerică, de convențiile stabilite în domeniul științific considerat, de preferințele cercetătorului etc. Oricare ar fi însă modelul matematic ales pentru descrierea unui sistem dinamic real, validarea primului în raport cu cel de al doilea, în conformitate cu anumite criterii, este condiția *sine qua non* a valabilității modelului matematic. Numai în aceste circumstanțe analiza și sinteza sistemelor dinamice, bazate pe modelul matematic, pot produce rezultate practice satisfăcătoare (în limitele criteriilor de validare).

Un loc aparte între tipurile de sisteme dinamice îl ocupă sistemele dinamice (continue sau discrete) liniare, invariante în timp, cu parametri concentrați. Acest fapt se explică prin aceea că o categorie foarte largă de sisteme dinamice reale pot fi aproximate satisfăcător de astfel de sisteme și, nu în ultimul rînd, prin existența unei teorii unitare, relativ accesibilă și larg cunoscută, a acestui tip de sisteme dinamice.

1.4. Exemple de sisteme dinamice

1.4.1. Cascadă formată din două recipiente

Schema funcțional-constructivă a sistemului este reprezentată în fig. I.3. Se cere să se determine sistemul dinamic corespunzător, mărimile de intrare fiind u_1 și u_2, iar mărimea de ieșire y.

Cu notațiile din fig. I.3 ecuațiile de bilanț volumetric, la momentul t, în cele două recipiente sînt

$$A_1[x_1(t) - x_{10}] = \int_{t_0}^{t} [u_1(\theta) - v(\theta)]\, d\theta, \tag{1.18}$$

$$A_2[x_2(t) - x_{20}] = \int_{t_0}^{t} [v(\theta) - y(\theta)]\, d\theta, \tag{1.19}$$

unde x_{10} și x_{20} sînt nivelele inițiale (la $t = t_0$) în cele două recipiente.

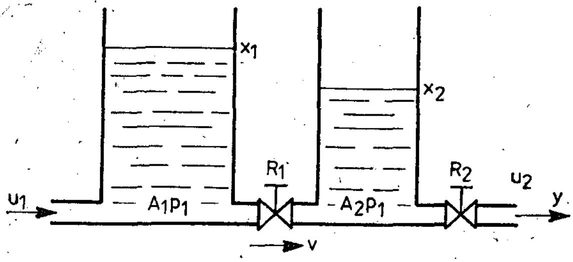


Fig. I.3. Cascadă formată din două recipiente:

A_1, A_2 — ariile bazelor recipientelor; R_1, R_2 — rezistenţele hidraulice ale robinetelor; u_1, v, y — debite volummetrice; x_1, x_2 — nivelele în recipiente; p_1, p_2, u_2 — presiuni hidrostatice.

Ecuaţiile presiunilor hidrostatice, la momentul t, în cele două recipiente au următoarele forme bine cunoscute

$$p_1(t) = \rho g x_1(t), \tag{1.20}$$

$$p_2(t) = \rho g x_2(t), \tag{1.21}$$

unde ρ este densitatea lichidului şi g — acceleraţia gravitaţiei.

Ecuaţiile curgerii, la momentul t, prin robinetele R_1 şi R_2, în aproximaţie liniară, sînt

$$p_1(t) - p_2(t) = R_1 v(t), \tag{1.22}$$

$$p_2(t) - u_2(t) = R_2 y(t). \tag{1.23}$$

La scrierea ecuaţiilor (1.22), (1.23) s-a presupus că lichidul curge laminar şi că relaţia dintre diferenţa de presiuni şi debitul volummetric este de tipul aceleia statuate de legea lui Ohm pentru circuitele electrice. Ecuaţiile (1.22), (1.23) descriu satisfăcător fenomenul de curgere în situaţia în care viteza de curgere este suficient de mică.

Sistemul conţine două elemente conservative, concretizate de coloanele de lichid din cele două recipiente. Ca variabile de stare se pot alege în acest caz nivelele x_1 şi x_2. Derivînd ecuaţiile (1.18) şi (1.19) în raport cu t şi eliminînd apoi mărimile p_1, p_2, v şi y cu ajutorul relaţiilor (1.20)—(1.23) se obţin următoarele ecuaţii de stare

$$\dot{x}_1 = -\frac{\rho g}{A_1 R_1}(x_1 - x_2) + \frac{1}{A_1} u_1, \tag{1.24}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho g}{A_2 R_1} x_1 - \frac{\rho g}{A_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x_2 + \frac{1}{A_2 R_2} u_2. \tag{1.25}$$

Ecuaţia ieşirii se obţine din (1.23) şi (1.21) prin eliminarea lui p_2

$$y = \frac{1}{R_2}(\rho g x_2 - u_2). \tag{1.26}$$

Sistemul dinamic (1.24)—(1.26) este continuu, liniar, invariant în timp şi cu parametrii concentraţi. El poate fi pus sub următoarea formă vectorial-matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\alpha & a\alpha \\ b\alpha & -(b+c)\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

$$y = [0 \quad f\alpha]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad -f]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{1.28}$$

unde $a = 1/A_1R_1$, $b = 1/A_2R_1$, $c = 1/A_2R_2$, $\alpha = \rho g$, $d = 1/A_1$, $f = 1/R_2$.

Reprezentarea intrare-ieşire se poate obţine prin eliminarea mărimilor x_1, x_2, p_1, p_2 şi v între ecuaţiile (1.18) — (1.23). Concret, calculele decurg după cum urmează. Se derivează ecuaţiile (1.18) — (1.23) în raport cu t şi se elimină între acestea, succesiv, $\dot x_1$, $\dot x_2$, $\dot p_1$ şi $\dot p_2$. Rezultă

$$\frac{\rho g}{A_1}(u_1 - y) - \frac{\rho g}{A_2}(v - y) = R_1 \dot v, \tag{1.29}$$

$$\frac{\rho g}{A_2}(v - y) - \dot u_2 = R_2 \dot y. \tag{1.30}$$

Se explicitează acum v din (1.30) şi se înlocuieşte în (1.29). Rezultatul final este următorul

$$\ddot y + \alpha(a + b + c)\dot y + \alpha^2 acy = \alpha_2 acu_1 - f\ddot u_2 - \alpha(a + b) f\dot u_2. \tag{1.31}$$

Condiţiile iniţiale $y(t_0)$ şi $\dot y(t_0)$ se determină cu ajutorul ecuaţiilor (1.25), (1.26). Din (1.26) rezultă

$$y(t_0) = \alpha f x_{20} - f u_2(t_0). \tag{1.32}$$

Derivind (1.26) în raport cu t şi înlocuind apoi cu (1.25) se obţine final

$$\dot y(t_0) = \alpha^2 f[b x_{10} - (b + c) x_{20}] + \alpha c f u_2(t_0) - f\dot u_2(t_0). \tag{1.33}$$

În practica inginerească s-a impus şi o altă modalitate de reprezentare a relaţiei intrare-ieşire, şi anume aceea concretizată de *schema* *bloc structurală*. Obținerea acesteia constă în aplicarea transformării Laplace (v. anexa A), în condiții inițiale nule, ecuațiilor sistemului și explicitarea rezultatelor în conformitate cu relațiile de cauzalitate dintre mărimi. Procedînd în acest mod, din (1.18) — (1.23) se obțin ecuațiile

$$X_1(s) = \frac{1}{A_1 s}[U_1(s) - V(s)], \tag{1.34}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{A_2 s}[V(s) - Y(s)], \tag{1.35}$$

$$P_1(s) = \rho g\, X_1(s), \tag{1.36}$$

$$P_2(s) = \rho g\, X_2(s), \tag{1.37}$$

$$V(s) = \frac{1}{R_1}[P_1(s) - P_2(s)], \tag{1.38}$$

$$Y(s) = \frac{1}{R_2}[P_2(s) - U_2(s)], \tag{1.39}$$

cărora li se asociază respectiv schemele bloc parțiale din fig. I.4, *a-f*. După cum se poate deduce din fig. I.4, convențiile de reprezentare sînt următoarele: mărimile se reprezintă prin segmente orientate, suma-

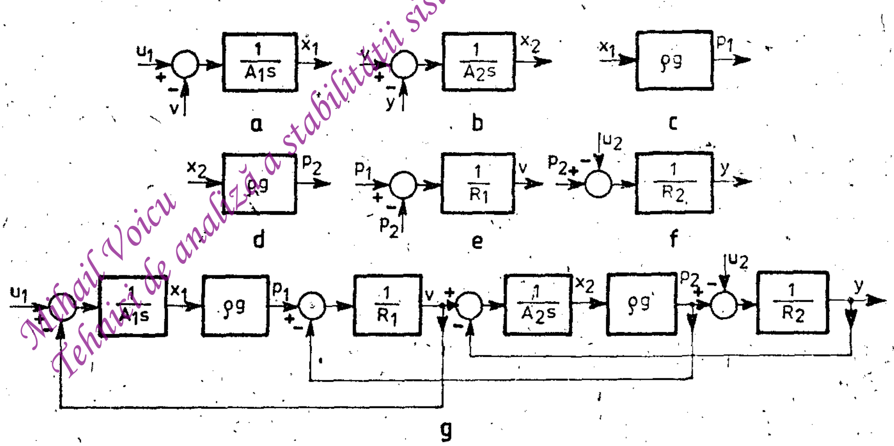


Fig. I.4. Obținerea schemei bloc structurale (*g*) a cascadei de recipiente pe baza schemelor bloc parțiale (*a* — *f*) corespunzătoare ecuațiilor (1.34)—(1.39).

toarele — prin cercuri, elementele de transfer — prin dreptunghiuri și săgețile indică sensul transferului informației (cauză → efect). Expresiile scrise în interiorul dreptunghiurilor sînt funcțiile de transfer ale elementelor respective (v. anexa A).

Schema bloc structurală din fig. I.4, *g* se obține prin asamblarea adecvată a schemelor bloc parțiale (și anume în ordinea *a-c-e-b-d-f*) și trasarea tuturor liniilor corespunzătoare conexiunilor existente între schemele bloc parțiale. Schema din fig. I.4, *g* are deosebita calitate că pune în evidență, într-o viziune de ansamblu, toate conexiunile existente în cadrul sistemului.

1.4.2. Motor electric de curent continuu

Schema funcțională a sistemului este dată în fig. I.5. Ecuațiile care descriu funcționarea sa sînt următoarele

Circuitul indusului:

$$u_1 - e = R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1, \tag{1.40}$$

unde R_1 și L_1 reprezintă rezistența și inductanța indusului, u_1 și x_1 sînt tensiunea de comandă pe indus și curentul prin indus,

$$e = c_1 \psi x_3, \qquad c_1 = \text{constant}, \tag{1.41}$$

este tensiunea contraelectromotoare, ψ — fluxul magnetic produs de inductor și x_3 — viteza unghiulară a indusului.

Circuitul inductorului:

$$u_2 = R_2 x_2 + \dot{\psi}, \tag{1.42}$$

unde R_2 reprezintă rezistența inductorului, u_2 și x_2 sînt tensiunea de comandă pe inductor și curentul prin inductor și

$$\psi = f(x_2) \tag{1.43}$$

este dependența neliniară a fluxului magnetic de curentul prin inductor (curba de magnetizare).

Partea mecanică:

$$J \dot{x}_3 = m - u_3, \tag{1.44}$$

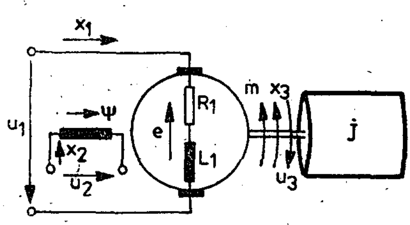


Fig. I.5. Motor electric de c.c. cu excitație separată.

unde J este momentul de inerţie al indusului, u_3 — cuplul de sarcină şi

$$m = c_2 \psi x_1, \qquad c_2 = \text{const.}, \tag{1.45}$$

este momentul activ (cuplul electromagnetic) dezvoltat de motor.

Avînd în vedere forma ecuaţiilor (1.9), (1.10), reprezentarea intrare-stare-ieşire se obţine imediat, prin utilizarea mărimilor x_1, x_2, x_3 drept componente ale vectorului de stare. Vectorul de intrare este format din u_1, u_2 şi u_3 (mărimi externe). Mărimea de ieşire este fixată prin considerente tehnologice. De exemplu în cazul reglării turaţiei motorului electric, mărimea de ieşire este o tensiune

$$y = c_3 x_3, \qquad c_3 = \text{const}, \tag{1.46}$$

obţinută cu ajutorul unui traductor de viteză unghiulară (de exemplu un tahogenerator).

Eliminînd e, ψ şi m între ecuaţiile (1.40) — (1.45) se obţine următorul sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de stare:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1} x_1 - \frac{c_1}{L_1} f(x_2)\, x_3 + \frac{1}{L_1} u_1, \tag{1.47}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_2 x_2}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_2)} u_2, \tag{1.48}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{c_2}{J} x_1 f(x_2) - \frac{1}{J} u_3. \tag{1.49}$$

Obţinerea unei forme analitice a reprezentării intrare-ieşire este relativ complicată, chiar în cazul adoptării unor ipoteze simplificatoare referitoare la $f(x_2)$. Ca şi la exemplul precedent este posibilă obţinerea unei scheme bloc structurale în care blocurile liniare sînt caracterizate prin funcţiile lor de transfer. Examinînd ecuaţiile (1.40) — (1.46) se constantă că în virtutea liniarităţii, se poate aplica transformarea Laplace ecuaţiilor (1.40), (1.42), (1.44) şi (1.46). Rezultatele, explicitate în conformitate cu relaţiile de cauzalitate între mărimi, sînt următoarele:

$$X_1(s) = \frac{1}{L_1 s + R_1} [U_1(s) - E(s)], \tag{1.50}$$

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} [U_2(s) - R_2 X_2(s)], \tag{1.51}$$

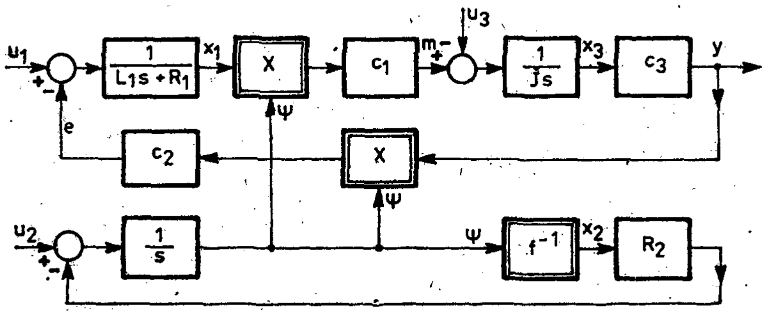


Fig. I.6. Schema bloc structurală a motorului electric de c.c.

$$X_3(s) = \frac{1}{Js}[M(s) - U_3(s)], \tag{1.52}$$

$$Y(s) = c_3X_3(s). \tag{1.53}$$

Schemele bloc parţiale corespunzătoare ecuaţiilor (1.50), (1.52) şi (1.53) se reprezintă ca în cazul precedent. Pentru reprezentarea schemei corespunzătoare ecuaţiei (1.51) se face ipoteza că există

$$x_2 = f^{-1}(\Psi), \tag{1.54}$$

unde f^{-1} este funcţia inversă a funcţiei f (se presupune că fenomenele de histerezis magnetic sînt neglijabile, astfel că f reprezintă curba de primă magnetizare, care admite o inversă).

Pentru obţinerea schemei bloc structurale — fig. I.6 — se asamblează schemele bloc parţiale corespunzătoare relaţiilor (1.50) — (1.54) în conformitate cu relaţiile (1.41) şi (1.45), reprezentabile şi ele prin elemente de înmulţire. S-a făcut convenţia că elementele neliniare se reprezintă prin dreptunghiuri cu chenar dublu.

1.4.3. Pod rulant

Schema funcţional-constructivă a sistemului este reprezentată în fig. I.7. Se consideră că toate mişcările au loc numai în planul figurii şi că masa m_a a sarcinii şi lungimea l a cablului sînt constante. Aceste ipoteze nu sînt limitative. Există cazuri, de exemplu la încărcarea sau descărcarea materialelor granuloase (minereuri etc.), în care asemenea ipoteze sînt satisfăcute. Ca urmare descrierea evoluţiei sistemului se poate face numai în coordonatele x şi z. Se neglijează forţele

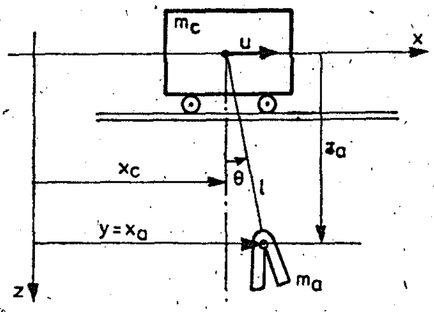


Fig. I.7. Pod rulant:
x_c — poziția căruciorului; y, z_a — poziția apucătorului; m_c, m_a — masele căruciorului și apucătorului; l — lungimea cablului; θ — unghiul de oscilație; u — forța de tracțiune.

de frecare. Se cere să se determine relația dintre forța de tracțiune u și poziția $y = x_a$ a apucătorului.

Ecuațiile sistemului, cu notațiile din fig. I.7, se scriu după cum urmează.

Mișcarea căruciorului:

$$m_c\ddot{x}_c = u + T\sin\theta, \quad (T \text{ — tensiunea în cablul apucătorului}). \tag{1.55}$$

Mișcarea pendulului:

$$m_a\ddot{x}_a = -T\sin\theta \tag{1.56}$$

$$m_a\ddot{z}_a = m_a g - T\cos\theta, \quad (g \text{ — accelerația gravitației}). \tag{1.57}$$

Relații geometrice:

$$x_a = x_c + l\sin\theta, \tag{1.58}$$

$$z_a = l\cos\theta. \tag{1.59}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (1.58) și (1.59) se pot elimina x_a, z_a și $T\sin\theta$ din ecuațiile (1.55)—(1.57). După calcule relativ simple se obțin ecuațiile

$$(m_a + m_c)\ddot{x}_c + \ddot{\theta}m_a l\cos\theta - \dot{\theta}^2 m_a l\sin\theta = u, \tag{1.60}$$

$$\ddot{x}_c\cos\theta + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \tag{1.61}$$

la care se adaugă ecuația ieșirii

$$y = x_a. \tag{1.62}$$

Pentru simplificarea ecuațiilor (1.60), (1.61), în cazul unghiurilor θ mici, se pot face aproximațiile $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ și $\dot{\theta}^2 \approx 0$. În aceste condiții sistemul (1.60)—(1.62) devine

$$(m_a + m_c)\ddot{x}_c + m_a l\ddot{\theta} = u, \tag{1.63}$$

$$\ddot{x}_c + l\ddot{\theta} + g\theta = 0, \tag{1.64}$$

$$y = x_c + l\theta \tag{1.65}$$

Reprezentarea intrare-stare-ieşire se obţine foarte uşor introducînd variabilele de stare: $x_1 = x_c$, $x_2 = \dot{x}_c$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$. Cu acestea ecuaţiile (1.63)—(1.65) pot fi aduse la următoarea formă vectorial-matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_a}{m_c} g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \dfrac{m_a}{m_c}\right)\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{m_c l} \end{bmatrix} u, \tag{1.66}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad l \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{1.67}$$

Relaţia intrare-ieşire se poate determina aplicînd transformarea Laplace ecuaţiilor (1.63)—(1.65) după care se elimină $X_c(s)$ şi $\Theta\,(s)$. Se obţine

$$Y(s) = G_p(s)U(s), \tag{1.68}$$

în care

$$G_p(s) = \frac{k_p}{s^2(T_p^2 s^2 + 1)} \quad \left(k_p = \frac{1}{m_a + m_c}, \; T_p = \sqrt{\frac{m_c l}{(m_c + m_a)g}}\right) \tag{1.69}$$

este funcţia de transfer a podului rulant.

1.4.4. Conductă pneumatică

Se consideră o conductă cilindrică rectilinie prin care curge un fluid compresibil omogen; conducta este izolată termic, astfel că nu are loc schimb de căldură cu mediul. Se presupune, pentru simplificare, că fluidul curge fără frecare. Se cere să se determine relaţia dintre presiunea şi debitul masic la intrarea în conductă şi presiunea şi debitul masic la ieşirea din conductă.

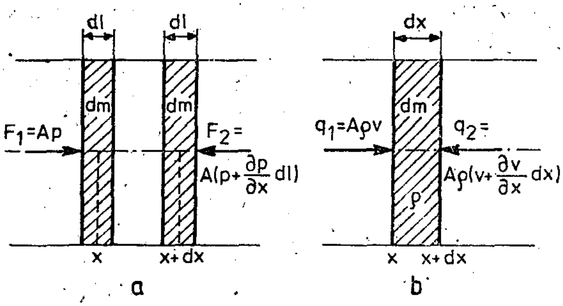


Fig. I.8. Pentru deducerea ecuațiilor (1.91), (1.92).

Pentru deducerea modelului matematic al acestui sistem se utilizează pentru început fig. I.8, *a*.

Sub acțiunea forței

$$F_1 = Ap, \tag{1.70}$$

unde A este aria secțiunii circulare a conductei și p presiunea în punctul x al conductei, aplicată în centrul de greutate al „discului", la stînga — fig. I.8, *a*, acesta se deplasează spre dreapta cu $\mathrm{d}x$. Datorită căderii de presiune $\frac{\partial p}{\partial x}$ de-a lungul conductei, forța care trebuie învinsă în deplasarea „discului" de gaz este

$$F_2 = A\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}l\right). \tag{1.71}$$

Conform legii a II-a a mecanicii mișcarea „discului" de gaz pe distanța $\mathrm{d}x$ este guvernată de ecuația

$$\mathrm{d}m\ddot{x} = F_1 - F_2, \tag{1.72}$$

unde $\mathrm{d}m$ este masa „discului" de gaz.

Fie

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} \tag{1.73}$$

densitatea gazului. Notînd cu $v = \dot{x}$ viteza gazului în conductă, din (1.70) —(1.73) se obține ecuația

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.74}$$

Viteza v este funcţie de timp şi de distanţa x, astfel că diferenţiala ei totală are următoarea formă

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{1.75}$$

În aceste condiţii (1.74) devine

$$\rho\left(v\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1.76}$$

care este binecunoscuta *ecuaţie a lui Euler* pentru cazul unidimensional.

Termenul $\frac{\partial v}{\partial t}$ constituie acea componentă a acceleraţiei pe care o obţine „discul" de gaz ca urmare a căderii de presiune, în timp ce $v\,\frac{\partial v}{\partial x}$ este acea componentă a acceleraţiei datorată faptului că „discul" de gaz ajunge într-o regiune în care gazul are altă viteză.

În cazul fluidelor incompresibile $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. În cazul fluidelor compresibile, în anumite domenii de curgere, se constată că $\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$, astfel că ecuaţia (1.76) devine

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{1.77}$$

Cea de a doua ecuaţie necesară pentru descrierea sistemului se obţine pe baza bilanţului masic pentru fluidul care curge prin două secţiuni ale conductei situate la distanţa dx, fig. I.8, *b*. Dacă în punctul x viteza gazului este v atunci debitul masic de gaz care trece prin secţiunea respectivă este

$$q_1 = A\rho v. \tag{1.78}$$

Întrucît pe distanţa dx apare o cădere de viteză $\frac{\partial v}{\partial x}$, prin secţiunea din punctul $x + \mathrm{d}x$ trece debitul masic de gaz

$$q_2 = A\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right). \tag{1.79}$$

Diferenţa debitelor masice q_1 şi q_2 se acumulează în „discul" de gaz de lungime dx, ceea ce înseamnă că se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_1 - q_2. \tag{1.80}$$

Ţinînd seama de faptul că

$$\mathrm{d}m = \rho A\,\mathrm{d}x, \tag{1.81}$$

din (1.80), prin înlocuirea mărimilor q_1, q_2 şi dm cu ajutorul relaţiilor (1.78), (1.79) şi (1.81), se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.82}$$

Cea de a treia ecuaţie se obţine cu ajutorul ecuaţiei de stare a gazului şi anume

$$pV^n = p_0 V_0^n, \tag{1.83}$$

unde n este exponentul adiabatic. Întrucît masa unui volum de gaz cu acelaşi număr de molecule este constantă, se poate scrie

$$m = V\rho = V_0\rho_0. \tag{1.84}$$

În aceste condiţii ecuaţia (1.83) devine

$$p\rho^{-n} = p_0\rho_0^{-n}. \tag{1.85}$$

Pentru micile variaţii ale variabilelor p şi ρ în jurul valorilor p_0 şi ρ_0 ecuaţia (1.85) poate fi aproximată prin relaţia liniară

$$\rho - \rho_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{p_0}(p - p_0), \tag{1.86}$$

unde

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{p_0} = \frac{\rho_0}{n p_0}. \tag{1.87}$$

Înlocuind (1.86) şi (1.87) în (1.82) se obţine

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -n\frac{p_0}{\rho_0}\rho\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.88}$$

Pentru determinarea modelului matematic într-o formă concisă se înlocuieşte în (1.77) şi (1.88)

$$v = \frac{1}{\rho A} q, \tag{1.89}$$

unde q este debitul masic, şi se notează cu

$$c = \sqrt{\frac{n p_0}{\rho_0}} \tag{1.90}$$

viteza sunetului în gazul respectiv la presiune p_0.

În acest fel din (1.77) şi (1.88) rezultă ecuaţiile

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{A}\frac{\partial q}{\partial t}, \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{A}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{1.92}$$

Este evident că acest sistem dinamic este cu parametri distribuiţi, deoarece variabilele p şi q depind de două variabile independente: timpul t şi spaţiul x.

Pentru obţinerea reprezentării intrare-ieşire în cazul unei conducte de lungime l este necesară integrarea ecuaţiilor (1.91) şi (1.92) în raport cu variabila x. Se aplică în acest scop transformarea Laplace temporală în condiţii iniţiale nule. Procedînd astfel şi notînd $P(x, s) = \mathcal{L}\{p(x, t)\}$ şi $Q(x, s) = \mathcal{L}\{q(x, t)\}$ din (1.91) şi (1.92) se obţine următorul sistem de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\frac{s}{A} Q, \tag{1.93}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\frac{As}{c^2} P. \tag{1.94}$$

Soluţia generală a acestui sistem are forma

$$P(x, s) = k_1 \mathrm{e}^{-\frac{xs}{c}} + k_2 \mathrm{e}^{\frac{xs}{c}}, \tag{1.95}$$

$$Q(x, s) = \frac{1}{z}\left(k_1 \mathrm{e}^{-\frac{xs}{c}} - k_2 \mathrm{e}^{\frac{xs}{c}}\right), \tag{1.96}$$

unde

$$z = \frac{c}{A} \tag{1.97}$$

este impedanţa conductei şi k_1, k_2 sînt constante de integrare.

Vom nota cu

$$P_1 = P(0, s), \tag{1.98}$$

$$Q_1 = Q(0, s) \tag{1.99}$$

valorile presiunii şi debitului masic, în transformate Laplace, la începutul conductei şi cu

$$P_2 = P(l, s) \tag{1.100}$$

$$Q_2 = Q(l, s) \tag{1.101}$$

valorile presiunii şi debitului, în transformate Laplace, la sfîrşitul conductei.

În aceste circumstanţe se pot determina constantele k_1 şi k_2 în funcţie de condiţiile la limite (1.98) şi (1.99), astfel că soluţia particulară corespunzătoare, după calcule elementare, se obţine de forma:

$$P(x, s) = \frac{1}{2}(P_1 + zQ_1)\,e^{-\frac{xs}{c}} + \frac{1}{2}(P_1 - zQ_1)\,e^{\frac{xs}{c}}, \tag{1.102}$$

$$Q(x, s) = \frac{1}{2z}(P_1 + zQ_1)\,e^{-\frac{xs}{c}} - \frac{1}{2z}(P_1 - zQ_1)\,e^{\frac{xs}{c}}. \tag{1.103}$$

Înlocuind acum $x = l$ şi ţinînd seama de (1.100) şi (1.101) se obţin următoarele ecuaţii:

$$P_2 = \frac{1}{2}(P_1 + zQ_1)\,e^{-Ts} + \frac{1}{2}(P_1 - zQ_1)\,e^{Ts}, \tag{1.104}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2z}(P_1 + zQ_1)\,e^{-Ts} - \frac{1}{2z}(P_1 - zQ_1)\,e^{Ts}, \tag{1.105}$$

unde $T = l/c$ este *timpul mort* al sistemului (durata propagării undelor de presiune de-a lungul conductei).

Prezenţa în ecuaţiile (1.102) şi (1.103) a factorilor e^{-Ts} şi e^{Ts}, care pun în evidenţă fenomenul de propagare a oscilaţiilor de presiune prin conductă, este tipică pentru sistemele cu transport de substanţă, transfer spaţial de energie sau transmisie la distanţă a informaţiei.

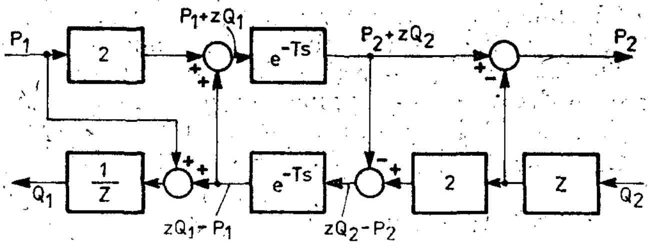


Fig. I.9. Schema bloc structurală a conductei pneumatice.

Dacă se are în vedere destinaţia practică a unei conducte, în speţă pentru transportul gazelor, atunci relaţiile de cauzalitate sînt următoarele: mărimile cauze sînt presiunea P_1 (care determină curgerea gazului) şi debitul masic Q_2 (consumul de gaz la utilizator), iar mărimile efecte sînt presiunea P_2 şi debitul masic Q_1. În aceste circumstanţe ecuaţiile (1.104) şi (1.105) nu constituie reprezentarea intrare-ieşire a sistemului. Obţinerea acesteia, de exemplu sub forma schemei bloc structurale, este foarte simplă şi constă în următoarele. Se înmulţeşte (1.105) cu z şi rezultatul se adună, respectiv se scade din (1.104). Se obţin, respectiv, următoarele ecuaţii

$$P_2 = (P_1 + zQ_1)\,e^{-Ts} - zQ_2, \tag{1.106}$$

$$Q_1 = \frac{1}{z}\left[P_1 - (P_2 - zQ_2)\,e^{-Ts}\right]. \tag{1.107}$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (1.106) şi (1.107) s-a elaborat schema bloc structurală din fig. I.9.

1.4.5. Proces de reînnoire a stocului pieselor de schimb

Pentru anumite procese de producţie este necesară achiziţionarea de rulmenţi, ca piese de schimb care nu pot fi recondiţionate, pe măsură ce rulmenţii existenţi se distrug sau ajung la limita admisibilă de uzură. Pe parcursul înlocuirii rulmenţilor uzaţi sau defecţi, un anumit tip de rulment are o distribuţie foarte variată din punctul de vedere al vechimii celor existenţi în funcţiune. Ne propunem să elaborăm un model matematic al acestei distribuţii. Se are în vedere un model discret în timp, bazat pe o perioadă de un an. Ipoteza esenţială pe care se construiesc cele ce urmează este că se poate defini şi determina experimental probabilitatea $p_i \in (0,1)$ ca orice rulment cu o vechime de i

ani să rămînă în funcţiune cel puţin încă un an. Se mai presupune că după $n+1$ ani de utilizare orice rulment este înlocuit.

În condiţiile precizate, rulmenţii în funcţiune într-un an oarecare $k(k \in \mathrm{N})$ pot fi împărţiţi în $n+1$ grupe de „vîrstă". Fie $x_i(k)$ numărul de rulmenţi de „vîrstă" i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ în anul $k \in \mathrm{N}$. După un an de funcţionare, în grupa de „vîrstă" $i+1$ se vor găsi în funcţiune

$$x_{i+1}(k+1) = p_i x_i(k), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.108}$$

rulmenţi. Numărul de rulmenţi cu vechime mai mică de un an în anul $k+1$ este egal cu numărul $u(k)$ de rulmenţi achiziţionaţi şi puşi în funcţiune în anul k, adică

$$x_0(k+1) = u(k). \tag{1.109}$$

Se observă cu uşurinţă că ecuaţiile (1.108) şi (1.109) pot fi puse sub următoarea formă vectorial-matriceală (ecuaţia de stare)

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u. \tag{1.110}$$

La aceasta se adaugă desigur ecuaţia ieşirii, a cărei formă depinde de tipul de informaţie despre starea sistemului, necesară în anumite condiţii. De exemplu aceasta poate fi

$$y(k) = [1 - p_0 \;\; 1 - p_1 \cdots 1 - p_{n-1} \;\; 1] \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \tag{1.111}$$

adică suma tuturor rulmenţilor care urmează să fie înlocuiţi pe durata anului k.

Sistemul dinamic (1.110), (1.111), astfel obţinut, este liniar, discret şi invariant în timp.

Reprezentarea intrare-ieşire se poate determina relativ simplu utilizînd relaţia de recurenţă (1.108), conform căreia putem scrie

$$
\begin{aligned}
x_1(k+n) &= p_0 x_0(k+n-1) = p_0 u(k+n-2) \\
x_2(k+n) &= p_0 p_1 x_0(k+n-2) = p_0 p_1 u(k+n-3) \\
x_3(k+n) &= p_0 p_1 p_2 x_0(k+n-3) = p_0 p_1 p_2 u(k+n-4) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n(k+n) &= p_0 p_1 p_2 \ldots p_{n-1} x_0(k) = p_0 p_1 \ldots p_{n-1} u(k-1).
\end{aligned}
\tag{1.112}
$$

Ţinînd seama acum de (1.111), în care se înlocuiesc ecuaţiile (1.112), ecuaţia intrare-ieşire rezultă de forma

$$
\begin{aligned}
y(k+n) = {} & (1-p_0)\,u(k+n-1) + (1-p_1)\,p_0 u(k+n-2) + \\
& + (1-p_2)\,p_0 p_1 u(k+n-3) + \ldots + (1-p_{n-1})\,p_0 p_1 \ldots p_{n-2} u(k) + \\
& + p_0 p_1 \ldots p_{n-1} u(k-1).
\end{aligned}
\tag{1.113}
$$

1.4.6. Proces de epurare biologică

Apele uzate, rezultate dintr-un anumit proces tehnologic, sînt introduse într-un bazin în scopul epurării pe cale biologică. Dacă oxigenarea apei şi de asemenea temperatura şi pH-ul sînt menţinute între limite adecvate atunci procesul de înmulţire a bacteriilor depoluante depinde în primul rînd de concentraţia mediului de cultură (existent în apa uzată). Pe baza observaţiilor şi măsurărilor experimentale s-a stabilit că rata de înmulţire a bacteriilor ($\dot{x}_1/x_1$) este proporţională cu concentraţia x_2 a mediului de cultură, în situaţia în care x_2 este mic, şi tinde să ajungă la un nivel constant pe măsură ce x_2 creşte. O atare relaţie poate fi aproximată prin

$$
\frac{\dot{x}_1}{x_1} = a\frac{x_2}{x_2+c},
\tag{1.114}
$$

unde a şi c sînt două constante pozitive.

De asemenea, experimentele au relevat faptul că viteza de descreştere a concentraţiei mediului de cultură este proporţională cu viteza de înmulţire a bacteriilor, adică

$$
\dot{x}_2 = -\frac{b}{a}\dot{x}_1,
\tag{1.115}
$$

unde b este o constantă pozitivă.

Aşadar sistemul dinamic are forma

$$\dot{x}_1 = a \frac{x_2}{x_2 + c} x_1, \tag{1.116}$$

$$\dot{x}_2 = - b \frac{x_1}{x_2 + c} x_2. \tag{1.117}$$

În condiţii normale $u_1 > 0$ (se introduce continuu mediu de cultură) şi $u_2 > 0$ (se scoate continuu apă depoluată). În ipoteza că mediul de cultură introdus în bazin are concentraţie constantă şi că apa depoluată are un grad constant de depoluare, ecuaţiile (1.116), (1.117) se corectează după cum urmează

$$\dot{x}_1 = a \frac{x_2}{x_2 + c} x_1 - d_1 u_2, \tag{1.118}$$

$$\dot{x}_2 = - b \frac{x_1}{x_2 + c} x_2 + d_2 u_1, \tag{1.119}$$

unde d_1 şi d_2 sînt două constante pozitive.

Evident, sistemul dinamic (1.118), (1.119) este neliniar şi continuu în timp.

1.4.7. Sistem automat de urmărire

Se consideră sistemul automat de urmărire cu schema funcţional-constructivă din fig. I.10. Elementul de execuţie este un servomotor electric asincron bifazat *SM*, comandat reversibil cu un redresor dublă alternanţă format din tranzistorii T_1 şi T_2. Aceştia sînt comandaţi prin tensiunea de ieşire a unui amplificator de curent continuu (*A* c.c.), care este elementul de bază al regulatorului. Legea de reglare materializată de regulator este determinată de impedanţele de intrare şi de reacţie ale *A* c.c. Utilizarea reacţiei prin R_3, C_1 de la emitorii tranzistorilor T_1, T_2 (uzual această reacţie se realizează de la ieşirea *A* c.c.) are calitatea că permite realizarea unui cuplu de pornire al *SM* mai mare şi prin aceasta o creştere a rapidităţii sistemului. Ca element de prescriere şi ca traductor de poziţie se folosesc potenţiometrele identice P_1 şi P_2 (acesta cuplat la axul *SM* prin reductorul mecanic R_m).

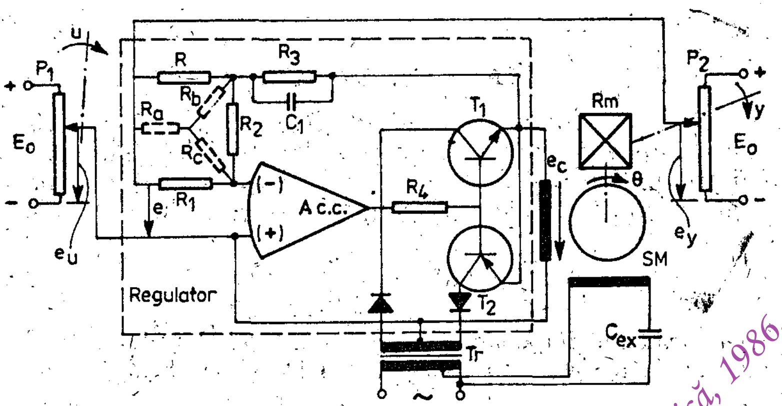


Fig. I.10. Schema unui sistem automat de urmărire.

Se cere să se determine relația intrare-ieșire a sistemului automat. Funcțiile de transfer ale elementelor componente sînt următoarele:

$$G_{P1}(s) = \frac{E_u(s)}{U(s)} = k_1 \quad (k_1 = \text{const.}), \tag{1.120}$$

$$G_{P2}(s) = \frac{E_y(s)}{Y(s)} = k_1, \tag{1.121}$$

$$G_{SM}(s) = \frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = -\frac{1}{T_1 s(T_2 s + 1)}; \quad (T_1, T_2 \text{ — constante}), \tag{1.122}$$

$$G_{Rm}(s) = \frac{Y(s)}{\Theta(s)} = k_2, \quad (k_2 = \text{const.}). \tag{1.123}$$

În ipoteza că amplificatorul de curent continuu (A c.c.) are rezistența de intrare suficient de mare și rezistența de ieșire suficient de mică și că funcționarea sa are loc numai în zona de liniaritate, funcția de transfer a regulatorului are expresia, [B1],

$$G_R(s) = \frac{E_c(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1(s) + Z_2(s)}{k_A k_3 Z_1(s)}}, \tag{1.124}$$

în care

$$E(s) = E_u(s) - E_y(s) \tag{1.125}$$

este tensiunea proporţională cu abaterea $U(s) - Y(s)$; $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ sînt impedanţele de intrare, respectiv de reacţie, k_A este factorul de amplificare al A c.c. şi k_3 este factorul de amplificare al redresorului dublă alternanţă comandat. În ipoteza $k_A \to +\infty$ din (1.124) se obţine

$$G_R(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}. \tag{1.126}$$

Pentru calculul impedanţelor $Z_1(s)$ şi $Z_2(s)$ se transformă triunghiul format din R, R_1 şi R_2 în stea — fig. I.10, şi se obţine

$$R_a = \frac{RR_1}{R + R_1 + R_2}, \quad R_b = \frac{RR_2}{R + R_1 + R_2}, \quad R_c = \frac{R_1R_2}{R + R_1 + R_2}, \tag{1.127}$$

$$\begin{cases} Z_1(s) = R_a & (1.128) \\ Z_2(s) = R_b + \dfrac{R_3}{R_3C_1s + 1}. & (1.129) \end{cases}$$

Înlocuind (1.127) în (1.128), (1.129) şi acestea în (1.126) rezultă

$$G_R(s) = -k_0\left(1 + \frac{k}{Ts + 1}\right), \tag{1.130}$$

în care

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1}, \quad k = \frac{R_3}{R_2}\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R}\right), \quad T = R_3C_1. \tag{1.131}$$

Conform relaţiilor (1.120)—(1.123), (1.125) şi (1.126) schema bloc structurală a sistemului automat de urmărire are forma din fig. I.11.

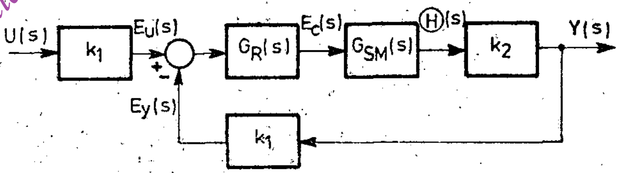


Fig. I.11. Schema bloc structurală a sistemului automat de urmărire.

Relația intrare-ieșire are expresia

$$Y(s) = G_0(s)U(s), \tag{1.132}$$

unde

$$G_0(s) = \frac{k_1k_2G_R(s)G_{SM}(s)}{1+k_1k_2G_R(s)\,G_{SM}(s)} = \frac{k_0k_1k_2(Ts+k+1)}{T_1s(T_2s+1)\,(Ts+1)+k_0k_1k_2(Ts+k+1)} \tag{1.133}$$

este funcția de transfer a sistemului automat de urmărire.

1.4.8. Sistem automat de reglare a temperaturii cu regulator discret

Schema bloc funcțională a sistemului este reprezentată în fig. I.12, *a*. Schema funcțională a regulatorului discret are forma din fig. I.12, *b*.

Operația de *eșantionare-memorare* constă în transformarea semnalului continuu $x_a(t)$ într-un șir de valori echidistante

$$x_{ai} = x_a(iT),\ i = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.134}$$

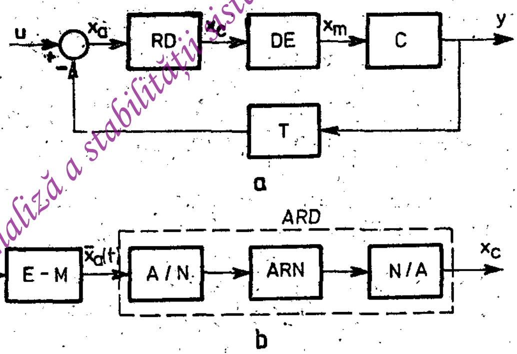


Fig. I.12. *a* — Schema bloc funcțională a unui sistem de reglare automată a temperaturii: *RD* — regulator discret; *DE* — dispozitiv de execuție; *C* — cuptor electric; *T* — traductor de temperatură;
b — Structura *RD*: *E—M* — element de eșantionare-memorare; *A/N* și *N/A* — convertoare analog-numeric și numeric-analogic; *ARN* — algoritm de reglare numerică.

unde $T > 0$ este perioada de eşantionare, care apoi este transformat într-un semnal funcţie scară

$$\bar{x}_a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ai}[\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i + 1)T)], \tag{1.135}$$

unde $\sigma(t)$ este funcţia treaptă unitară (Heaviside).

Din punct de vedere matematic transformarea lui $x_a(t)$ în $\bar{x}_a(t)$ poate fi explicitată prin următoarele operaţii:

— operaţia de *δ-eşantionare*, prin care $x_a(t)$ se transformă într-o serie de *δ-impulsuri*

$$x_a^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ai}\ \delta(t - iT), \tag{1.136}$$

unde $\delta(t)$ este impulsul unitar (Dirac), şi

— operaţia de *extrapolare de ordinul zero* prin care $x_a^*(t)$ se transformă în funcţia scară $\bar{x}_a(t)$.

În ceea ce priveşte perioada de eşantionare T, aceasta se alege în funcţie de cea mai înaltă pulsaţie ω_m din $x_a(t)$, semnificativă din punct de vedere informaţional, care trebuie să se regăsească în $x_a^*(t)$ şi respectiv în $\bar{x}_a(t)$. Conform *teoremei eşantionării* (Shannon), [K2], $T \leqslant \dfrac{\pi}{\omega_m}$. La determinarea pulsaţiei ω_m, în cazul sistemelor automate discrete, se ţine seama de pulsaţia maximă semnificativă conţinută de mărimea de intrare u şi de constanta de timp minimă semnificativă sau de pulsaţia proprie maximă semnificativă a sitemului. Uzual $T \leqslant \dfrac{\pi}{10\ \omega_m}$, dar la alegerea efectivă a lui T pot interveni şi alte condiţii, inclusiv condiţii de stabilitate (sau de realizare a anumitor performanţe) şi condiţii tehnologice.

Din (1.135) şi (1.136) rezultă că $\bar{x}_a(t)$ poate fi exprimat prin următorul produs de convoluţie

$$\bar{x}_a(t) = \int_0^t g_{e0}(\tau) x_a^*(t - \tau)\, d\tau, \tag{1.137}$$

unde

$$g_{e0}(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T) \tag{1.138}$$

este răspunsul la impuls al *extrapolatorului de ordinul zero*.

Aplicînd transformarea Laplace funcţiei $g_{e0}(t)$ se obţine

$$G_{e0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \tag{1.139}$$

astfel că structura *elementului de eșantionare-memorare*, echivalent din punct de vedere matematic cu un *element de δ-eșantionare* înseriat cu un *element de extrapolare de ordinul zero*, are forma din fig. I.13.

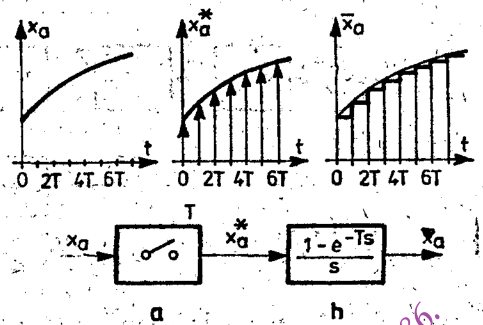


Fig. I.13. Structura elementului de eșantionare-memorare:
a — elementul de δ eșantionare; *b* — extrapolatorul de ordinul zero.

Algoritmul de reglare discretă (ARD), incorporat într-un regulator discret sau într-un calculator de proces, este descris în general de o ecuație cu diferențe, sau de funcția de transfer în z, $G_R(z)$ (v. anexa B). Dacă se adoptă o lege de reglare de tipul PI (proporțional-integral) atunci algoritmul de reglare discretă are forma

$$x_{ci} = k_r\left(x_{ai} + \frac{T}{T_r}\sum_{j=0}^{i} x_{aj}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.140}$$

unde x_{ci} sînt eșantioanele mărimii de comandă x_c, eșantionată cu perioada T, T_r este constanta componentei integrale și k_r—factorul componentei proporționale. În aceste condiții, funcția de transfer în z a regulatorului discret are expresia

$$G_R(z) = \frac{X_c(z)}{X_a(z)} = \frac{k_r}{a}\,\frac{z-a}{z-1}, \quad a = \frac{T_r}{T+T_r}. \tag{1.141}$$

Observațiile și măsurările experimentale au arătat, [Z1], că funcționarea unui cuptor electric poate fi satisfăcător aproximată printr-o funcție de transfer de forma

$$G_C(s) = k_c\,\frac{e^{-T_m s}}{T_c s + 1}, \tag{1.142}$$

în care T_m este timpul mort al cuptorului, T_c — constanta de timp și k_c — factorul de amplificare.

Întrucît T_c are obișnuit valori mari (de ordinul minutelor sau al zecilor de minute), se poate considera că funcțiile de transfer ale dis-

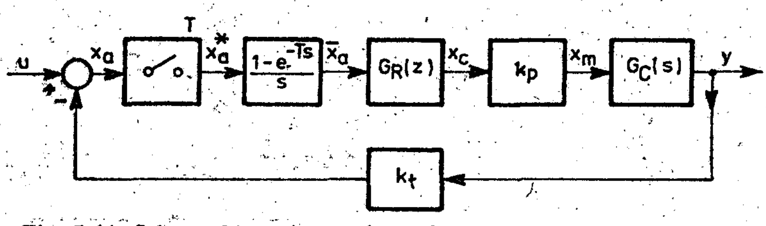


Fig. I.14. Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată a temperaturii.

pozitivului de execuție (punte redresoare comandată) și traductorului (termocuplu) au respectiv expresiile

$$G_P(s) = k_p = \text{const.}, \tag{1.143}$$

$$G_T(s) = k_t = \text{const.} \tag{1.144}$$

În această situație schema bloc structurală a sistemului automat de reglare a temperaturii are forma din fig. I.14. Sistemul este format atît din elemente continue, cît și discrete în timp. Pentru unificarea tratării este necesară determinarea funcției de transfer în z a căii directe a sistemului (formată din *RD*, *DE* și *C*, fig. I.12, *a*). Conform anexei B, funcția de transfer în z se determină după cum urmează:

$$G_d(z) = k_p \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_R(z) G_C(s)\right\} = k_p(1-z^{-1}) G_R(z)\, \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} G_C(s)\right\} =$$

$$= k_p \frac{z-1}{z} \frac{k_r}{a} \frac{z-a}{z-1} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} \frac{k_c e^{-T_m s}}{T_c s + 1}\right\}.$$

Alegînd $T = \frac{T_m}{\alpha}$, $\alpha \in N$, putem scrie în continuare

$$G_d(z) = \frac{k_p k_r k_c z^{-\alpha}(z-a)}{a T_c z} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{s + \frac{1}{T_c}}\right\} = \frac{k(z-a)}{z^{\alpha}(z-1)(z-b)}, \tag{1.145}$$

în care

$$k = \frac{1-b}{a} k_r k_p k_c, \quad b = e^{-\frac{T}{T_c}}. \tag{1.146}$$

Relația intrare-ieșire are expresia

$$Y(z) = G_0(z)U(z), \tag{1.147}$$

unde

$$G_0(z) = \frac{G_d(z)}{1 + k_t G_d(z)} = \frac{k(z-a)}{z^{\alpha}(z-1)(z-b) + k_t k(z-a)} \tag{1.148}$$

este funcția de transfer în z a sistemului automat de reglare a temperaturii.

2. Reprezentarea intrare-stare-ieșire

2.1. Sisteme dinamice liniare cu parametri concentrați

2.1.1. Sisteme continue și variante în timp

Orice sistem dinamic liniar, continuu și variant în timp este descris de un set de ecuații *intrare-stare-ieșire* de forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{2.1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2.2}$$

unde $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ și $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ sînt matrici reale, funcții continue de timp, de dimensiuni adecvate.

Orice evoluție a sistemului (2.1), (2.2) sub acțiunea mărimii de intrare $u(t)$ poate fi determinată în mod unic pentru $t \geqslant t_0$, cu $t_0 \in \mathbf{R}_+$, dacă se cunoaște starea inițială

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Soluția generală a ecuației de stare (2.1), în virtutea liniarității, este formată din două componente, și anume

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), \tag{2.4}$$

unde $x_l(t)$ este soluția ecuației omogene

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \tag{2.5}$$

corespunzătoare ecuației (2.1), soluție care satisface condiția inițială (2.3), și $x_f(t)$ este soluția particulară a ecuației neomogene (2.1), care satisface condiția inițială $x_f(t_0) = 0$.

După cum este cunoscut, [H1], ecuația (2.5) admite soluția unică

$$x(t) = X(t)x(0), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2.6}$$

unde $X(t)$ este o matrice unică, soluția ecuației

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t),\ X(0) = I \text{ (matricea unitate)}. \tag{2.7}$$

Matricea $X(t)$, numită *matricea fundamentală* a sistemului (2.1), (2.2), este nesingulară și coloanele ei sînt soluții ale ecuației omogene (2.5). Vom presupune în cele ce urmează că expresia matricii $X(t)$ este cunoscută, deși nu a fost elaborat un procedeu general de determinare a ei.

În aceste condiții soluția $x_l(t)$ care satisface (2.3) are expresia

$$x_l(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0, \quad t \geqslant t_0, \tag{2.8}$$

unde

$$\Phi(t, t_0) = X(t)\, X^{-1}(t_0), \quad t \geqslant t_0, \tag{2.9}$$

este *matricea de tranziție* a sistemului (2.1), (2.2).

Pentru determinarea soluției particulare a ecuației (2.1), în cazul în care $u(t)$ este funcție continuă pe porțiuni, se folosește *metoda variației constantelor*. Această soluție este de forma

$$x_f(t) = \Phi(t, t_0) v(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{2.10}$$

unde $v(t)$ este un vector funcție de timp, necunoscut, care se determină din condiția ca (2.10) să fie soluție a ecuației (2.1). Înlocuind (2.10) în (2.1) și ținînd seama de (2.9) și de (2.7) se obține

$$\dot{X}(t)X^{-1}(t_0)\, v(t) + X(t)X^{-1}(t_0)\, \dot{v}(t) = A(t)\, X(t)\, X^{-1}(t_0)\, v(t) + \\ + B(t)\, u(t),$$

respectiv

$$\dot{v}(t) = X(t_0)\, X^{-1}(t)\, B(t)\, u(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{2.11}$$

Integrînd ecuația (2.11) pe intervalul $[t_0, t]$, înlocuind rezultatul în (2.10) și ținînd seama și de (2.9), rezultă

$$x_f(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau) u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.12}$$

Cu acest rezultat şi cu (2.8), în conformitate cu (2.4), soluţia ecuaţiei (2.1), care satisface condiţia iniţială (2.3), are următoarea expresie

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.13}$$

2.1.2. Sisteme discrete şi variante în timp

Ecuaţiile *intrare-stare-ieşire* ale acestui tip de sistem dinamic au următoarea formă

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \tag{2.14}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{2.15}$$

unde $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ şi $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ şi $D(k)$ sînt matrici reale, funcţii discrete de timp, de dimensiuni adecvate.

Ca şi în cazul sistemelor continue în timp, orice evoluţie a sistemului (2.14), (2.15) sub acţiunea intrării $u(k)$ poate fi determinată în mod unic pentru $k \geqslant k_0$, $k \in \mathbf{N}$, dacă se cunoaşte condiţia iniţială a stării

$$x(k_0) = x_0. \tag{2.16}$$

Soluţia ecuaţiei omogene

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{2.17}$$

corespunzătoare ecuaţiei (2.14), soluţie care satisface condiţia iniţială (2.16), se obţine recursiv, folosind chiar ecuaţia (2.17). Prin substituţie repetată putem scrie următoarele:

$$\begin{aligned}
&x(k_0+1) = A(k_0)x_0,\\
&x(k_0+2) = A(k_0+1)\, x(k_0+1) = A(k_0+1)\, A(k_0)x_0,\\
&x(k_0+3) = A(k_0+2)\, x(k_0+2) = A(k_0+2)A(k_0+1)A(k_0)x_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x(k_0+j) = A(k_0+j-1)A(k_0+j-2)\ldots A(k_0)x_0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Înlocuind $k = k_0 + j$ în ultima relaţie din setul (2.18), soluţia ecuaţiei omogene (2.17) rezultă de forma

$$x_l(k) = \Phi(k, k_0)x_0, \quad k \geqslant k_0 + 1, \tag{2.19}$$

unde

$$\Phi(k, k_0) = A(k-1)\,A(k-2)\ldots A(k_0), \quad k \geqslant k_0 + 1, \tag{2.20}$$

este *matricea de tranziție* a sistemului (2.14), (2.15). Această matrice satisface prin definiție condiția

$$\Phi(k_0, k_0) = I. \tag{2.21}$$

Este ușor de verificat că

$$\Phi(k+1, k_0) = A(k)\,\Phi(k, k_0), \quad k \geqslant k_0. \tag{2.22}$$

Soluția particulară $x_f(k)$ a ecuației neomogene (2.14) se obține în același mod pentru $x_f(k_0) = 0$. Înlocuind $k = k_0 + 1,\ k_0 + 2, \ldots, k_0 + j$, din (2.14), ținînd seama de (2.21) și (2.22), se obține următorul șir de egalități:

$$\begin{aligned}
x_f(k_0+1) &= B(k_0)\,u(k_0) = \Phi(k_0+1,\ k_0+1)\,B(k_0)\,u(k_0),\\
x_f(k_0=2) &= A(k_0+1)\,x_f(k_0+1) + B(k_0+1)\,u(k_0+1) =\\
&= \Phi(k_0+2,\ k_0+1)\,B(k_0)u(k_0) + \Phi(k_0+2,\ k_0+2)\,B(k_0+1)\,u(k_0+1),\\
x_f(k_0+3) &= A(k_0+2)\,x_f(k_0+2) + B(k_0+2)\,u(k_0+2) =\\
&= \Phi(k_0+3,\ k_0+1)\,B(k_0)\,u(k_0) + \Phi(k_0+3,\ k_0+2)\,B(k_0+1)\,u(k_0+\\
&\quad +1) + \Phi(k_0+3,\ k_0+3)\,B(k_0+2)\,u(k_0+2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_f(k_0+j) &= \sum_{l=0}^{j-1} \Phi(k_0+j,\ k_0+l+1)\,B(k_0+l)\,u(k_0+l).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Schimbînd $k = k_0 + j$ și $i = k_0 + l$ în ultima ecuație din setul (2.23), soluția particulară a ecuației neomogene (2.14) rezultă de următoarea formă

$$x_f(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)\,B(i)u(i), \quad k \geqslant k_0, \tag{2.24}$$

cu condiția că dacă $k = k_0$ atunci membrul drept din (2.24) este nul.

Soluția ecuației (2.14), care satisface condiția inițială (2.16), se obține prin suprapunerea soluțiilor (2.19) și (2.24) (operație legitimă în virtutea liniarității sistemului (2.14), (2.14)) și este de următoarea formă

$$x(k) = \Phi(k, k_0)\, x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i+1)\, B(i)\, u(i), \quad k \geqslant k_0. \tag{2.25}$$

2.1.3. Sisteme continue și invariante în timp

Această categorie de sisteme este descrisă de ecuațiile *intrare-stare-ieșire* (2.1), (2.2), în care matricile A, B, C și D sînt constante (independente de timp). Rezultatele obținute la 2.1.1 sînt, evident, valabile și în acest caz.

Faptul că A este matrice constantă atrage după sine o simplificare importantă a soluției (2.13), datorată faptului că *matricea fundamentală* $X(t)$ și *matricea de tranziție* $\Phi(t, t_0)$ pot fi explicitate analitic.

Vom arăta că dacă A este constantă atunci

$$X(t) = e^{At}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2.26}$$

este soluția ecuației

$$\dot{X}(t) = A\, X(t), \quad X(0) = I. \tag{2.27}$$

Funcția matriceală e^{At}, $t \in \mathbf{R}_+$, se definește într-o manieră simplă ca fiind suma seriei matriceale de puteri

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \ldots, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{2.28}$$

Înlocuind (2.28) în (2.27) rezultă că aceasta din urmă este verificată. În aceste circumstanțe matricea de tranziție (2.9) are următoarea expresie

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0, 0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{2.29}$$

iar soluția generală (2.13) a ecuației (2.1) devine

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.30}$$

2.1.4. Sisteme discrete și invariante în timp

Ecuațiile *intrare-stare-ieșire* în acest caz au forma (2.14), (2.15), în care matricile A, B, C și D sînt independente de k.

Rezultatele obținute la 2.1.2 rămîn valabile și în acest caz, dar pot fi aduse la o formă mai simplă avînd în vedere că matricea de tranziție (2.20), cu condiția (2.21), are expresia

$$\Phi(k, k_0) = \Phi(k - k_0, 0) = A^{k-k_0}, \quad k \geqslant k_0. \tag{2.31}$$

În aceste circumstanțe soluția ecuației (2.14) (vezi (2.25)) devine de forma

$$x(k) = A^{k-k_0}\, x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}\, B\, u(i), \quad k \geqslant k_0. \tag{2.32}$$

2.2. Sisteme dinamice neliniare cu parametri concentrați

Ecuațiile *intrare-stare-ieșire* ale unui sistem dinamic neliniar au forma (1.9), (1.10). Nu există metode generale pentru determinarea soluției ecuației de stare (1.9). În atare condiții principalele întrebări la care trebuie să se răspundă sînt acelea privitoare la faptul dacă ecuația diferențială (1.9) admite soluții și dacă pentru o anumită condiție inițială soluția corespunzătoare este unică. Răspunsurile la aceste întrebări sînt conținute în următorul enunț.

Teorema de existență și unicitate. Dacă pentru orice $u(t)$, cunoscut pe $[t_0, t] \subseteq T$, f este continuă, satisface condiția de mărginire

$$\| f(t, x(t), u(t)) \| \leqslant M, \quad t \in T, \quad x \in X, \tag{2.33}$$

și condiția lui Lipschitz

$$\| f(t, x, u) - f(t, \tilde{x}, u) \| < L \, \| x - \tilde{x} \|, \; t \in T, \; x, \tilde{x} \in X, \tag{2.34}$$

unde M și L sînt două constante pozitive, atunci ecuația (1.9) admite o soluție unică (1.11) care satisface condiția inițială $x(t_0) = x_0$, [H1].

În (2.33) și (2.34) cu $\|\cdot\|$ s-a notat o normă pe $\mathbf{R}^n$ (v. anexa C).

În aplicații intervin situații în care f nu satisface condițiile enunțate mai sus. Aceste condiții pot fi slăbite pînă la acelea care asigură cel puțin existența soluțiilor, cum ar fi de exemplu continuitatea lui f (teorema de existență a lui Peano, [H1]), sau, în cazul în care f este discontinuă în raport cu x, integrabilitatea lui f în raport cu t (soluții în sens Caratheodory, [H2]).

Pentru micile abateri ale variabilelor x şi u sistemul (1.9), (1.10) poate fi aproximat prin sistemul liniar (2.1), (2.2). Determinarea matricelor $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ şi $D(t)$ se poate face în acest caz prin dezvoltare în serie Taylor în raport cu variabilele x şi u a funcţiilor f şi g (în ipoteza că acestea sînt derivabile în raport cu x şi u) sau utilizînd metoda celor mai mici pătrate (în ipoteza că f şi g sînt integrabile în raport cu x şi u).

Faptul că nu există metode generale pentru determinarea soluţiei ecuaţiei (1.9) a avut ca urmare dezvoltarea unor *metode aproximative* şi a unor *metode calitative* de analiză şi de sinteză a sistemelor dinamice neliniare. Toate aceste metode au ca scop, sau pot fi adaptate pentru, analiza stabilităţii şi sinteza unor sisteme cu proprietăţi de stabilitate impuse, fără cunoaşterea soluţiei ecuaţiei (1.9).

3. Reprezentarea intrare-ieşire

3.1. Sisteme dinamice liniare cu parametri concentraţi

3.1.1. Sisteme continue şi variante în timp

În principiu, reprezentarea *intrare-ieşire* pentru această categorie de sisteme poate fi determinată cu ajutorul relaţiilor (2.13) şi (2.2). Rezultatul care se obţine este

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\mathrm{d}\tau + D(t)\, u(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{3.1}$$

Întrucît manipularea relaţiei (3.1) este grevată de prezenţa lui x_0 şi de $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, nespecificat, se preferă, atît din raţiuni teoretice cît şi practice, utilizarea unei forme particulare a relaţiei (3.1), definită în următoarele condiţii standard:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ u(t) = [1 \quad 1 \dots 1]^T\ \delta(t - \theta), \ \ \theta \in [t_0, t], \end{cases} \tag{3.2}$$

unde $\delta(t - \theta)$ este impulsul Dirac (cu θ fixat) şi $[\cdot]^T$ reprezintă operaţia de transpunere a vectorilor.

Înlocuind (3.2) în (3.1) se obţine

$$y_\delta(t) = g(t, \theta)\, [1 \quad 1 \dots 1]^T, \quad t \geqslant \theta, \tag{3.3}$$

unde

$$g(t,\,\theta) = C(t)\,\Phi(t,\,\theta)B(\theta) + D(t)\,\delta(t-\theta), \quad t \geqslant \theta, \tag{3.4}$$

este o matrice $(p \times m)$, numită *matricea de răspuns la impuls* a sistemului (2.1), (2.2). Orice altă evoluţie a sistemului, sub acţiunea unei intrări oarecare şi în condiţii iniţiale nule $(x_0 = 0)$, se poate explicita cu ajutorul *produsului de convoluţie generalizat*, sub forma

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\,\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0. \tag{3.5}$$

Rezultatele (3.4) şi (3.5) au, după cum se va vedea în subcapitolul 6, o valoare deosebită în studiul stabilităţii (deşi determinarea analitică a matricii $g(t,\,\theta)$ nu este întotdeauna posibilă).

3.1.2. Sisteme discrete şi variante în timp

Procedînd ca în paragraful precedent, reprezentarea *intrare-ieşire* a sistemului (2.14), (2.15) se obţine cu ajutorul relaţiilor (2.25) şi (2.15). Rezultatul corespunzător este următorul

$$y(k) = C(k)\,\Phi(k,\,k_0)\,x_0 + C(k) \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k,\,i+1)\,B(i)\,u(i) + \\ + D(k)\,u(k), \quad k \geqslant k_0. \tag{3.6}$$

Matricea de răspuns la impuls se defineşte în condiţiile standard:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ u(i) = 0, \quad i = k_0, \quad k_0 + 1, \ldots, k, \quad i \neq j \\ u(j) = [1 \quad 1 \ldots 1]^T, \quad k_0 \leqslant j \leqslant k-1. \end{cases} \tag{3.7}$$

În aceste circumstanţe din (3.6) rezultă

$$y_\delta(k) = g(k,\,j+1)\,[1 \quad 1 \ldots 1]^T, \quad k \geqslant j, \tag{3.8}$$

unde

$$g(k,\,j+1) = C(k)\,\Phi(k,\,j+1)\,B(j), \quad k \geqslant j, \tag{3.9}$$

este matricea de răspuns la impuls a sistemului (2.14), (2.15), cu precizarea că $g(j,\,j+1) = 0$.

Orice altă evoluție a sistemului, sub acțiunea unei intrări oarecare și în condiții inițiale nule ($x_0 = 0$), se poate explicita cu ajutorul *convoluției discrete generalizate*, sub următoarea formă

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} g(k, i+1)\, u(i) + D(k)\, u(k); \quad k \geq k_0. \tag{3.10}$$

3.1.3. Sisteme continue și invariante în timp

Invarianța în timp a sistemului (2.1), (2.2) atrage după sine simplificări importante și în reprezentarea *intrare-ieșire*. În virtutea invarianței temporale condițiile standard (3.2) se completează cu

$$\theta = t_0 = 0, \tag{3.11}$$

astfel că matricea de răspuns la impuls, ținînd seama și de (2.29), are următoarea expresie

$$g(t, 0) = C\, e^{At}\, B + D\delta(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{3.12}$$

O evoluție oarecare a sistemului, în condiții inițiale nule, sub acțiunea intrării $u(t)$, se explicitează prin produsul de convoluție

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau, 0)\, u(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{3.13}$$

O altă posibilitate de exprimare a relației *intrare-ieșire* a acestui tip de sistem constă în aplicarea transformării Laplace (v. anexa A) ecuațiilor (2.1), (2.2), cu A, B, C și D matrici constante, pentru $u(t) = 0$, $t < 0$ (ceea ce implică $x(-0) = 0$). Procedînd în acest mod și eliminînd $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$ între transformatele Laplace ale ecuațiilor (2.1) și (2.2) cu A, B, C și D matrici constante, se obține următoarea ecuație intrare-ieșire

$$Y(s) = G(s)\, U(s), \tag{3.14}$$

unde

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D \tag{3.15}$$

este *matricea de transfer* a sistemului și $U(s) = \mathfrak{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$.

Comparînd (3.13) cu (3.14) și ținînd seama de teorema transformării produsului de convoluție (anexa A) este ușor de observat că matricea de transfer este transformata Laplace a matricii de răspuns la impuls, adică

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t, 0)\}. \tag{3.16}$$

3.1.4. Sisteme discrete şi invariante în timp

Şi în cazul acestor sisteme invarianţa în timp atrage după sine unele simplificări ale reprezentării *intrare-ieşire* (expresia (3.10)). Pentru $j = k_0 = 0$, ţinînd seama de (2.31), *matricea de răspuns la impuls* (3.9) are expresia

$$g(k, 1) = g(k-1, 0) = CA^{k-1}B, \quad k \in \mathrm{N}, \tag{3.17}$$

cu precizarea că $g(0, 1) = g(-1, 0) = 0$.

O evoluţie oarecare a sistemului, cu condiţii iniţiale nule, sub acţiunea intrării $u(k)$, $k \in \mathrm{N}$, se explicitează, în conformitate cu (3.10), prin *convoluţia discretă*

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} g(k-i-1, 0)\, u(i) + Du(k), \quad k \in \mathrm{N}. \tag{3.18}$$

O altă posibilitate de exprimare a relaţiei *intrare-ieşire* în cazul sistemelor discrete şi invariante în timp constă în aplicarea transformării $\mathcal{Z}$ (v. anexa B) ecuaţiilor (2.14), (2.15), în care matricele A, B, C şi D sînt independente de k, pentru $x_0 = 0$. După eliminarea lui $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$ între cele două ecuaţii rezultă

$$Y(z) = G(z)\, U(z), \tag{3.19}$$

unde

$$G(z) = C(Iz - A)^{-1}B + D \tag{3.20}$$

este *matricea de transfer* în z a sistemului şi $U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\}$.

Comparînd (3.18) cu (3.19) şi ţinînd seama de teorema transformării produsului de convoluţie discret (v. anexa B) se observă că

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k-1, 0)\} + D. \tag{3.21}$$

3.2. Sisteme dinamice neliniare cu parametri concentraţi

Explicitarea reprezentării *intrare-ieşire*, urmînd aceeaşi cale ca la sistemele liniare, nu este în general posibilă în cazul sistemelor dinamice neliniare.

Forma uzuală a descrierii *intrare-ieşire* a unui sistem dinamic neliniar, obţinută prin aplicarea legilor generale ale naturii, este următoarea

$$F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \overset{(r)}{y}(t), u(t), u(t), \dots, \overset{(q)}{u}(t)) = 0, \quad t \in T, \tag{3.22}$$

unde F este o funcţie vector l-dimensională, u şi y au semnificaţiile deja cunoscute şi l, q, r sînt numere naturale.

Dacă ecuaţia (3.22) poate fi rezolvată în raport cu $\overset{(r)}{y}(t)$, atunci reprezentarea *intrare-ieşire* are forma

$$\overset{(r)}{y}(t) = \mathscr{F}(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \overset{(r-1)}{y}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, \overset{(q)}{u}(t)), \quad t \in T, \tag{3.23}$$

unde $\mathscr{F}$ este o funcţie vector p-dimensională.

Problema existenţei şi unicităţii soluţiei ecuaţiei (3.23), care satisface condiţia iniţială

$$\overset{(k)}{y}(t_0) = \overset{(k)}{y}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r-1, \quad t_0 \in T, \tag{3.24}$$

poate fi abordată ca la § 2.2. Pentru aceasta se utilizează transformarea

$$x^{k+1}(t) = \overset{(k)}{y}(t), \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \tag{3.25}$$

În aceste condiţii sistemul (3.23) devine

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}^{r-1}(t) \\ \dot{x}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \\ \vdots \\ x^r(t) \\ \mathscr{F}(t, x^1(t), \dots, x^r(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, \overset{(q)}{u}(t)) \end{bmatrix}, \quad t \in T. \tag{3.26}$$

4. Stabilitatea internă

Problema *stabilității interne* a sistemelor dinamice este direct legată de continuitatea funcției de tranziție a stărilor

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, u_{]t_0,\, t]}), \quad t \geqslant t_0, \tag{4.1}$$

care este soluția ecuației de stare (1.9), în raport cu perechea $(t_0, x_0) \in T \times X$, în condițiile în care sistemul este *liber*, adică $u(t) = 0$, $t \geqslant t_0$.

Așadar pentru studiul stabilității interne vom avea în vedere sisteme dinamice de forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{4.2}$$

unde f satisface teorema de existență și unicitate de la § 2.2 pentru $t \in \mathbf{R}_+$ și $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$.

4.1. Stabilitatea echilibrului

4.1.1. Punct de echilibru

Dacă există $a \in X$ astfel încît

$$f(t, a) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.3}$$

atunci $x = a$ se numește *punct de echilibru (punct fix* sau *punct singular)* al sistemului dinamic (4.2). Este evident că pentru orice punct de echilibru al sistemului dinamic ecuația (4.2) admite soluția $x(t) = a$, $t \in \mathbf{R}_+$.

Noțiunea de punct de echilibru are un sens fizic evident. Pentru sistemul reprezentat în secțiune în fig. I.15, în care S este o suprafață metalică netedă și B o bilă metalică, aflat sub acțiunea gravitației, punctele A_1, A_2 și A_3 sînt puncte de echilibru. Conceptul de stabilitate s-a conturat în sfera intuitivă, în legătură cu comportarea unui sistem real în urma scoaterii sale din starea de echilibru prin condiții inițiale adecvate. De exemplu dacă bila B, fig. I.15, se află în punctul A_1 (sau A_3) și la $t_0 \geqslant 0$ se imprimă bilei o anumită viteză inițială, *suficient de mică*, în evoluția sistemului (pentru $t \geqslant t_0$) sînt posibile următoarele două situații:

1° datorită pierderilor de energie, prin frecare, bila revine după un timp oarecare, printr-o mișcare oscilatorie amortizată sau aperiodică, în punctul de echilibru A_1 (sau A_3);

2° dacă pierderile de energie prin frecare sînt nule, bila B va executa o mişcare oscilatorie de amplitudine constantă în jurul punctului de echilibru A_1 (sau A_3).

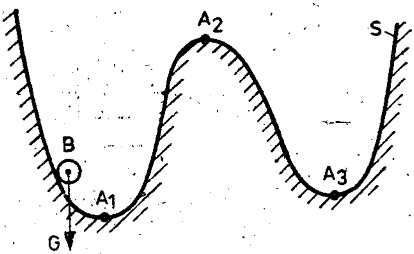


Fig. I.15. Sistem cu trei puncte de echilibru.

Dacă bila B se află în punctul A_2 şi la $t_0 \geqslant 0$ se imprimă bilei o viteză iniţială, *oricît de mică*, bila nu mai are posibilitatea să revină în A_2 sau să oscileze în jurul lui A_2 şi se va deplasa către A_1 sau A_3.

După cum este cunoscut, punctele A_1 şi A_3 se numesc *puncte de echilibru asimptotic stabile* — în cazul revenirii bilei exact în punctul de echilibru, sau *puncte de echilibru stabile* — în cazul oscilaţiilor în jurul punctului de echilibru, în timp ce A_2 se numeşte *punct de echilibru instabil*.

Din exemplul considerat trebuie să reţinem că, în esenţă, conceptul de stabilitate a echilibrului are următoarea formulare: pentru perturbaţii prin condiţii iniţiale suficient de mici, evoluţia sistemului, scos astfel din starea de echilibru, are loc într-o vecinătate a punctului de echilibru sau chiar către punctul de echilibru.

Sistemele dinamice din natură şi în special cele create de om funcţionează, în marea majoritate a cazurilor, în puncte de echilibru stabile sau asimptotic stabile. Un aparat, o instalaţie, un organism, un ecosistem, în general un sistem dinamic real, funcţionează în anumite condiţii care definesc un anumit echilibru al sistemului. Din cauze mai mult sau mai puţin cunoscute, aceste condiţii se pot schimba, atrăgînd după sine modificări, în anumite momente, ale condiţiilor iniţiale ale sistemului, ceea ce constituie de fapt perturbaţii ale stării de echilibru a sistemului. Din raţiuni legate de buna funcţionare sau chiar de însăşi existenţa sistemului, abaterile de la starea de echilibru nu trebuie să depăşească anumite limite şi, mai mult, cu creşterea timpului sistemul trebuie să revină *în mod natural* la starea de echilibru din care a fost perturbat.

4.1.2. Exemple

a) **Amplificator electronic cu reacţie.** Se consideră un amplificator electronic cu reacţie după ieşire, fig. I.16, *a*. $G_a(s)$ este funcţia de transfer a amplificatorului şi $G_r(s)$ este funcţia de transfer a reacţiei.

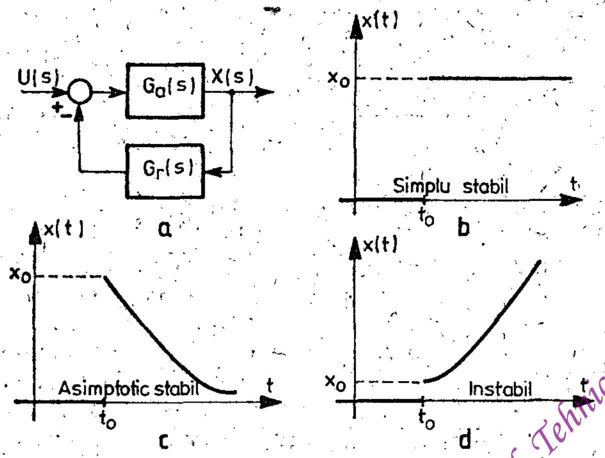


Fig. I.16. Amplificator electronic cu reacţie după ieşire (a) şi graficul funcţiei (4.10) pentru $\alpha = 0$ (b), $\alpha > 0$ (c) şi $\alpha < 0$ (d).

Dacă amplificatorul este caracterizat, în curent continuu, prin factorul de amplificare k şi, în regim sinusoidal, prin banda de trecere $[0, \omega_t]$, atunci comportarea dinamică a amplificatorului în zona de liniaritate poate fi exprimată, într-o primă aproximaţie, prin

$$G_a(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad T = \frac{1}{\omega_t}. \tag{4,4}$$

Reacţia după ieşire este de tip proporţional, adică

$$G_r(s) = k_r. \tag{4.5}$$

Relaţia intrare-ieşire, conform fig. I.16, a şi relaţiilor (4.4), (4.5), se concretizează prin ecuaţia

$$X(s) = \frac{k}{T_s + k_r k + 1} U(s). \tag{4.6}$$

Eliminînd numitorul şi trecînd la domeniul timpului, pentru $u(t) = 0$, $t < 0$, şi $x(-0) = 0$, ecuaţiei (4.6) îi corespunde ecuaţia de stare

$$\dot{x} = -\alpha x + \beta u, \ \alpha = \frac{1}{T}(k_r k + 1), \ \beta = \frac{k}{T}. \tag{4.7}$$

Pentru a examina problema stabilităţii echilibrului vom presupune că $u(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}_+$. În acest caz ecuaţia (4.3) are forma

$$-\alpha x = 0, \tag{4.8}$$

şi admite soluţia

$$x = 0, \tag{4.9}$$

care defineşte punctul de echilibru al sistemului.

Se consideră că sistemul se află în această stare de echilibru şi că la $t_0 \geqslant 0$, într-un mod oarecare (de exemplu prin cuplaje parazite cu alte dispozitive electrice), se alocă sistemului condiţia iniţială $x_0 \neq 0$. În aceste circumstanţe soluţia ecuaţiei (4.7), cu $u = 0$, este

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < t_0, \\ x_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} & , \ t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Din punctul de vedere al stabilităţii echilibrului sînt posibile următoarele trei cazuri.

1° $\alpha = 0 \left(k_r = -\dfrac{1}{k}\right)$. În acest caz graficul lui $x(t)$ are forma din fig. I.16, *b*. Se spune că echilibrul este simplu *stabil* deoarece x rămîne într-o vecinătate a stării de echilibru $x = 0$, abarerea faţă de aceasta depinzînd de x_0.

2° $\alpha > 0 \left(k_r > -\dfrac{1}{k}\right)$. Graficul lui $x(t)$ are forma din fig. I.16, *c*. Se observă că pe măsură ce t creşte, x revine în mod natural la starea de echilibru pe care a părăsit-o în urma perturbării prin condiţia iniţială. Se spune că punctul de echilibru este *asimptotic stabil*.

3° $\alpha < 0 \left(k_r < -\dfrac{1}{k}\right)$. Graficul lui $x(t)$ are forma din fig. I.16, *d*. Întrucît $|x(t)| \to +\infty$ pentru $t \to +\infty$ (revenirea la starea de echilibru nu mai este posibilă oricît de mic ar fi $|x_0|$), se spune că punctul de echilibru este *instabil*.

Observaţie. Din practică se ştie că un amplificator cu reacţie pozitivă $\left(k_r < -\dfrac{1}{k}\right)$ funcţionează ca un oscilator, fapt care nu a fost pus în evidenţă la 3°. Această neconcordanţă se datoreşte faptului că modelul matematic (4.7) al amplificatorului electronic este rudimentar. Se va vedea la III.2.2.4 că funcţionarea ca oscilator poate fi pusă uşor în evidenţă utilizînd pentru amplificator un model matematic neliniar.

b) **Proces de reînnoire a stocului pieselor de schimb.** Se consideră procesul analizat la 1.4.5, cu $n = 1$, descris de ecuaţia de stare

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{4.11}$$

Dacă aprovizionarea cu piese de schimb se face în funcţie de stare, conform relaţiei

$$u(k) = \alpha x_1(k), \quad k \in \mathbf{N}, \quad \alpha > 0, \tag{4.12}$$

atunci, înlocuind (4.12) în (4.11), se obţine următorul sistem

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ p_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{4.13}$$

Starea de echilibru a sistemului (4.13) este definită de $x_0 = x_1 = 0$. Dacă la $k_0 \in \mathbf{N}$ sistemul este perturbat prin condiţiile iniţiale $x_0(k_0) > 0$, $x_1(k_0) > 0$, atunci evoluţia stării sistemului este următoarea (vezi şi 2.1.4)

$$\begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & k < k_0, \\[2ex] \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ p_0 & 0 \end{bmatrix}^{k-k_0} \begin{bmatrix} (x_0 k_0) \\ x_1(k_0) \end{bmatrix}, & k \geqslant k_0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Efectuînd calculele în (4.14) se constată că

$$x_0(k) = \begin{cases} \alpha x_1(k_0)\,(\alpha p_0)^{\frac{1}{2}(k-k_0-1)}, & k - k_0 \text{ impar}, \\[1ex] x_0(k_0)\,(\alpha p_0)^{\frac{1}{2}(k-k_0)}, & k - k_0 \text{ par}, \end{cases} \tag{4.15}$$

şi

$$x_1(k) = \begin{cases} p_0 x_0(k_0)\,(\alpha p_0)^{\frac{1}{2}(k-k_0-1)}, & k - k_0 \text{ impar}, \\[1ex] x_1(k_0)\,(\alpha p_0)^{\frac{1}{2}(k-k_0)}, & k - k_0 \text{ par}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Din punctul de vedere al stabilităţii sînt posibile şi aici următoarele trei cazuri.

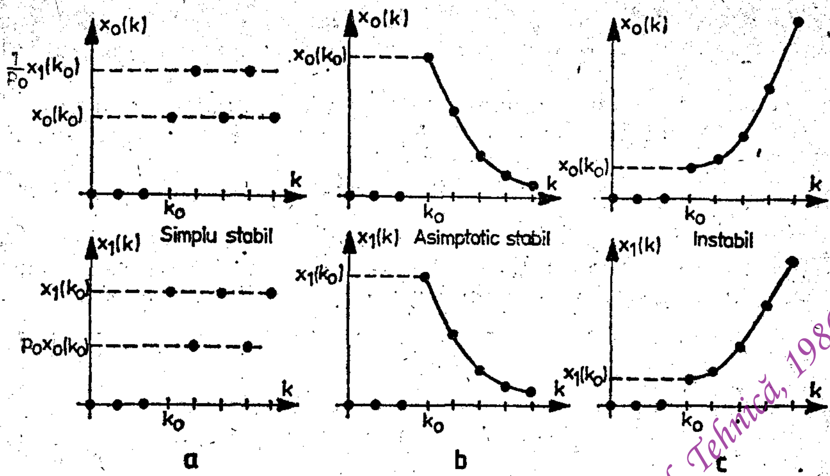


Fig. I.17. Graficele funcțiilor (4.15) și (4.16) pentru $\alpha = 1/p_0$ (*a*), $\alpha < 1/p_0$ (*b*) și $\alpha > 1/p_0$ (*c*).

1° $\alpha p_0 = 1\left(\alpha = \dfrac{1}{p_0}\right)$. În acest caz $x_0(k)$ și $x_1(k)$ nu au limite pentru $k \to +\infty$ (șirurile $x_0(k)$ și $x_1(k)$ sînt oscilante între valorile $x_0(k_0)$ și $\dfrac{1}{p_0}x_1(k_0)$ și respectiv $x_1(k_0)$ și $p_0x_0(k_0)$). Punctul de echilibru este ***simplu stabil*** — fig. I.17, ***a***.

2° $\alpha p_0 < 1\left(\alpha < \dfrac{1}{p_0}\right)$. În acest caz $\lim\limits_{k\to\infty} x_0(k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_1(k) = 0$, oricare ar fi $x_0(k_0)$ și $x_1(k_0)$ finiți, ceea ce înseamnă că punctul de echilibru este *asimptotic stabil* — fig. I.17, *b*.

3° $\alpha p_0 > 1\left(\alpha > \dfrac{1}{p_0}\right)$. De această dată $\lim\limits_{k\to\infty} x_0(k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_1(k) = +\infty$, oricînt de mici ar fi $x_0(k_0)$ și $x_1(k_0)$. Punctul de echilibru este *instabil* — fig. I.17, *c*.

4.2. Stabilitatea în sens Liapunov

Conceptul de stabilitate a echilibrului în forma sa intuitivă devine inoperant în cazul sistemelor de ordin superior. O abordare științifică a problemei stabilității a impus formalizarea riguroasă a noțiunilor din sfera stabilității. S-a ajuns astăzi la o mare diversitate a acestor noțiuni, toate avîndu-și izvorul în lucrările deschizătoare de drumuri ale lui Liapunov, [L3].

Se consideră sistemul dinamic (4.2), unde f satisface condițiile de existență și unicitate a soluției, $t \in \mathbf{R}_+$ și $\| x \| < K < +\infty$ și în plus

$$f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.17}$$

ceea ce înseamnă că $x = 0$ este *punct de echilibru* al sistemului. Ipoteza (4.17) nu reduce din generalitate, deoarece dacă $x = a \neq 0$ este punct de echilibru, atunci făcînd schimbarea de variabilă dependentă

$$\tilde{x} = x - a, \tag{4.18}$$

sistemul (4.2) devine

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t, \tilde{x}), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad \tilde{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{4.19}$$

unde

$$\tilde{f}(t, \tilde{x}) = f(t, \tilde{x} + a). \tag{4.20}$$

Starea $\tilde{x} = 0$ este punct de echilibru al sistemului (4.19) deoarece $\tilde{f}(t, 0) = f(t, a) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_+$.

4.2.1. Definiții

Definițiile care vor urma se vor referi la sistemele dinamice continue în timp. Ele pot fi reformulate, *mutatis mutandis* și pentru sistemele dinamice discrete în timp. Adaptările necesare se referă desigur la variabila temporală. Întrucît ele nu implică dificultăți majore, considerăm că pot fi realizate, ca un exercițiu util, de către cititor.

Definiția 1. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (4.2) se numește *stabil* dacă pentru orice scalar pozitiv ε există un scalar pozitiv δ astfel încît $\| x_0 \| < \delta$ implică $\| x(t) \| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$.

Definiția 2. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (4.2) se numește *asimptotic stabil* dacă el este stabil și în plus

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = 0. \tag{4.21}$$

Definiția 3. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (4.2) se numește *instabil* dacă nu este stabil; aceasta înseamnă că există un $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $\delta \geqslant 0$ există un x_0, cu $\| x_0 \| < \delta$, astfel încît

$\| x(t_1) \| \geqslant \varepsilon$ pentru unii $t_1 > t_0$; dacă acestea au loc pentru orice x_0, cu $\| x_0 \| < \delta$, atunci punctul de echilibru se numeşte *complet instabil*.

Din definiţiile de mai sus rezultă că stabilitatea asimptotică implică stabilitatea (deci un punct de echilibru asimptotic stabil este şi stabil) şi completa instabilitate implică instabilitatea (un punct de echilibru complet instabil este şi instabil).

Avînd în vedere relaţia dintre *definiţiile 1* şi *2* se introduce şi următoarea nuanţare.

Definiţia 1'. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (4.2) se numeşte *simplu stabil (neutral stabil)* dacă el este stabil dar nu este asimptotic stabil.

4.2.2. Interpretare geometrică

După cum s-a arătat, soluţia $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $t \geqslant t_0$, a ecuaţiei (4.2) parcurge în $\mathbf{R}^n$ o curbă numită traiectorie. În cazul bidimensional ($n = 2$) reprezentarea traiectoriei se face în plan, fiind posibilă o interpretare geometrică simplă a definiţiilor de mai sus. Precizăm că o inegalitate de forma $\| x \| \leqslant \alpha$, unde $\| \cdot \|$ este de exemplu norma euclideană, are ca imagine în plan un disc mărginit de cercul C_α, cu centrul în origine şi rază α.

Dacă originea planului stărilor este un punct de echilibru *stabil* al sistemului (4.2) atunci oricare ar fi cercul C_ε, de rază ε, există în interiorul său un cerc C_δ, de rază $\delta \leqslant \varepsilon$, astfel încît orice traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ($\| x_0 \| < \delta$), cu creşterea nelimitată a timpului, rămîne în interiorul cercului C_ε — fig. I.18, *a*.

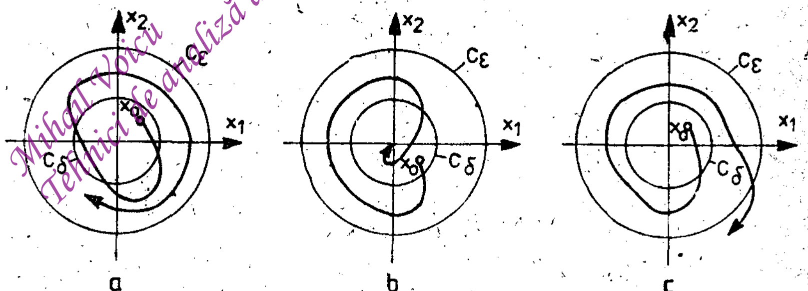


Fig. I.18. Punctul de echilibru $x = 0$ este stabil (simplu stabil) (*a*), asimptotic stabil (*b*) şi instabil (*c*).

Dacă originea planului stărilor este un punct de echilibru *asimptotic stabil* al sistemului (4.2) atunci orice traiectorie care porneşte din interiorul cercului C_δ, pe lîngă faptul că rămîne în interiorul cercului C_ε, mai satisface condiţia că ea converge către origine atunci cînd timpul creşte nelimitat — fig. I.18, *b*.

O comportare contrară aceleia din fig. I.18, *a*, respectiv există un cerc C_ε astfel încît pentru orice cerc C_δ există o traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ şi nu rămîne în interiorul cercului C_ε, atunci cînd timpul creşte suficient de mult, pune în evidenţă faptul că originea planului stărilor este un punct de echilibru *instabil* al sistemului (4.2) — fig. I.18, *c*.

În sfîrşit, dacă instabilitatea are loc pentru orice traiectorie care porneşte din interiorul cercului C_δ atunci originea planului stărilor este un punct de echilibru *complet instabil* al sistemului (4.2).

Pentru $n \geqslant 3$ interpretarea geometrică a definiţiilor de la 4.2.1 este asemănătoare cu cea pentru $n = 2$, cu deosebirea că cercurile C_δ şi C_ε se înlocuiesc cu sfere pentru $n = 3$ şi cu hipersfere pentru $n \geqslant 4$.

4.2.3. Stabilitatea globală

Din cele înfăţişate anterior rezultă că într-adevăr stabilitatea internă este o problemă de continuitate a soluţiei $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $t \geqslant t_0$, a ecuaţiei (4.2) în raport cu perechea (t_0, x_0). Pornind de la acest fapt se trage concluzia că în cazul stabilităţii, al stabilităţii asimptotice sau al instabilităţii se poate pune problema determinării în mulţimea $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$ a submulţimilor maxime (în sensul cuprinderii tuturor perechior (t_0, x_0) posibile) pentru care originea spaţiului stărilor este respectiv punct de echilibru stabil, asimptotic stabil sau instabil.

Definiţia 4. Fie $X_a \subseteq \mathbf{R}^n$, cu $0 \in X_a$. Dacă $x = 0$ este un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (4.2) pentru orice $t_0 \in \mathbf{R}_+$ şi pentru orice $x_0 \in X_a$ şi nu este asimptotic stabil pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus X_a$ atunci X_a se numeşte *mulţimea de atracţie* a sistemului (4.2), corespunzătoare punctului de echilibru $x = 0$.

Definiţia 5. Dacă $x = 0$ este punct de echilibru asimptotic stabil (stabil sau instabil) al sistemului (4.2) pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$ şi pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$ atunci punctul $x = 0$ se numeşte *global asimptotic stabil (global stabil* sau *global instabil).*

Conform definiţiei precedente, globalitatea stabilităţii asimptotice, a stabilităţii sau a instabilităţii implică faptul că punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (4.2) este unic. În aceste cazuri se obişnuieşte să se spună că *sistemul (4.2) este asimptotic stabil, stabil sau instabil.*

5. Stabilitatea internă a sistemelor dinamice liniare

În cazul sistemelor dinamice liniare studiul stabilităţii poate fi abordat direct, utilizînd în acest scop soluţia sistemului. Se pot stabili pe această cale rezultatele fundamentale care stau la baza tehnicilor de analiză a stabilităţii acestei categorii de sisteme.

5.1. Stabilitatea internă a sistemelor dinamice liniare variante în timp

Fie sistemul dinamic liniar continuu în timp

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{5.1}$$

unde $A(t)$ este o matrice reală $(n \times n)$, cu elemente funcţii continue pe $\mathbf{R}_+$.

După cum s-a arătat la 2.1.1, soluţia care satisface condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$, cu $t_0 \in \mathbf{R}_+$ şi $x_0 \in \mathbf{R}^n$, are expresia

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0, \quad t \geqslant t_0, \tag{5.2}$$

unde $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ este *matricea de tranziţie* şi $X(t)$ este *matricea fundamentală* a sistemului (5.1).

Teorema 1. O condiţie necesară şi suficientă ca $x = 0$ să fie punct de echilibru stabil al sistemului (5.1) este ca să existe o constantă $M > 0$ astfel încît

$$\| X(t) \| \leqslant M, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{5.3}$$

D. *Suficienţa.* Dacă are loc (5.3) atunci, aplicînd norma în (5.2), se obţine

$$\| x(t) \| = \| X(t)X^{-1}(t_0)x_0 \| \leqslant \| X(t) \| \cdot \| X^{-1}(t_0) \| \; \| x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant M \, \| X^{-1}(t_0) \| \; \| x_0 \|, \quad t \geqslant t_0.$$

Dacă $\| x_0 \| < \delta = \varepsilon(M \, \| X^{-1}(t_0) \|)^{-1}$ atunci $\| x(t) \| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, ceea ce este suficient pentru stabilitate.

Necesitatea. Soluţia $x = 0$ este stabilă, ceea ce implică $\| x(t) \| < \varepsilon$, $t \in \mathbf{R}_+$, pentru $\| x_0 \| < \delta$. În virtutea liniarităţii rezultă că orice soluţie a sistemului (5.1) este mărginită pentru $t \in \mathbf{R}_+$. Întrucît coloanele matricii fundamentale $X(t)$ sînt soluţii ale sistemului (5.1) pentru $t \in \mathbf{R}_+$, rezultă că are loc (5.3), unde M este o anumită constantă. ■

Teorema 2. O condiţie necesară şi suficientă ca $x = 0$ să fie punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (5.1) este ca

$$\lim_{t \to \infty} \| X(t) \| = 0. \tag{5.4}$$

D. *Suficienţa.* Întrucît (5.4) implică (5.3) rezultă că (5.4) este suficientă pentru stabilitate. Aplicînd norma în (5.2) putem scrie $\| x(t) \| \leqslant \leqslant \| X(t) \| \, \| X^{-1}(t_0) \| \, \| x_0 \|$, $t \geqslant t_0$. Trecînd la limită pentru $t \to \infty$ în ultima inegalitate, ţinînd seama de (5.4), rezultă $\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = 0$. În conformitate cu *definiţia 2* de la 4.2.1 ultimul rezultat este suficient pentru stabilitatea asimptotică.

Necesitatea. Dacă $x = 0$ este punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (5.1) atunci (4.21) are loc şi pentru $t_0 = 0$, oricare ar fi x_0, cu $\| x_0 \| < \delta$. În virtutea liniarităţii sistemului (5.1) relaţia (4.21) are loc şi pentru coloanele matricii $X(t)$. Acest fapt implică (5.4). ■

Desigur că condiţiile (5.3) şi (5.4) nu se pot aplica practic decît în cazurile în care matricea fundamentală $X(t)$ este cunoscută. Acest fapt nu reduce cîtuşi de puţin valoarea teoretică a *teoremelor 1 şi 2*, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Teoremele 1 şi 2 rămîn valabile, *mutatis mutandis*, şi în cazul sistemelor dinamice liniare discrete şi variante în timp de forma

$$x(k+1) = A(k)\, x(k), \quad k \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{5.5}$$

În acest caz matricea fundamentală poate fi determinată din (2.20) pentru $k_0 = 0$. Rezultă

$$X(k) = \Phi(k, 0) = A(k-1) A(k-2) \ldots A(0), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5.6}$$

astfel că *teoremelor 1 şi 2* le corespund următoarele rezultate.

Teorema 3. O condiţie necesară şi suficientă ca $x = 0$ să fie punct de echilibru stabil al sistemului (5.5) este ca să existe o constantă $M > 0$, astfel încît

$$\| X(k) \| \leqslant M, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.7}$$

Teorema 4. O condiţie necesară şi suficientă ca $x = 0$ să fie punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (5.5) este ca

$$\lim_{k \to \infty} \| X(k) \| = 0. \tag{5.8}$$

5.2. Stabilitatea internă a sistemelor dinamice liniare invariante în timp

Teoremele 1, 2 şi *teoremele 3, 4* rămîn valabile şi în cazul sistemelor invariante în timp. Avînd în vedere formele particulare ale matricilor fundamentale (în cazul continuu — relaţia (2.26) şi în cazul discret — relaţia (5.6), din care rezultă $X(k) = A^k$, $k \in \mathbf{N}$) şi condiţiile (5.3), (5.4) şi (5.7), (5.8), rezultă că problema stabilităţii este legată de distribuţia valorilor proprii ale matricii A în planul complex.

5.2.1. Forma canonică diagonală (Jordan) a unei matrici pătratice

Fie A o matrice $(n \times n)$, cu elemente reale sau complexe.

Matricea $Is - A$, în care $s \in \mathbf{C}$, se numeşte *matricea caracteristică a matricii* **A**. Determinantul

$$\Delta(s) = \det\ (Is - A) \tag{5.9}$$

este un polinom de gradul n în s şi se numeşte *polinomul caracteristic* al matricii A. Ecuaţia $\Delta(s) = 0$ se numeşte *ecuaţia caracteristică*, iar rădăcinile ei se numesc *valorile proprii* ale matricii A.

Fie P o matrice $(n \times n)$, nesingulară $(\det P \neq 0)$.

Matricile A şi $\tilde{A}$ legate prin relaţia

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \tag{5.10}$$

se numesc *matrici asemenea*.

Două matrici asemenea, A şi $\tilde{A}$, au acelaşi polinom caracteristic şi deci şi aceleaşi valori proprii, adică $\tilde{\Delta}(s) = \Delta(s)$, unde $\tilde{\Delta}(s) = \det\,(Is - \tilde{A})$. Într-adevăr, putem scrie $\tilde{\Delta}(s) = \det(Is - PAP^{-1}) = \det\,[P(Is - A)P^{-1}] = \det P\ \Delta(s)\ \det P^{-1} = \Delta(s)$.

În virtutea acestui fapt ne putem propune să determinăm în continuare acea matrice P pentru care matricea $\tilde{A}$ are numărul maxim posibil de elemente nule. Pentru aceasta pornim de la observaţia că ecuaţia

$$(I\lambda - A)v = 0, \tag{5.11}$$

unde λ este o valoare proprie a matricii A şi v este un vector n-dimensional necunoscut, admite întotdeauna o soluţie v, *nenulă*. Această afirmaţie este adevărată în virtutea faptului că $\det(I\lambda - A) = 0$. Vectorul v se numeşte *vectorul propriu* al matricii A corespunzător valorii proprii λ.

a) **Cazul valorilor proprii distincte.** Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale matricii A. Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ atunci $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt liniar independenţi între ei. Pentru a demonstra independenţa liniară a doi vectori oarecare v_i şi v_j, $i \neq j$, presupunem prin absurd că există două constante scalare $\alpha_i \neq 0$ şi $\alpha_j \neq 0$, astfel încît

$$\alpha_i v_i + \alpha_j v_j = 0, \quad i \neq j. \tag{5.12}$$

Aceasta înseamnă că $A(\alpha_i v_i + \alpha_j v_j) = 0$. Conform definiţiei (5.11) mai putem scrie

$$\alpha_i A v_i + \alpha_j A v_j = \alpha_i \lambda_i v_i + \alpha_j \lambda_j v_j = 0, \quad i \neq j. \tag{5.13}$$

Explicitînd v_j din (5.12) şi înlocuindu-l în (5.13) se obţine $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0$, $i \neq j$, ceea ce este imposibil, deoarece $\alpha_i \neq 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ şi $v_j \neq 0$.

În mod analog se poate demonstra că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt liniar independenţi în totalitatea lor.

Fie matricea

$$V = [v_1 v_2 \ldots v_n] \tag{5.14}$$

ale cărei coloane sînt vectorii proprii ai matricii A. V se numeşte *matricea modală* a matricii A. Întrucît coloanele matricii V sînt liniar independente, rezultă că $\det V \neq 0$ şi deci V este inversabilă.

Vom arăta că înlocuind $P = V^{-1}$ în (5.10) se obţine rezultatul căutat.

Pentru aceasta să observăm că relaţiile

$$A v_i = \lambda_i v_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.15}$$

prin care se definesc vectorii proprii ai matricii A, se pot scrie mai simplu sub următoarea formă matriceală

$$AV = VJ, \tag{5.16}$$

unde

$$J = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{5.17}$$

este matricea diagonală a valorilor proprii.

Înmulţind (5.16) la stînga cu V^{-1} se obţine

$$J = V^{-1} AV. \tag{5.18}$$

Matricea J, asemenea cu A, se numeşte *forma canonică diagonală* a matricii A.

b) **Cazul valorilor proprii multiple.** Pentru fiecare valoare proprie λ_i, de multiplicitate q_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, cu $\sum_{i=1}^{n} q_i = n$, se caută q_i vectori proprii conform definiției (5.1). Dacă acest lucru este posibil pentru toți λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, atunci există n vectori proprii liniar independenți cu care se poate construi matricea modală V. Prin transformarea (5.18) se obține forma canonică diagonală a matricii A. Se poate arăta că o astfel de situație apare în cazul matricilor reale simetrice cu valori proprii multiple.

În cazul în care pentru un λ_i nu se pot determina q_i vectori proprii, atunci nu există o matrice diagonalizatoare P și matricea A nu admite o formă canonică diagonală. Vom arăta că în acest caz matricea A are o *formă canonică Jordan*, de exemplu cu următoarea structură:

$$J = \left[\begin{array}{cccccc} \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\\ \hline\end{array} & & & & & \\ & \boxed{\lambda_1} & & & 0 & \\ & & \boxed{\lambda_2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \begin{array}{|cc|}\hline \lambda_r & 1\\ 0 & \lambda_r\\ \hline\end{array} & \\ & & & & & \begin{array}{|cc|}\hline \lambda_r & 1\\ 0 & \lambda_r\\ \hline\end{array} \end{array}\right]. \tag{5.19}$$

Submatricile delimitate de liniile întrerupte sînt *blocurile Jordan* corespunzătoare valorilor proprii λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Unei valori proprii multiple λ_i îi pot corespunde, în general, p_i blocuri Jordan de ordine k_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, p_i$, cu $1 \leqslant k_{ij} \leqslant q_i$, astfel încît $\sum_{j=1}^{p_i} k_{ij} = q_i$ și $\sum_{i=1}^{r} q_i = n$.

După cum se vede din (5.19) blocurile Jordan sînt plasate pe diagonala principală a matricii J, restul elementelor fiind nule.

În esență, pentru determinarea formei canonice Jordan este necesar ca, pentru valoarea proprie λ_i pentru care se pot determina din (5.11) numai $p_i < q_i$ vectorii proprii, să se determine un număr de $q_i - p_i$ vectori proprii generalizați.

Se numeşte *vector propriu generalizat* al matricii A, corespunzător valorii proprii λ, de multiplicitate q, orice vector v^j, $j = 2, 3, \ldots, k$, *nenul*, care satisface ecuaţia

$$(A - \lambda I)\, v^{j+1} = v^j,\ j = 1, 2, \ldots, k-1,\ \ 2 \leqslant k \leqslant q, \qquad (5.20)$$

unde v^1 este un vector propriu conform definiţiei (5.11).

Ca şi în cazul vectorilor proprii, se poate arăta că există valori k pentru care vectorii $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sînt liniar independenţi între ei.

Dacă pentru valoarea proprie λ, de multiplicitate q, se pot determina vectorii proprii $v_1^1, v_2^1, \ldots, v_p^1$, cu $1 \leqslant p \leqslant q$, atunci, conform definiţiei (5.20), se pot determina pentru λ exact p grupuri de vectori proprii generalizaţi cu care se pot forma următoarele sisteme de vectori:

$$\{v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^{k_1}\},\ \{v_2^1, v_2^1, \ldots, v_2^{k_2}\}, \ldots, \{v_p^1, v_p^2, \ldots, v_p^{k_p}\},$$

unde $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = q$. Cu aceste sisteme de vectori se poate forma o matrice V° de dimensiuni $(n \times q)$. Procedînd asemănător pentru toate valorile proprii λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, se obţin matricile V^1, $V^2, \ldots, V^r$, respectiv de dimensiuni $(n \times q_1)$, $(n \times q_2)$, ..., $(n \times q_r)$, cu care se formează matricea modală

$$V = [V^1, V^2, \ldots, V^r]. \qquad (5.21)$$

Forma canonică Jordan a matricii A se determină tot cu relaţia (5.18), în care V are forma (5.21). Expresia generală a matricii J este

$$J = \mathrm{diag}\,(J_{11}, \ldots, J_{1p_1}, J_{21}, \ldots, J_{2p_2}, \ldots, J_{r1}, \ldots, J_{rp_r}), \qquad (5.22)$$

unde

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,\ \ j = 1, 2, \ldots, p_i, \qquad (5.23)$$

sînt *blocurile Jordan* de dimensiuni $(k_{ij} \times k_{ij})$, cu

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p_i} k_{ij} = \sum_{i=1}^{r} q_i = n.$$

Mai precizăm că blocurile $J_{11}, \ldots, J_{1p_1}$ corespund valorii proprii λ_1, blocurile $J_{21}, \ldots, J_{2p_2}$ corespund valorii proprii λ_2 ş.a.m.d.

Determinarea formei canonice diagonale sau Jordan a matricii A se poate face şi fără cunoaşterea matricii modale V. În acest scop se determină cei mai mari divizori comuni ai minorilor de ordinul $k = 1, 2, \ldots, n$ ai matricii caracteristice $Is - A$. Se obţine în acest fel şirul de polinoame

$$\Delta_1(s),\ \Delta_2(s),\ \ldots,\ \Delta_{n-1}(s),\ \Delta_n(s) = \Delta(s). \tag{5.24}$$

Şirul de polinoame (5.24) are evident proprietatea că un polinom oarecare este divizibil prin precedentul său.

Polinoamele

$$\delta_1(s) = \frac{\Delta_n(s)}{\Delta_{n-1}(s)},\quad \delta_2(s) = \frac{\Delta_{n-1}(s)}{\Delta_{n-2}(s)}, \ldots,\quad \delta_n(s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_0(s)}, \tag{5.25}$$

unde $\Delta_0(s) \equiv 1$, se numesc *factorii invarianţi* ai matricii A, iar divizorii de forma $(s - \lambda_i)^{k_{ij}}$, unde λ_i este o valoare proprie a matricii A şi k_{ij} este puterea maximă a factorului $(s - \lambda_i)$ în respectivul factor invariant, se numesc *divizorii elementari* ai matricii A. Un anumit factor $(s - \lambda_i)$ poate apărea în mai mulţi factori invarianţi din şirul (5.25), la aceeaşi putere sau la puteri diferite. Se scriu toţi divizorii elementari ai matricii A în ordinea în care apar în toţi factorii invarianţi (5.25), indiferent dacă ei sînt sau nu sînt diferiţi între ei. Unui divizor elementar de forma $(s - \lambda_i)^{k_{ij}}$ îi corespunde în forma canonică Jordan un bloc Jordan de forma (5.23). Dacă $k_{ij} = 1$ blocul (5.23) se reduce la scalarul λ_i.

5.2.2. Exemple de determinare a formei canonice diagonale (Jordan)

a) Să se determine forma canonică diagonală (Jordan) a matricii

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a acestei matrici este

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = (s + 2)(s - 3)(s - 6) = 0$$

şi valorile sale proprii sînt evident $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Vectorii proprii se determină după cum urmează.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}.$$

Efectuînd calculele în ecuaţia de mai sus se obţine sistemul de ecuaţii omogene.

$$\begin{cases} 3v_{11} + v_{12} + 3v_{13} = 0 \\ v_{11} + 7v_{12} + v_{13} = 0 \\ 3v_{11} + v_{12} + 3v_{13} = 0. \end{cases}$$

Se observă că a treia ecuaţie este identică cu prima. Ca urmare, în afară de soluţia banală $v_{11} = v_{12} = v_{13} = 0$, care nu se ia în considerare deoarece vectorii proprii sînt, prin definiţie *nenuli*, sistemul de mai sus admite o simplă infinitate de soluţii nenule, dependente între ele. Se alege dintre aceste soluţii vectorul propriu

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Procedînd analog pentru $\lambda_2 = 3$ şi $\lambda_3 = 6$ se determină şi următorii doi vectori proprii

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se formează matricea modală şi se determină inversa ei

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Forma canonică diagonală, după cum era de aşteptat, este

$$J = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Să se determine forma canonică diagonală (Jordan) a matricii

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică este

$$\Delta(s)=\det\,(Is-A)=(s-2)^3=0$$

și valorile proprii sînt evident $\lambda_{1,2,3}=2$.

Principial, sînt posibile următoarele forme canonice Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vectorii proprii se determină după cum urmează

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}.$$

Efectuînd calculele se obține următorul sistem de ecuații omogene

$$\begin{cases} v_{11}+v_{12}-v_{13}=0 \\ v_{11}+v_{12}-v_{13}=0. \end{cases}$$

Se observă că de fapt sistemul este format dintr-o singură ecuație cu trei necunoscute. În afară de soluția banală, acest sistem admite o dublă infinitate de soluții nenule. Se aleg dintre acestea vectorii proprii

$$v_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru determinarea celui de al treilea vector se face uz de definiția vectorului propriu generalizat — relația (5.20). Este ușor de observat că numai v_2 generează un vector propriu generalizat (utilizînd v_1 în (5.20) se obține un sistem incompatibil), conform ecuației

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$$

Din aceasta se obține

$$\begin{cases} v_{31} + v_{32} - v_{33} = 1 \\ v_{31} + v_{32} - v_{33} = 1. \end{cases}$$

Se alege ca vector propriu generalizat

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

care este independent de v_2.

Matricea modală și inversa ei sînt

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Forma canonică Jordan este

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Acest rezultat, previzibil deja după determinarea vectorilor v_1 și v_2, poate fi obținut și prin determinarea divizorilor elementari ai matricii A.

Matricea caracteristică are forma

$$\begin{bmatrix} s-3 & -1 & 1 \\ 0 & s-2 & 0 \\ -1 & -1 & s-1 \end{bmatrix},$$

iar cei mai mari divizori comuni ai minorilor acestei matrici sînt $\Delta_1(s) = 1$, $\Delta_2(s) = s-2$, $\Delta_3(s) = (s-2)^3$. Factorii invarianți au expresiile $\delta_1(s) = \Delta_3(s)/\Delta_2(s) = (s-2)^2$, $\delta_2(s) = \Delta_2(s)/\Delta_1(s) = s-2$, $\delta_3(s) = \Delta_1(s)/\Delta_0(s) = 1$. Este evident că divizorii elementari au forma: $(s-2)$, $(s-2)^2$. Ca urmare forma canonică Jordan conține două blocuri Jordan: unul de ordinul 1 și unul de ordinul 2.

5.2.3. Explicitarea matricii e^{At}

Forma canonică diagonală (Jordan) oferă posibilitatea determinării elementelor matricii fundamentale $X(t) = e^{At}$, $t \in \mathbf{R}_+$.

Vom arăta mai întîi că pe baza relației (5.18) putem scrie

$$e^{At} = V e^{Jt} V^{-1}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{5.26}$$

unde V este matricea modală a matricii A.

Într-adevăr, făcînd uz de definiția (2.28) și de transformarea (5.18), putem scrie

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (VJV^{-1})^k t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{VJV^{-1} \cdot VJV^{-1} \ldots VJV^{-1}}_{k} t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} VJ^kV^{-1}t^k = V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k t^k V^{-1} = V e^{Jt} V^{-1}.$$

În continuare, ținînd seama de (5.22), vom arăta că

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\,(e^{J_{11}t}, \ldots, e^{J_{1p_1}t}, \ldots, e^{J_{r1}t}, \ldots, e^{J_{rp_r}t}), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{5.27}$$

Într-adevăr, procedînd ca la demonstrația relației (5.26), putem scrie

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k t^k = \frac{1}{k!} [\operatorname{diag}\,(J_{11}, \ldots, J_{1p_1}, \ldots, J_{r1}, \ldots$$

$$\ldots, J_{rp_r})]^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{diag}\,(J_{11}^k, \ldots, J_{1p_1}^k, \ldots,$$

$$\ldots J_{r1}^k, \ldots, J_{rp_r}^k)\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{k!} J_{11}^k t^k, \ldots,\right.$$

$$\left. \ldots, \frac{1}{k!} J_{1p_1}^k t^k, \ldots, \frac{1}{k!} J_{r1}^k t^k, \ldots, \frac{1}{k!} J_{rp_r}^k t^k \right) =$$

$$= \operatorname{diag}\,(e^{J_{11}t}, \ldots, e^{J_{1p_1}t} \ldots, e^{J_{r1}t}, \ldots, e^{J_{rp_r}t},).$$

În sfîrşit, vom mai demonstra că

$$
e^{J_* t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots\dots\dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots\dots\dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots\dots & \frac{1}{(k-3)!}t^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}^+, \tag{5.28}
$$

unde J_* este un bloc Jordan oarecare, de dimensiuni $(k \times k)$, corespunzător valorii proprii λ.

Pentru demonstraţie pornim de la obsrvaţia că pentru orice bloc Jordan putem scrie

$$
J_* = I\lambda + M, \tag{5.29}
$$

unde I este matricea unitate de dimensiuni $(k \times k)$ şi M este o matrice de aceleaşi dimensiuni, avînd toate elementele nule, cu excepţia celor situate pe codiagonala principală (adică pe o paralelă la diagonala principală, imediat la dreapta), care sînt egale cu 1. Se poate arăta uşor că

$$
M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad M^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.30}
$$

$$
M^m = 0, \quad m \geq k. \tag{5.31}
$$

În aceste condiţii, utilizînd formula binomului lui Newton, putem scrie

$$
e^{J_* t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} J_*^m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (I\lambda + M)^m t^m =
$$

$$
= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (I\lambda^m + C_m^1 \lambda^{m-1} M + \dots + C_m^{m-1} \lambda M^{m-1} +
$$

$$+ M^m) t^m = I \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\lambda^m t^m + Mt \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\lambda^{m-1}t^{m-1} + \dots$$

$$\dots + M^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{m=k-1}^{\infty}\frac{1}{(m-k+1)!}\lambda^{m-k+1}t^{m-k+1} =$$

$$= \left(I + Mt + \dots + M^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)e^{\lambda t}.$$

Acest rezultat este identic cu membrul drept din (5.28). Pe parcursul calculelor s-a ţinut seama de faptul că $(m!)^{-1} C_m^n = (m!)^{-1} m(m-1) \dots (m-n+1)(n!)^{-1} = [(m-n)!\, n!]^{-1}$.

5.2.4. Sisteme dinamice continue în timp

Este evident că *teoremele 1* şi *2* de la §5.1 rămîn valabile şi în cazul sistemelor dinamice liniare continue şi invariante în timp. Din rezultatele (5.3) sau (5.4) şi (5.26) — (5.28) se trage concluzia că stabilitatea internă depinde numai de distribuţia valorilor proprii ale matricii A în planul complex. Ca atare proprietăţile de stabilitate asimptotică, de stabilitate sau de instabilitate ale sistemelor dinamice liniare invariante şi continue în timp, de forma

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{5.32}$$

au caracter global. În acest context se pot enunţa următoarele două teoreme, pentru care se va da o demonstraţie comună.

Teorema 5. Sistemul dinamic (5.32) este stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au partea reală nepozitivă, iar cele cu partea reală nulă corespund unor blocuri Jordan de ordinul 1.

Teorema 6. Sistemul dinamic (5.32) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au partea reală negativă.

D. În virtutea relaţiei (5.26), condiţiile necesare şi suficiente (5.3) şi (5.4) sînt echivalente respectiv cu

$$\|e^{Jt}\| \leqslant M_1, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (M_1 > 0), \tag{5.33}$$

şi

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{Jt}\| = 0, \tag{5.34}$$

deoarece V şi V^{-1} sînt matrici constante.

Ținînd seama de explicitarea (5.27) rezultă că (5.33) și (5.34) sînt echivalente respectiv cu

$$||e^{J_{ij}t}|| \leqslant M_{ij}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (M_{ij} > 0), \tag{5.35}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, p_i,$$

și

$$\lim_{t \to \infty} ||e^{J_{ij}t}|| = 0, \tag{5.36}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, p_i.$$

În sfîrșit, avînd în vedere (5.28), *teoremele 5 și 6* sînt evidente. Într-adevăr, condițiile (5.35) au loc dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au partea reală nepozitivă, iar cele cu partea reală nulă corespund unor blocuri Jordan de ordinul 1 (în (5.28) $k = 1$ pentru $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$; în caz contrar, adică pentru $k > 1$, există elemente ale matricii (5.28) care sînt nemărginite și deci (5.35) nu poate avea loc). De asemenea, condițiile (5.36) au loc dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au partea reală negativă. ■

5.2.5. Sisteme dinamice discrete în timp

Este evident că *teoremele 3 și 4* rămîn valabile și în cazul sistemelor dinamice liniare discrete și invariante în timp, de forma

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{5.37}$$

pentru care matricea fundamentală este

$$X(k) = A^k, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.38}$$

În acest caz formele echivalente ale condițiilor (5.7) și (5.8) sînt respectiv

$$||A^m|| \leqslant M, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{5.39}$$

și

$$\lim_{m \to \infty} ||A^m|| = 0. \tag{5.40}$$

Și aici se poate face uz de forma canonică diagonală (Jordan), respectiv de (5.18). Ca și în cazul precedent, se trage concluzia că proprietățile de stabilitate ale sistemului (5.37) depind numai de distribuția valorilor proprii ale matricii A în planul complex și că stabilitatea asimptotică, stabilitatea sau instabilitatea sistemelor dinamice liniare discrete și invariante în timp au caracter global.

Vom enunța în continuare două teoreme pentru care vom da o demonstrație comună.

Teorema 7. Sistemul dinamic (5.37) este stabil dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au modulul mai mic sau egal cu unitatea, iar cele de modul unitar corespund unor blocuri Jordan de ordinul 1.

Teorema 8. Sistemul dinamic (5.37) este asimptotic stabil dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au modulul mai mic decît unitatea.

D. În virtutea relației (5.18), condițiile necesare și suficiente (5.39) și (5.40) sînt echivalente respectiv cu

$$||J^m|| \leqslant M_1, \quad m \in \mathrm{N}, \ (M_1 > 0), \tag{5.41}$$

și

$$\lim_{m \to \infty} ||J^m|| = 0, \tag{5.42}$$

deoarece V și V^{-1} sînt matrici constante.

Ținînd seama de (5.22), rezultă că (5.41) și (5.42) sînt echivalente respectiv cu

$$||J_{ij}^m|| \leqslant M_{ij}, \quad m \in \mathrm{N}, \ (M_{ij} > 0), \tag{5.43}$$
$$i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, p_i,$$

și

$$\lim_{m \to \infty} ||J_{ij}^m|| = 0, \tag{5.44}$$
$$i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, p_i.$$

Avînd în vedere (5.23) și (5.29)—(5.31), *teoremele 7 și 8* sînt evidente. Într-adevăr, condițiile (5.43) au loc dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au modulul mai mic sau egal cu unitatea, iar cele de modul unitar corespund unor blocuri Jordan de ordinul 1 ($k = 1$ în (5.23) pentru $||\lambda|| = 1$; în caz contrar, adică pentru $k > 1$, matricea J_*^m, cu $||\lambda|| = 1$ și explicitarea (5.29), este nemărginită pentru $m \in \mathrm{N}$, deoarece

$$J_*^m = (I\lambda + M)^m = I\lambda^m + C_m^1\lambda^{m-1}M + C_m^2\lambda^{m-2}M^2 + \ldots +$$
$$+ C_m^{m-1}\lambda M^{m-1} + M^m = I\lambda^m + C_m^1\lambda^{m-1}M + C_m^2\lambda^{m-2}M^2 + \ldots +$$
$$+ \ldots + C_m^{k-1}\lambda^{m-k+1}M^{k-1}, \quad m \geqslant k - 1,$$

ceea ce înseamnă că (5.43) nu poate avea loc). De asemenea, condițiile (5.44) au loc dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricii A au modulul subunitar. ■

5.2.6. Exemple

a) **Cascadă formată din două recipiente.** Examinînd ecuația intrare-stare (1.27) a acestui sistem se constată că

$$A = \begin{bmatrix} -a\alpha & a\alpha \\ b\alpha & -(b+c)\alpha, \end{bmatrix}, \quad a, b, c, \alpha > 0.$$

Întrucît problema stabilității sistemelor dinamice liniare continue și invariante în timp este, în principiu, o problemă de determinare a localizării valorilor proprii ale matricii A în planul complex, rezultă că practic trebuie să se examineze mai întîi localizarea rădăcinilor polinomului caracteristic $\Delta(s)$. În cazul de față

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = \begin{bmatrix} s + a\alpha & -a\alpha \\ -b\alpha & s + (b+c)\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + \alpha(a + b + c)s + ac\alpha^2.$$

Deoarece $\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha(a + b + c) < 0$ și $\lambda_1\lambda_2 = ac\alpha^2 > 0$, rezultă că $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$, ceea ce înseamnă, conform *teoremei 6*, că sistemul considerat este asimptotic stabil.

b) **Pod rulant.** Din ecuația intrare-stare (1.66) se constată că

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{m_a}{m_c} g > 0, \quad \beta = \left(1 + \frac{m_a}{m_c}\right)\frac{g}{l} > 0,$$

și că

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = s^2(s^2 + \beta).$$

Este evident că sistemul considerat nu este asimptotic stabil, deoarece $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2,3,4} = 0$. Pentru a vedea dacă acest sistem este simplu stabil sau instabil este necesar să se determine forma canonică diagonală (Jordan) a matricii A, cunoașterea numai a localizării valorilor proprii nemaifiind suficientă.

Utilizînd metoda factorilor invarianţi expusă la 5.2.1. b se găsesc divizorii elementari s^2, $(s - j\sqrt{\beta})$, $(s + j\sqrt{\beta})$. Forma canonică Jordan a matricii A este

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\sqrt{\beta} \end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că valorii proprii duble $\lambda = 0$ îi corespunde un bloc Jordan de ordinul 2. *Teorema 5* nu este satisfăcută în acest caz şi în consecinţă sistemul considerat este instabil.

c) **Proces de reînnoire a stocului pieselor de schimb.** Din ecuaţia intrare-stare (1.110) rezultă că

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

După calcule relativ simple se obţine

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = s^n,$$

ceea ce înseamnă că $\lambda = 0$ este valoarea proprie de multiplicitate n a matricii A. Conform *teoremei 8* sistemul considerat este asimptotic stabil.

6. Stabilitatea externă

6.1. Definiţia stabilităţii externe

Un sistem dinamic este suportul unui transfer cauzal *intrare-ieşire*. În atare situaţie, pentru definirea stabilităţii unui sistem trebuie să se ţină seama de evoluţiile posibile ale intrării şi ieşirii sistemului. Această idee conduce în mod natural la conceptul de *stabilitate externă* (intrare-ieşire).

Există mai multe posibilităţi de a defini stabilitatea externă. Dintre acestea, în mod preponderent, este folosită noţiunea de *stabilitate intrare mărginită-ieşire mărginită* (IMEM).

Definiţia 1. Sistemul dinamic (1.9), (1.10) se numeşte *stabil IMEM* dacă pentru orice moment iniţial $t_0 \in \mathbf{R}_+$ şi pentru starea iniţială $x(t_0)=0$ există o constantă $K>0$, dependentă de t_0, astfel încît pentru orice intrare care satisface condiţia de mărginire

$$||u(t)|| \leqslant 1, \quad t \geqslant t_0, \tag{6.1}$$

ieşirea sistemului satisface condiţia de mărginire

$$||y(t)|| \leqslant K, \quad t \geqslant t_0. \tag{6.2}$$

În caz contrar sistemul dinamic (1.9), (1.10) se numeşte *instabil IMEM*.

Pentru a putea fi luate în considerare mărimi de intrare mărginite de forma $||u(t)|| \leqslant L$, $t \geqslant t_0$, unde $0 < L < +\infty$, se face schimbarea de variabilă de intrare $u(t) = \tilde{u}(t)L$; se obţine $||\tilde{u}(t)|| \leqslant 1$, $t \geqslant t_0$, adică o condiţie de forma (6.1).

6.2. Stabilitatea externă a sistemelor dinamice liniare

6.2.1. Sisteme variante în timp

S-a văzut la 3.1.1. că pentru sistemele dinamice liniare continue şi variante în timp, tranziţia intrare-ieşire se explicitează, pentru stare iniţială nulă, prin produsul de convoluţie generalizat

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0, \tag{6.3}$$

unde $g(t, \theta)$, $t \geqslant \theta \geqslant t_0$, este matricea de răspuns la impuls a sistemului.

Teorema 1. Sistemul dinamic (6.3) este stabil IMEM dacă şi numai dacă există o constantă $M>0$ astfel încît

$$\int_{t_0}^{t} ||g(t, \tau)||\, \mathrm{d}\tau \leqslant M, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0. \tag{6.4}$$

D. *Suficiența.* Prin ipoteză are loc (6.4). Întrucît $u(t)$ satisface (6.1), pe baza ecuației (6.3) putem face evaluările

$$\|y(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|g(t, \tau)\, u(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} \|g(t, \tau)\| \; \|u(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|g(t, \tau)\| \, \mathrm{d}\tau \leqslant M, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0,$$

ceea ce înseamnă că $y(t)$ satisface condiția (6.2) cu $K = M$.

Necesitatea. Se presupune prin absurd că (6.3) nu este adevărată. În consecință, pentru orice $K > 0$ există un $t_k > t_0$, dependent de K, astfel încît

$$\int_{t_0}^{t_k} \|g(t, \tau)\| \, \mathrm{d}\tau \geqslant K. \tag{6.5}$$

Dacă se aplică norma în (6.3) pentru $t = t_k$, ținînd seama de (6.5) şi făcînd uz de norma

$$\|y\| = \max_{\|v\|=1} v^T y,$$

se obține

$$\|y(t_k)\| = \max_{\|v(t_k)\|=1} v^T(t_k)\, y(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \max_{\|v(t_k)\|=1} v^T(t_k)\, g(t_k, \tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{6.6}$$

Întrucît $u(t)$ satisface condiția (6.1), il vom alege astfel încît integrandul din (6.6), care este un scalar, să atingă pentru fiecare τ, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_k$, şi $\|u(\tau)\| = 1$, valoarea sa maximă. În aceste condiții integrandul din (6.6) este o normă matriceală, astfel că putem scrie

$$\max_{\|v(t_k)\|=1} \max_{\|u(\tau)\|=1} v^T(t_k)\, g(t_k, \tau)\, u(\tau) = \|g(t_k, \tau)\|.$$

Avînd în vedere acest rezultat şi (6.5), din (6.6) obținem

$$\|y(t_k)\| = \int_{t_0}^{t_k} \|g(t_k, \tau)\| \, \mathrm{d}\tau \geqslant K,$$

ceea ce înseamnă că sistemul considerat este instabil IMEM. Acest rezultat este în contradicție cu ipoteza, fapt care demonstrează necesitatea. ■

Este evident că *definiția 1* și *teorema 1* sînt valabile, *mutatis mutandis*, și în cazul sistemelor dinamice liniare discrete și variante în timp a căror tranziție intrare-ieșire se explicitează, pentru stare inițială nulă, prin produsul de convoluție discret generalizat

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} g(k, i+1)\, u(i) + D(k)\, u(k), \quad k \geqslant k_0, \tag{6.7}$$

unde $g(k, i+1)$, $k \geqslant i+1$, este matricea de răspuns la impuls a sistemului (v. 3.1.2).

Un enunț adecvat al *teoremei 1* pentru sistemul (6.7) este următorul.

Teorema 2. Sistemul dinamic (6.7), cu $D(k)$ mărginită în normă pentru $k \in \mathbf{N}$, este stabil IMEM dacă și numai dacă există o constantă $M > 0$ astfel încît

$$\sum_{i=k_0}^{k-1} \|g(k, i+1)\| \leqslant M, \quad k > k_0 \geqslant 0. \tag{6.8}$$

6.2.2. Sisteme invariante în timp

În cazul sistemelor dinamice liniare invariante în timp ecuațiile (6.3) și (6.7) au respectiv următoarele forme

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau, 0)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.9}$$

pentru sistemele continue în timp (v. 3.1.3), și

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k-1} g(k-i-1,\ 0)\, u(i) + Du(k), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{6.10}$$

pentru sistemele discrete în timp (v. 3.1.4).

Enunțurile adaptate ale *teoremelor 1 și 2* sînt următoarele.

Teorema 3. Sistemul dinamic (6.9) este stabil IMEM dacă și numai dacă

$$\int_0^\infty \|g(t, 0)\|\, \mathrm{d}t < +\infty. \tag{6.11}$$

Teorema 4. Sistemul dinamic (6.10) este stabil IMEM dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g(k,\ 0)\| < +\infty. \tag{6.12}$$

Avînd în vedere expresiile analitice ale matricilor de răspuns la impuls $g(t,\ 0)$, $t \in \mathbf{R}_+$ (relaţia (3.12)) şi $g(k,0)$, $k \in \mathbf{N}$ (relaţia (3.17)), este de aşteptat ca între conceptele de stabilitate internă şi de stabilitate externă să existe anumite relaţii. Sub aspectele lor cele mai importante, aceste relaţii vor fi examinate în detaliu la §6.4 pentru cazul sistemelor dinamice liniare invariante în timp. În cele ce urmează ne vom ocupa de dependenţa relaţiei intrare-ieşire de matricile A, B şi C.

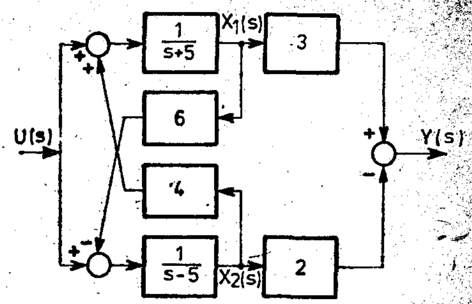


Fig. I.19. Sistem stabil IMEM şi instabil intern.

6.3. Controlabilitatea şi observabilitatea stării

În conformitate cu (3.12) condiţia (6.11) este echivalentă cu

$$\int_0^{\infty} \|C\, e^{At}\, B\|\, dt < +\infty, \tag{6.13}$$

ceea ce înseamnă că proprietăţile de stabilitate internă ale unui sistem dinamic liniar continuu şi invariant în timp le determină pe cele de stabilitate externă. De exemplu dacă respectivul sistem este asimptotic stabil atunci el este şi stabil IMEM. Această afirmaţie se bazează pe faptul că dacă A are toate valorile proprii cu partea reală negativă atunci integrandul din (6.13), oricare ar fi norma matriceală utilizată, este o combinaţie liniară de exponenţiale care tind toate la zero atunci cînd $t \to +\infty$. În aceste circumstanţe condiţia (6.13) este evident satisfăcută.

După cum vom arăta imediat cu ajutorul unui exemplu, stabilitatea IMEM nu implică stabilitatea asimptotică, deoarece în această implicaţie intervin într-un mod specific şi matricile B, C.

6.3.1. Exemplu de sistem stabil IMEM şi instabil intern

Pentru susţinerea afirmaţiei de mai sus se consideră sistemul a cărui schemă bloc structurală este reprezentată în fig. I.19. Relaţia intrare-ieşire, în transformate Laplace şi cu notaţiile din fig. I.19, se exprimă prin următoarele ecuaţii:

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+5}[U(s) + 4X_2(s)] & (6.14) \\[2ex] X_2(s) = \dfrac{1}{s-5}[U(s) - 6X_1(s)], & (6.15) \end{cases}$$

$$Y(s) = 3X_1(s) - 2X_2(s). \tag{6.16}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (6.14), (6.15) în raport cu $X_1(s)$ şi $X_2(s)$ se obţine

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) & (6.17) \\[2ex] X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s). & (6.18) \end{cases}$$

Înlocuind acum (6.17) şi (6.18) în (6.16) rezultă următoarea ecuaţie intrare-ieşire

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s). \tag{6.19}$$

Aşadar funcţia de transfer a sistemului este

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \tag{6.20}$$

căreia îi corespunde răspunsul la impuls

$$g(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < 0, \\ e^{-t} \ , & t \geq 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Acesta satisface evident condiţia (6.11), ceea ce înseamnă că sistemul considerat este stabil IMEM.

În pofida acestui fapt, sistemul din fig. I.19 nu este asimptotic stabil. Dovedirea acestei afirmaţii necesită cunoaşterea reprezentării intrare-stare-ieşire a sistemului.

Alegînd ca variabile de stare mărimile $X_1(s)$ şi $X_2(s)$, ecuaţiile intrare-stare-ieşire se obţin din (6.14)—(6.16). Eliminînd numitorii în (6.14) şi (6.15) şi trecînd la domeniul timpului, cu condiţiile iniţiale $x_1(-0) = x_2(-0) = 0$, din (6.14)—(6.16), după calcule elementare, rezultă

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{6.22}$$

$$y = [3 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului este

$$\Delta(s) = \det\,(Is - A) = s^2 - 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Conform celor arătate la 5.2.4, este evident că sistemul din fig. I.19 este instabil intern. Aşadar stabilitatea IMEM nu implică stabilitatea asimptotică.

Această „defecţiune" este de natură parametric-structurală şi ea poate fi explicată în modul cel mai limpede făcînd următoarea schimbare de variabile de stare

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{6.24}$$

unde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sînt matricea modală a matricii A şi respectiv inversa sa.

Înlocuind (6.24) în (6.22), (6.23), sistemul considerat se aduce la forma sa canonică diagonală (se foloseşte această denumire deoarece matricea $\tilde{A} = V^{-1} A V = J$ este diagonală).

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{6.25}$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}. \tag{6.26}$$

Se constată că în forma sa canonică diagonală sistemul este constituit din două subsisteme, caracterizate prin variabilele de stare $\tilde{x}_1$ şi respctiv $\tilde{x}_2$, care sînt total decuplate între ele (în sensul că $\tilde{x}_1$ nu depinde de $\tilde{x}_2$ şi $\tilde{x}_2$ nu depinde de $\tilde{x}_1$). În plus subsistemul caracterizat prin $\tilde{x}_2$ (şi prin valoarea proprie $\lambda_2 = 1$) este decuplat atît în raport cu intrarea cît și cu ieșirea. Acest fapt explică complet „defecțiunea" semnalată mai sus. Ea este de natură parametric-structurală, fiind generată, pe de o parte, de perechea de matrici A, B, respectiv de *controlabilitatea stării* și, pe de altă parte, de perechea de matrici A, C, respectiv de *observabilitatea stării* sistemului.

6.3.2. Controlabilitatea stării

Definiția 2. Un sistem dinamic se numește de *stare complet controlabilă* dacă există o comandă $u(t)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbf{R}_+$, continuă pe porțiuni, care transferă sistemul din orice stare inițială $x(t_0)$, oricare ar fi $t_0 \in R_+$, în orice stare finală $x(t_1)$, oricare ar fi $t_1 \in \mathbf{R}_+$, finit, cu $t_1 > t_0$.

În caz contrar sistemul dinamic se numește, după caz, de stare *parțial controlabilă* sau de *stare necontrolabilă*.

Pentru a putea caracteriza un sistem dinamic liniar continuu și invariant în timp în conformitate cu *definiția 2*, vom demonstra mai întîi două rezultate pregătitoare.

Fie A o matrice $(n \times n)$ și fie

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \tag{6.27}$$

polinomul ei caracteristic.

Lema 1 (teorema Cayley-Hamilton). Orice matrice A verifică ecuația matriceală

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0. \tag{6.28}$$

D. Se știe că

$$(Is - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \operatorname{adj}(Is - A), \tag{6.29}$$

unde

$$\operatorname{adj}(Is - A) = B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \ldots + B_{n-1} s + B_n, \tag{6.30}$$

este matricea adjunctă a matricii caracteristice și $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sînt matrice constante de dimensiuni $(n \times n)$.

Din (6.29) în care se înlocuiesc (6.27) și (6.30), după calcule elementare, se obține

$$\begin{aligned}(B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \ldots + B_{n-1} s + B_n)(Is - A) = \\ = (s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) I.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Efectuînd calculele în (6.31) și identificînd coeficienții matriceali după puterile lui s se obține șirul de egalități

$$\begin{aligned} B_1 \qquad\qquad &= I \\ -B_1A \quad + B_2 &= \alpha_1 I \\ -B_2A \quad + B_3 &= \alpha_2 I \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ -B_{n-1}A + B_n &= \alpha_{n-1} I \\ -B_nA \qquad\quad &= \alpha_n I. \end{aligned} \tag{6.32}$$

În sfîrșit, înmulțind egalitățile (6.32) la dreapta, respectiv cu matricile A^n, $A^{n-1}, \ldots, A, I$ și adunînd rezultatele membru cu membru se obține (6.28). ■

Lema 2. Pentru orice matrice A are loc explicitarea

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t)\, A^k, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.33}$$

unde $f_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sînt funcții de timp determinabile.

D. Din (6.28) rezultă

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}^0 A^k,$$

unde $\alpha_{n-k}^0 = -\alpha_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Apoi

$$A^{n+1} = AA^n = A \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}^0 A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}^1 A^k,$$

unde $\alpha_n^1 = \alpha_1^0 \alpha_n$ și $\alpha_{n-k}^1 = \alpha_1^0 \alpha_{n-k}^0 + \alpha_{n-k+1}^0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Continuînd în acest mod se obține

$$A^{n+i} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}^i A^k, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.34}$$

unde α_{n-k}^i, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, sînt coeficienți determinabili.

Pe de altă parte

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Schimbînd indicele de sumare în ultima sumă de mai sus prin $k = n + i$ și ținînd seama de (6.34) putem scrie

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} t^{n+i} A^{n+i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} t^{n+i} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}^{i} A^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} t^k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} \alpha_{n-k}^{i} t^{n+i} \right) A^k.$$

Cu notația

$$f_k(t) = \frac{1}{k!} t^k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} \alpha_{n-k}^{i} t^{n+i} \tag{6.35}$$

se obține rezultatul (6.33). ■

Cu aceste două rezultate putem aborda problema controlabilității stării unui sistem dinamic liniar continuu și invariant în timp, descris de următoarele ecuații intrare-stare-ieșire

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.36}$$

$$y = Cx + Du, \tag{6.37}$$

unde $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ și A, B, C și D sînt matrici constante de dimensiuni adecvate.

Fie matricea

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B], \tag{6.38}$$

formată din submatricile A^kB, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, și numită *matricea de controlabilitate* a sistemului (6.36), (6.37).

Teorema 5 (Kalman). Sistemul dinamic (6.36), (6.37) este de stare complet controlabilă dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang} \mathcal{C} = n. \tag{6.39}$$

D. Se ştie că (6.36) admite soluţia

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant t_0, \tag{6.40}$$

pentru orice $u(t)$, $t \geqslant t_0$, continuă pe porţiuni (v. 2.1.3).

Fără a reduce din generalitate vom considera $t_0 = 0$ şi $x(t_1) = 0$. În aceste condiţii soluţia (6.40) devine

$$0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\,Bu(\tau)\,d\tau, \quad t_1 > 0.$$

Înmulţind cu e^{-At_1} la stînga şi înlocuind $e^{-A\tau}$ cu (6.33), din relaţia de mai sus se obţine

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^kB\int_0^{t_1} f_k(-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = -x(0).$$

Examinînd această ecuaţie se observă că ea poate fi exprimată şi sub următoarea formă

$$[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]\begin{bmatrix} v^0(t_1) \\ v^1(t_1) \\ v^2(t_1) \\ \vdots \\ v^{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = -x(0), \tag{6.41}$$

unde

$$v^k(t_1) = \int_0^{t_1} f_k(-\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

sînt n vectori m-dimensionali, dependenţi de $u(\tau)$, $\tau \in [0, t_1]$.

În conformitate cu *definiţia 2* este evident acum că proprietatea de controlabilitate completă a stării sistemului (6.36), (6.37) este echivalentă cu faptul că ecuaţia (6.41) admite o soluţie $v^0(t_1), v^1(t_1), \ldots, v^{n-1}(t_1)$ pentru orice $x(0) \in \mathbf{R}^n$. Ecuaţia (6.41), care în fond este un sistem de n ecuaţii cu mn necunoscute, admite o soluţie petru orice $x(0) \in \mathbf{R}^n$ dacă şi numai dacă condiţia (6.39) este satisfăcută. ■

6.3.3. Observabilitatea stării

Definiția 3. Un sistem dinamic se numește de *stare complet observabilă* dacă vectorul de stare poate fi determinat complet peste orice interval de timp finit $[t_0, t_1] \subset \mathbf{R}_+$, și $t_1 > t_0$, pe baza cunoașterii complete a intrării $u(t)$ și a ieșirii $y(t)$ peste același interval finit.

În caz contrar sistemul se numește, după caz, de *stare parțial observabilă* sau de stare *neobservabilă.*

Fie matricea

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6.42}$$

formată din submatricile CA^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, și numită *matricea de observabilitate* a sistemului (6.36), (6.37).

Teorema 6 (Kalman). Sistemul dinamic (6.36), (6.37) este de stare complet observabilă dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang} \mathcal{O} = n. \tag{6.43}$$

D. Înlocuind (6.40) — soluția ecuației (6.36), în (6.37) se obține

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + $$
$$+ Du(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{6.44}$$

care este expresia transferului intrare-ieșire al sistemului (6.36), (6.37) pentru o stare inițială oarecare.

Fără a reduce din generalitate vom considera $t_0 = 0$ și $u(\tau) = 0$, $\tau \in [0, t_1]$. În aceste condiții (6.44) devine

$$Ce^{At}\, x(0) = y(t), \quad t \in [0, t_1]. \tag{6.45}$$

Înlocuind (6.33) în (6.45) se observă că rezultatul (6.45) poate fi pus sub forma

$$[f_0(t) f_1(t) \dots f_{n-1}(t)] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = y(t), \quad t \in [0, t_1], \tag{6.46}$$

În sfîrşit, se derivează (6.46) în raport cu t, succesiv de $n-1$ ori, calculîndu-se de fiecare dată rezultatul pentru $t=0$ ţinînd seama şi de (6.35). Se obţine astfel rezultatul echivalent

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}. \tag{6.47}$$

Conform *definiţiei 2* este evident că proprietatea de observabilitate completă a stării sistemului (6.36), (6.37) este echivalentă cu faptul că ecuaţia (6.47) admite o soluţie $x(0)$ oricare ar fi membrul drept, vector np-dimensional. Ecuaţia (6.47), care în fond este un sistem de np ecuaţii cu n necunoscute, admite o soluţie $x(0)$ oricare ar fi membrul drept, dacă şi numai dacă condiţia (6.43) este satisfăcută. ■

6.3.4. Proprietăţi de invarianţă

Ca şi polinomul caracteristic al unui sistem dinamic liniar continuu şi invariant în timp, proprietăţile de controlabilitate şi de observabilitate a stării au caracter intrinsec, respectiv sînt invariante în raport cu transformările liniare nesingulare ale vectorului de stare.

Pentru a verifica afirmaţia de mai sus, fie transformarea

$$\tilde{x} = Px, \tag{6.48}$$

unde P este o matrice constantă $(n \times n)$, cu $\det P \neq 0$.

Înlocuind (6.48) în (6.36), (6.37) se obţin ecuaţiile

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.49}$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u, \tag{6.50}$$

în care

$$\widetilde{A} = PAP^{-1}, \quad \widetilde{B} = PB, \quad \widetilde{C} = CP^{-1}, \quad \widetilde{D} = D. \tag{6.51}$$

În condițiile (6.51) sistemele (6.36), (6.37) și (6.49), (6.50) se numesc *echivalente*.

Vom arăta în cele ce urmează că

$$\operatorname{rang} \widetilde{\mathcal{C}} = \operatorname{rang} \mathcal{C}. \tag{6.52}$$

Într-adevăr, ținînd seama de (6.38) și de (6.51) putem scrie

$$\operatorname{rang} \widetilde{\mathcal{C}} = \operatorname{rang} [\widetilde{B}, \widetilde{A}\widetilde{B}, \ldots, \widetilde{A}^{n-1} \widetilde{B})] = \operatorname{rang}[PB, PAP^{-1} PB, \ldots,$$

$$\ldots, PAP^{-1} PAP^{-1} \ldots PAP^{-1} PB] = \operatorname{rang} [PB, PAB, \ldots, PA^{n-1} B] =$$

$$= \operatorname{rang} P[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = \operatorname{rang} \mathcal{C}.$$

În întregime analog se poate arăta că

$$\operatorname{rang} \widetilde{\mathcal{O}} = \operatorname{rang} \mathcal{O}. \tag{6.53}$$

Un alt rezultat interesant în sine și util pentru raționamentele care vor urma este acela că matricea de transfer a unui sistem dinamic de forma (6.36), (6.37) este invariantă în raport cu transformările nesingulare ale stării de forma (6.48). Așadar vom arăta că

$$\widetilde{G}(s) = G(s). \tag{6.54}$$

Într-adevăr, ținînd seama de (3.15) și (6.51) putem scrie succesiv

$$\widetilde{G}(s) = \widetilde{C}(Is - \widetilde{A})^{-1} \widetilde{B} + \widetilde{D} = CP^{-1}(Is - PAP^{-1})^{-1} PB +$$

$$+ D = CP^{-1} [P(Is - A)P^{-1}]^{-1} PB + D =$$

$$= CP^{-1}P (Is - A)^{-1} P^{-1} PB + D =$$

$$= C(Is - A)^{-1} B + D = G(s).$$

6.3.5. Forma canonică Kalman

Faptul că proprietățile de controlabilitate a stării și de observabilitate a stării nu depind de baza de vectori în $\mathbf{R}^n$ în care a fost exprimată reprezentarea intrare-stare-ieșire a unui sistem dinamic liniar continuu și invariant în timp ne permite să cercetăm implicațiile acestor proprietăți asupra transferului intrare-ieşire al respectivului sistem făcînd uz de o transformare adecvată a vectorului de stare. În acest sens s-a şi procedat în cazul exemplului de la 6.3.1.

Din punctul de vedere al celor două proprietăţi studiate, un sistem dinamic oarecare $\mathcal{S}$ se poate descompune în patru subsisteme, şi anume: $\mathcal{S}_{cc}^{no}$ — de stare complet controlabilă şi neobservabilă, $\mathcal{S}_{cc}^{co}$ — de stare complet controlabilă şi complet observabilă, care cuprinde şi conexiunea directă Du, $\mathcal{S}_{nc}^{no}$ — de stare necontrolabilă şi neobservabilă şi $\mathcal{S}_{nc}^{co}$ — de stare necontrolabilă şi complet observabilă.

În scopul determinării acestor patru subsisteme se foloseşte transformarea (6.48), cu $P = V^{-1}$, unde V este matricea modală a matricii A, prin care sistemul dinamic (6.36), (6.37) se aduce la forma

$$\dot{\tilde{x}} = J\tilde{x} + V^{-1}Bu, \tag{6.55}$$

$$y = CV\tilde{x} + Du, \tag{6.56}$$

numită *forma canonică diagonală (Jordan)* a sistemului (6.36), (6.37). J este forma canonică diagonală (Jordan) a matricii A (v. 5.2.1).

Ecuaţiile (6.55), (6.56) au avantajul remarcabil că, în cadrul lor, componentele vectorului canonic de stare $\tilde{x}$ se prezintă la gradul maxim de decuplare reciprocă. Pentru punerea în evidenţă a celor patru subsisteme se reordonează adecvat componentele vectorului $\tilde{x}$ şi se grupează în patru subvectori x_{cc}^{no}, x_{cc}^{co}, x_{nc}^{no}, x_{nc}^{co} corespunzători următoarei explicitări a reprezentării intrare-stare-ieşire.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cc}^{no} \\ \dot{x}_{cc}^{co} \\ \dot{x}_{nc}^{no} \\ \dot{x}_{nc}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cc}^{no} \\ x_{cc}^{co} \\ x_{nc}^{no} \\ x_{nc}^{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{6.57}$$

$$y = [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4] \begin{bmatrix} x_{cc}^{no} \\ x_{cc}^{co} \\ x_{nc}^{no} \\ x_{nc}^{co} \end{bmatrix} + Du, \tag{6.58}$$

unde A_{11}, A_{12} etc., B_1, B_2 şi C_2, C_4 sînt submatrici de dimensiuni adecvate. Ecuaţiile (6.57), (6.58) reprezintă *forma canonică Kalman* a sistemului (6.36), (6.37).

Transferul intrare-ieşire este realizat numai de subsistemul de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă. Acest lucru poate fi demonstrat şi cu ajutorul formei canonice Kalman. Vom calcula în acest scop matricea de transfer a sistemului (6.36), (6.37), care, în baza invarianței matricii de transfer în raport cu transformările liniare ale vectorului de stare, coincide cu matricea de transfer a formei sale canonice Kalman (6.57), (6.58); avem

$$G(s) =$$

$$= [0\ \ C_2\ \ 0\ \ C_4]\begin{bmatrix} I_1s - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & I_2s - A_{22} & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & I_3s - A_{33} & -A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & I_4s - A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D,$$

unde I_1, I_2, I_3 și I_4 sînt matricile unitate de ordine adecvate.

Inversa matricii caracteristice se calculează pe submatrici și este tot o matrice superior triunghiulară de submatrici. Ca urmare putem scrie

$$G(s) =$$

$$[0\, C_2\, 0\, C_4]\begin{bmatrix} (I_1s - A_{11})^{-1} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ 0 & (I_2s - A_{22})^{-1} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & 0 & (I_3s - A_{33})^{-1} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & (I_4s - A_{44})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

unde X_{12}, X_{13} etc. sînt submatrici de dimensiuni adecvate ale căror expresii nu este necesar să fie calculate, după cum se va vedea mai jos. Efectuînd calculele în ultima relație obținem

$$G(s) = C_2(I_2s - A_{22})^{-1}B_2 + D. \tag{6.59}$$

6.4. Stabilitatea IMEM și stabilitatea asimptotică

6.4.1. Sisteme dinamice liniare continue și invariante în timp

Teorema 7. Dacă sistemul dinamic (6.36), (6.37) este asimptotic stabil atunci el este stabil IMEM.

D. S-a văzut că sistemul dinamic (6.36), (6.37) este echivalent cu forma canonică Kalman (6.57), (6.58). Polinomul caracteristic, calculat pe baza acestei forme, are expresia

$$\Delta(s) = \det(I_1s - A_{11})\det(I_2s - A_{22})\det(I_3s - A_{33})\det(I_4s - A_{44}) \tag{6.60}$$

şi conform ipotezei toate rădăcinile sale sînt situate în semiplanul Re $s < 0$. Aceasta înseamnă că şi A_{22} are toate valorile proprii în acelaşi semiplan.

Pe de altă parte aplicînd transformarea inversă Laplace relaţiei (6.59) obţinem

$$g(t, 0) = C_2 e^{A_{22}t} B_2 + D\delta(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{6.61}$$

Este evident că $g(t, 0)$ satisface condiţia (6.11), ceea ce, conform *teoremei 3*, implică faptul că sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM. ■

Dacă se explicitează matricea inversă din (6.59), matricea de transfer a sistemului dinamic (6.36), (6.37) are forma

$$G(s) = \frac{1}{\Delta_2(s)} C_2 \operatorname{adj}(I_2 s - A_{22}) B_2 + D, \tag{6.62}$$

în care

$$\Delta_2(s) = \det(I_2 s - A_{22}). \tag{6.63}$$

Elementele matricii $G(s)$ sînt fracţii raţionale al căror numitor comun este $\Delta_2(s)$. De aici rezultă că *polii* funcţiei de variabilă complexă $G(s)$ sînt chiar rădăcinile polinomului $\Delta_2(s)$. Comparînd polinomul caracteristic (6.60) al sistemului (6.36), (6.37) cu numitorul comun (6.63) al matricii sale de transfer se trage concluzia că mulţimea polilor sistemului dinamic (6.36), (6.37) este inclusă în mulţimea valorilor sale proprii. Cele două mulţimi coincid numai dacă sistemul respectiv este de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă. Această constatare ne duce la următoarele două rezultate.

Teorema 8. Sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM dacă şi numai dacă toţi polii matricii sale de transfer sînt situaţi în semiplanul Re $s < 0$.

D. *Suficienţa.* Pentru matricea de transfer (6.62), conform teoremei dezvoltării (anexa A), putem scrie în domeniul timpului

$$g(t, 0) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} K_{ij} \frac{1}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\lambda_i t} + D\delta(t), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.64}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} [(s - \lambda_i)^{q_i} G(s)] \right\}_{s=\lambda_i}, \tag{6.65}$$

$$i = 1, \ldots, r, \qquad j = 1, \ldots, q_i,$$

unde λ_i sînt polii lui $G(s)$, fiecare de multiplicitate q_i, cu $\sum_{i=1}^{r} q_i = n_2$, n_2 fiind gradul polinomului $\Delta_2(s)$.

Întrucît $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, r$, rezultă că (6.11) este satisfăcută şi, conform *teoremei 3*, sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM.

Necesitatea. Se ştie că

$$G(s) = \int_0^\infty g(t, 0)\, e^{-st}\, dt.$$

Corespunzător acestei relaţii putem face următoarea evaluare

$$||G(s)|| \leqslant \int_0^\infty ||g(t, 0)|| \cdot |e^{-st}|\, dt.$$

Pentru $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ are loc $|e^{-st}| \leqslant 1$ şi, ţinînd seama şi de (6.11), din inegalitatea precedentă obţinem

$$||G(s)|| \leqslant \int_0^\infty ||g(t, 0)||\, dt < +\infty, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0.$$

Conform acestui rezultat $G(s)$ este mărginită în semiplanul $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, ceea ce înseamnă că toţi polii matricii de transfer $G(s)$ sînt situaţi în $\operatorname{Re} s < 0$. ■

Rezultatul cuprins în *teorema 8* pune în evidenţă faptul că stabilitatea IMEM a sistemului dinamic (6.36), (6.37) depinde de distribuţia în planul complex a zerourilor polinomului (6.63). Polinomul $\Delta_2(s)$, care este numitorul comun al elementelor matricii de transfer $G(s)$, se numeşte *polinomul polilor* sistemului (6.36), (6.37).

Să observăm că am ajuns la polinomul polilor $\Delta_2(s)$ plecînd de la reprezentarea intrare-stare-ieşire a sistemului. Dacă un sistem este cunoscut numai pe baza matricii sale de transfer atunci determinarea polinomului polilor este posibilă pe mai multe căi.

1° Prin determinarea formei Smith-Mc Millan a matricii $G(s)$, [I2].

2° Prin determinarea unei realizări minimale (A, B, C, D) a matricii $G(s)$, [I1)].

3° Prin determinarea tuturor (adică de toate ordinele) minorilor nenuli ai lui $G(s)$. În acest caz polinomul polilor este cel mai mic multiplu al numitorilor respectivilor minori, [P1].

Teorema 9. Dacă sistemul dinamic (6.36), (6.37) este de stare complet controlabilă, de stare complet observabilă şi stabil IMEM atunci el este asimptotic stabil.

D. Conform ipotezelor teoremei, mulţimea valorilor proprii ale sistemului dinamic (6.36), (6.37) coincide cu mulţimea polilor funcţiei sale de transfer. În baza *teoremei 8* toţi polii, respectiv toate valorile proprii ale sistemului, sînt situate în semiplanul Re $s < 0$. Ca urmare, sistemul dinamic (6.36), (6.37) este asimptotic stabil. ■

Rezultatul precedent este o reciprocă a *teoremei 7*. Fără a mai fi necesare demonstraţii mai putem enunţa şi următoarele reciproce ale *teoremei 7*.

Teorema 10. Dacă sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM atunci partea sa de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă este asimptotic stabilă.

Teorema 11. Dacă sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM şi părţile sale de stare necontrolabilă şi/sau de stare neobservabilă sînt asimptotic stabile atunci sistemul considerat este asimptotic stabil.

6.4.2. Testarea stabilităţii IMEM Gradul de stabilitate

Modul în care a fost definită stabilitatea IMEM permite analiza experimentală relativ simplă a proprietăţilor de stabilitate externă ale sistemelor dinamice. În acest context o problemă de natură teoretică, foarte importantă, este aceea a alegerii tipului de mărime de intrare prin care urmează să se testeze stabilitatea externă.

În mod obişnuit se folosesc semnalul treaptă (funcţia lui Heaviside) şi semnalul sinusoidal. Vom arăta în continuare în ce măsură testarea cu semnalul treaptă oferă informaţii nuanţate asupra stabilităţii externe (sau interne în condiţiile *teoremelor 9, 10 şi 11*). Testarea cu semnalul sinusoidal va fi abordată în cadrul metodei frecvenţiale (v. II.3.2).

Dacă mărimea de intrare a sistemului (6.36), (6.37) este

$$u(t) = [1\ \ 1 \ldots 1]^T \sigma(t), \tag{6.66}$$

unde

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{6.67}$$

este funcţia treaptă unitară, atunci răspunsul sistemului, în transformate Laplace, ţinînd seama că $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$, are forma

$$Y(s) = H(s)\,[1\ \ 1 \ \ldots\ 1]^T, \tag{6.68}$$

în care s-a notat

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s). \tag{6.69}$$

Definiția 4. Matricea $h(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{H(s)\}$ se numește *matricea indicială* a sistemului dinamic (6.36), (6.37).

Conform teoremei integrării originalului (v. anexa A), relației (6.69) îi corespunde în domeniul timpului următoarea relație

$$h(t) = \int_0^t g(\tau, 0)\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{6.70}$$

Teorema 12. Sistemul dinamic (6.36), (6.37) este stabil IMEM dacă și numai dacă $\lim_{t \to \infty} h(t)$ există și este finită.

D. Ținînd seama de (6.64) și (6.70) este evident că pentru $t \to \infty$ obținem $h(t) \to \bar{h}$, unde $\bar{h}$ este o matrice cu elemente constante, dacă și numai dacă $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, respectiv dacă și numai dacă sistemul considerat, conform *teoremei 8*, este stabil IMEM. ∎

În conformitate cu *teorema 12* rezultă că matricea indicială poate fi utilizată, în cazul unui sistem stabil IMEM, pentru aprecierea apropierii sistemului (6.36), (6.37) de situația de instabilitate IMEM, respectiv a calităților sale de stabilitate IMEM. Această apreciere se face pe baza abaterilor pe care le prezintă elementele matricii indiciale $h(t)$ față de elementele matricii

$$\bar{h} = \lim_{t \to \infty} h(t). \tag{6.71}$$

Ținînd seama de *teorema 8* și de relațiile (6.64) și (6.70) rezultă că, din punct de vedere calitativ, abaterile elementelor matricii $h(t)$ în raport cu cele ale matricii $\bar{h}$ vor fi cu atît mai mari, respectiv gradul de stabilitate IMEM va fi mai redus, cu cît polii matricii de transfer $G(s)$, situați în semiplanul $\operatorname{Re} s < 0$, vor fi mai apropiați de axa imaginară $\operatorname{Re} s = 0$.

Experiența acumulată în domeniul proiectării sistemelor automate arată că asigurarea stabilității IMEM nu este suficientă. În mod obișnuit trebuie să se asigure prin proiectare o anumită *rezervă de stabilitate IMEM*, respectiv o anumită distanță minimă α_{min} a polilor matricii de transfer $G(s)$ față de axa imaginară a planului complex. Această măsură, pe lîngă faptul că asigură o comportare corespunzătoare a sistemului, previne pierderea stabilității datorită:

— variației parametrilor sub influența factorilor de mediu sau a îmbătrînirii materialelor;

— erorilor sistematice şi aleatoare care intervin în evaluarea valorilor parametrilor pe care se bazează proiectarea;
— liniarizării neliniarităţilor;
— toleranţelor elementelor constructive ale sistemului real.

Gradul de stabilitate IMEM este prin definiţie distanţa α dintre axa imaginară a planului complex şi polul lui $G(s)$ cel mai apropiat de ea. Evident, prin proiectare trebuie să se asigure ca $\alpha > \alpha_{min}$.

Proprietatea unui sistem dinamic de a rămîne asimptotic stabil sau stabil IMEM, în condiţiile în care parametrii şi/sau structura sa se modifică (sau sînt incerte) între anumite limite admisibile, se numeşte *stabilitate structurală* (internă sau externă).

În general, proprietatea unui sistem dinamic de a-şi conserva între limite precizate sau precizabile, o anumită calitate, bine definită (de exemplu $\|h(t) - h_d(t)\| \leqslant \varepsilon(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, unde $\varepsilon(t)$ este eroarea admisă a lui $h(t)$ în raport cu matricea indicială $h_d(t)$), în condiţiile în care parametrii şi/sau structura sa se modifică (sau sînt incerte) între anumite limite, se numeşte *robusteţe*.

6.4.3. Corelaţia dintre calitatea răspunsului indicial şi gradul de stabilitate

Pentru simplificarea expunerii vom considera în continuare un sistem dinamic liniar, continuu şi invariant în timp, cu o intrare şi o ieşire, descris de funcţia de transfer

$$G(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-\beta_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\alpha_i)}, \quad m < n, \tag{6.72}$$

unde α_i sînt polii şi β_j sînt zerourile lui $G(s)$, iar K este un factor de proporţionalitate. Se presupune că $\alpha_i \neq \beta_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Vom determina răspunsul indicial al acestui sistem în ipoteza că α_i sînt distincţi, cu $\operatorname{Re}\alpha_i < 0$, şi $\beta_j \neq 0$, utilizînd teorema dezvoltării (v. anexa A). În conformitate cu (6.69) şi (6.72) putem scrie

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\} = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k t}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.73}$$

unde

$$A_0 = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} sG(s) \frac{1}{s} = (-1)^{m-n} K \frac{\beta_1 \dots \beta_m}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \tag{6.74}$$

$$A_k = (s - \alpha_k) G(s) \frac{1}{s} \Bigg|_{s=\alpha_k} = K \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (\alpha_k - \beta_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\alpha_k - \alpha_i)}, \tag{6.75}$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Din analiza relaţiilor (6.73)—(6.75) rezultă că abaterile lui $h(t)$ în raport cu $\bar{h} = A_0$ nu depind numai de distribuţia polilor α_i, ci şi de distribuţia zerourilor β_i în planul complex.

Caracterizarea calităţii răspunsului indicial se face uzual pe baza unor indicatori numiţi *indicatori ai performanţelor sistemului*. Sînt posibile două evoluţii tipice ale răspunsului indicial: oscilatoriu amortizat şi aperiodic.

Răspunsul indicial oscilatoriu amortizat se caracterizează, din punctul de vedere al gradului de stabilitate, prin următorii indicatori:

— *suprareglarea*, definită prin

$$\sigma = \frac{h_{max} - \bar{h}}{\bar{h}}, \tag{6.76}$$

— *durata regimului tranzitoriu* t_s, care este durata pînă cînd $h(t)$ intră definitiv în zona de 5% a valorii staţionare $\bar{h}$, adică are loc

$$0{,}95\, \bar{h} \leqslant h(t) \leqslant 1{,}05\, \bar{h}, \quad t \geqslant t_s. \tag{6.77}$$

Răspunsul indicial aperiodic se caracterizează numai prin durata regimului tranzitoriu t_s.

După cum este de aşteptat, la realizarea anumitor performanţe ale sistemului (6.72), în conformitate cu (6.73)—(6.75), contribuie toţi polii şi toate zerourile lui $G(s)$, respectiva contribuţie depinzînd de poziţia lor în planul complex. Se trage în mod firesc concluzia că în general relaţia dintre calitatea răspunsului indicial şi gradul de stabilitate nu este simplă, ea putînd fi puternic influenţată de zerourile sistemului.

În numeroase cazuri este posibilă împărţirea polilor în două grupe:

— o grupă a polilor situaţi relativ aproape de originea planului complex, poli pe care îi vom nota cu α_μ, şi

— o grupă a polilor α_ν, cu Re $\alpha_\nu \ll$ Re α_μ şi unde α_μ este un pol oarecare din prima grupă.

Polii α_μ se numesc ***polii dominanţi***, iar polii α_ν se numesc ***polii îndepărtaţi*** ai sistemului.

Influenţa unui pol îndepărtat asupra răspunsului indicial este de două feluri. Pe de o parte în $h(t)$, relaţia (6.73), există termeni de forma $A_\nu \, e^{\alpha_\nu t}$. Cum $\operatorname{Re}\alpha_\nu \ll \operatorname{Re}\alpha_\mu$, rezultă că termenii respectivi tind rapid la zero pentru $t \to \infty$ şi ca atare pot fi neglijaţi. Pe de altă parte un pol îndepărtat α_ν influenţează termenii din $h(t)$ corespunzători polilor dominanţi, deoarece α_ν apare în expresia lui A_μ. Pentru $k = \mu$, în (6.75) există factorii $|\alpha_\mu/\alpha_\nu - 1| \approx 1$. Şi în acest caz contribuţia în $h(t)$ a polilor îndepărtaţi este neglijabilă.

Acelaşi lucru se poate afirma şi despre contribuţia *zerourilor îndepărtate.*

Aplicaţiile în care se pot pune în evidenţă configuraţii dominante ale polilor şi zerourilor sînt frecvente. Dintre acestea, tipică pentru sistemele automate este situaţia în care funcţia de transfer a sistemului se caracterizează printr-o pereche de poli dominanţi. În astfel de cazuri funcţia de transfer (6.72) poate fi aproximată prin

$$G(s) \approx \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{6.78}$$

unde $\alpha_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$ este perechea de poli dominanţi, ω_n — pulsaţia naturală, ζ — factorul de amortizare şi K — factorul de amplificare.

Răspunsul indicial al sistemului (6.78) are următoarea formă

$$\begin{array}{l} h(t) = \\ t \in \mathbf{R}_+ \end{array} \begin{cases} K\left[1 - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \right.\right. \\ \left.\left. + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right], \quad 0 \leqslant \zeta < 1, \\ K[1 - (1 + \omega_n t)]\, e^{-\zeta\omega_n t}, \quad \zeta = 1, \\ K\left[1 - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{sh}\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\, t + \right.\right. \\ \left.\left. + \operatorname{argth} \dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}\right)\right], \quad \zeta > 1. \end{cases} \tag{6.79}$$

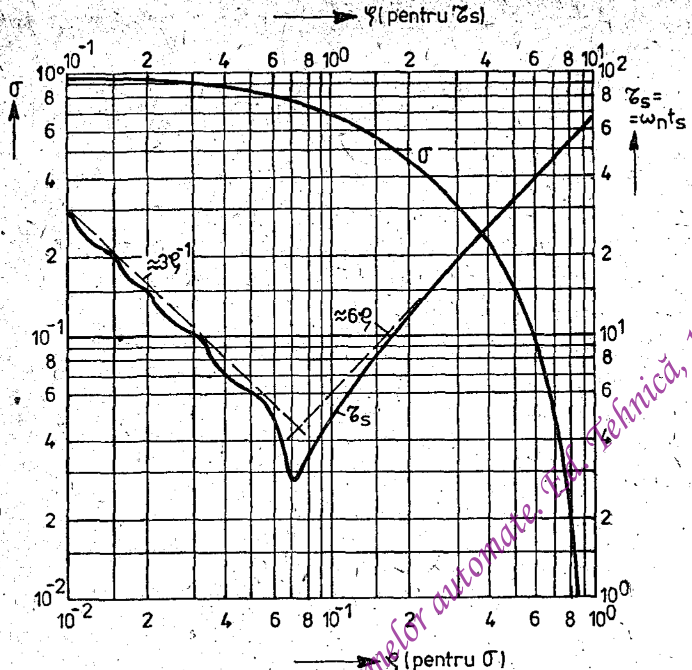


Fig. I.20. Dependența suprareglării și a duratei adimensionale a regimului tranzitoriu de factorul de amortizare.

În acest caz între indicatorii performanțelor σ și t_s și localizarea polilor $\alpha_{1,2}$ există relații simple. Într-adevăr, din (6.79) se obțin

$$\bar{h} = K, \quad h_{max} = K\left(1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right), \quad 0 \leqslant \zeta < 1, \tag{6.80}$$

iar din (6.76) rezultă

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \leqslant \zeta < 1, \tag{6.81}$$

al cărei grafic este reprezentat în fig. I.20.

Rezolvarea pe cale analitică, din punctul de vedere al necunoscutei t_s, a dublei inecuații (6.77), particularizată pentru (6.79), nu este posibilă. Soluția ei numerică pentru valori uzuale ale lui ζ este reprezentată grafic în fig. I.20.

Din examinarea curbelor din fig. I.20, se trage concluzia că, în funcție de performanțele dorite, polii dominanți ai sistemului trebuie să aibă o anumită localizare în planul complex. De exemplu pentru realizarea duratei minime a regimului tranzitoriu, în condiţiile în care ω_n = constant, este necesar ca $\zeta = 0{,}707$.

Din problematica abordată în cadrul acestui paragraf rezultă că realizarea prin proiectare a unei anumite rezerve de stabilitate (printr-un anumit grad de stabilitate), a anumitor performanţe (prin anumite configuraţii poli-zerouri), a unei anumite robusteţi (printr-o dependenţă slabă a proprietăţilor de stabilitate sau a calităţilor răspunsului indicial de modificările sau de incertitudinile parametrice şi/sau structurale admisibile) sînt de o mare importanţă practică. Ca urmare, aspectele esenţiale legate de rezerva de stabilitate şi de stabilitatea structurală vor fi abordate în mod specific şi cu prilejul expunerii unor tehnici de analiză a stabilităţii.

6.4.4. Sisteme dinamice liniare discrete şi invariante în timp

Analiza întreprinsă la § 6.3 pentru sistemele dinamice liniare continue şi invariante în timp poate fi realizată, *mutatis mutandis*, şi în cazul sistemelor dinamice liniare discrete şi invariante în timp, deoarece definiţiile controlabilităţii stării şi a observabilităţii stării au caracter general.

Fie un sistem dinamic liniar discret şi invariant în timp, descris de ecuaţiile

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{6.82}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \tag{6.83}$$

unde $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ şi A, B, C şi D sînt matrici constante de dimensiuni adecvate.

Fie matricile

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots A^{n-1}B], \tag{6.84}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2, \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6.85}$$

numite respectiv *matricea de controlabilitate* și *matricea de observabilitate* ale sistemului (6.82), (6.83).

Vom da în continuare principalele rezultate referitoare la relația dintre stabilitatea IMEM și stabilitatea asimptotică, omițînd demonstrațiile aferente. Aceste demonstrații urmează căile utilizate anterior în cazul sistemelor dinamice liniare continue și invariante în timp.

Teorema 13. Sistemul dinamic (6.82), (6.83) este de stare complet controlabilă dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang} \mathcal{C} = n. \tag{6.86}$$

Teorema 14. Sistemul dinamic (6.82), (6.83) este de stare complet observabilă dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang} \mathcal{O} = n. \tag{6.87}$$

Teorema 15. Dacă sistemul dinamic (6.82), (6.83) este asimptotic stabil atunci el este stabil IMEM.

Teorema 16. Sistemul dinamic (6.82), (6.83) este stabil IMEM dacă și numai dacă toți polii matricii sale de transfer (v. 3.1.4) au modulul mai mic decît unitatea.

Teorema 17. Dacă sistemul dinamic (6.82), (6.83) este de stare complet controlabilă, de stare complet observabilă și stabil IMEM atunci el este asimptotic stabil.

Teorema 18. Dacă sistemul dinamic (6.82), (6.83) este stabil IMEM atunci partea sa de stare complet controlabilă și de stare complet obserbabilă este asimptotic stabilă.

Teorema 19. Dacă sistemul dinamic (6.82), (6.83) este stabil IMEM și părțile sale de stare necontrolabilă și/sau de stare neobservabilă sînt asimptotic stabile atunci sistemul considerat este asimptotic stabil.

Matricea indicială a sistemului (6.82), (6.83) se definește, ca și în cazul sistemelor dinamice liniare continue și invariante în timp, ca fiind răspunsul la mărimea de intrare

$$u(k) = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{6.88}$$

și în condiții inițiale nule. Înlocuind (6.88) în (3.18) și ținînd seama de (3.17), răspunsul sistemului (6.82), (6.83) are expresia

$$y(k) = h(k) \ [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{6.89}$$

unde

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B + D, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.90}$$

Definiția 5. Matricea $h(k)$, $k \in \mathbf{N}$, se numește *matricea indicială* a sistemului dinamic (6.82), (6.83).

Teorema 20. Sistemul dinamic (6.82), (6.83) este stabil IMEM dacă și numai dacă $\lim\limits_{k \to \infty} h(k)$ există și este finită.

Și în cazul sistemelor dinamice liniare discrete și invariante în timp se poate pune în evidență o legătură între calitatea răspunsului indicial și localizarea polilor în interiorul cercului de rază unitate [K2]. În general polii apropiați de cercul de rază unitate, dar situați în interiorul său, determină răspunsuri indiciale slab amortizate. Prin analogie cu noțiunile introduse la 6.4.2 se pot defini și aici *gradul de stabilitate IMEM* și *rezerva de stabilitate IMEM* ca fiind distanța polilor celor mai apropiați și respectiv distanța minimă admisă a polilor în raport cu cercul de rază unitate. Pentru ca un sistem să posede o anumită rezervă de stabilitate α_{min}, cu $0 < \alpha_{min} \leqslant 1$, trebuie ca toți polii săi să fie situați în interiorul cercului de rază $1 - \alpha_{min}$.

6.4.5. Sisteme dinamice liniare variante în timp

Deși varianța în timp atrage după sine o creștere a complexității problematicii stabilității, care necesită și o nuanțare corespunzătoare a noțiunilor din sfera stabilității interne și stabilității externe, relația dintre stabilitatea asimptotică și stabilitatea IMEM, în contextul determinant al liniarității, rămîne, *mutatis mutandis*, în același cadru conturat în cazul sistemelor dinamice liniare invariante în timp. În ceea ce privește condițiile necesare și suficiente de completă controlabilitate a stării și respectiv de completă observabilitate a stării, se constată că ele se bazează pe matricea de tranziție a sistemului [K1] și, ca atare, nu oferă posibilitatea unei abordări nemijlocit parametrice decît în anumite cazuri particulare.

6.4.6. Aplicație: acordarea regulatoarelor după criteriul modulului

Vom examina în cele ce urmează unele consecințe ale acordării regulatoarelor, din cadrul sistemelor automate, pe baza criteriului modulului, [C1].

Fie sistemul automat cu o intrare și o ieșire din fig. I.21, în care $G_R(s)$ este funcția de transfer a regulatorului și

$$G_F(s) = \frac{K_f}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s + 1)\prod_{i=1}^{q}(T_{pi}s + 1)} \tag{6.91}$$

este funcția de transfer a instalației automatizate (partea fixată a sistemului automat). În (6.91) K_f este factorul de amplificare, T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt constantele de timp importante (de valori relativ mari) și T_{pi}, $i = 1, 2, \ldots, q$, sînt așa-numitele constante de timp parazite (între care se numără, de exemplu în cazul automatizării acționărilor electrice, constantele de timp ale filtrelor de netezire conținute de traductoare, timpul mort al redresoarelor comandate etc.), care satisfac inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{q} T_{pi} \ll \min_k T_k. \tag{6.92}$$

Constantele de timp parazite sînt principial necompensabile, în sensul că prin compensarea constantei de timp a unui filtru de netezire cu funcția de transfer $\frac{1}{T_p s + 1}$ printr-o componentă de tipul $T_p s + 1$ în regulator s-ar anula efectul de filtrare, necesar din punct de vedere funcțional.

Sub ipoteza (6.92) se admite aproximarea

$$\prod_{i=1}^{q}(T_{pi}s + 1) \approx T_\varepsilon s + 1, \tag{6.93}$$

unde

$$T_\varepsilon = \sum_{i=1}^{q} T_{pi}. \tag{6.94}$$

În aceste condiții funcția de transfer (6.91) se aproximează prin

$$G_F(s) = \frac{K_f}{(T_\varepsilon s + 1)\prod_{k=1}^{n}(T_k s + 1)}. \tag{6.95}$$

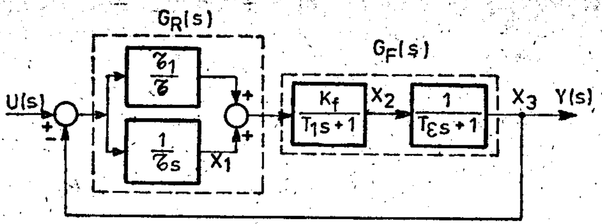


Fig. I.21. Pentru evidenţierea unei consecinţe a acordării regulatoarelor după criteriul modulului.

Conform criteriului modulului, funcţia de transfer a regulatorului este de forma

$$G_R(s) = \frac{1}{\tau s}\prod_{k=1}^{n}(\tau_k s + 1), \tag{6.96}$$

unde

$$\tau_k = T_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad \tau = 2K_f T_\varepsilon. \tag{6.97}$$

Funcţia de transfer a sistemului închis, conform schemei bloc din fig. I.21, are expresia

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)\,G_F(s)}{1 + G_R(s)\,G_F(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{6.98}$$

unde $\omega_n = 1/\sqrt{2}\,T_\varepsilon$. Comparînd (6.98) cu (6.78) rezultă că pentru sistemul automat s-a obţinut $\zeta = 0{,}707$, iar din fig. I.20 rezultă $\sigma\% = 4{,}3\%$ şi respectiv $t_s = 4{,}1\ T_\varepsilon$. Aceasta înseamnă că prin (6.96), (6.97) se realizează un sistem automat stabil IMEM şi, mai mult, sistemul considerat are un răspuns indicial optim din punctul de vedere al duratei regimului tranzitoriu.

În contextul acestui subcapitol trebuie să remarcăm faptul că regulatorul (6.96) şi condiţiile (6.97) de acordare a parametrilor săi conform criteriului modulului fac ca o parte a sistemului să devină necontrolabilă. Explicaţia constă în aceea că în funcţia de transfer a sistemului deschis

$$G(s) = G_R(s)\,G_F(s), \tag{6.99}$$

ţinînd seama de (6.95)—(6.97), se produc o serie de simplificări între binoamele de forma $\tau_k s + 1$ şi $T_k s + 1$, astfel că în final se obţine

$$G(s) = \frac{1}{2T_\varepsilon s(T_\varepsilon s + 1)}. \tag{6.100}$$

Evident, în aceste circumstanţe reacţia negativă nu mai poate restaura controlabilitatea completă a stării sistemului, ceea ce explică faptul că în transferul intrare-ieşire (6.98) constantele de timp importante T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, nu mai au nici o influenţă.

Pentru a justifica afirmaţiile de mai sus vom considera sistemul automat din fig. I.21, cu (6.95)—(6.97) şi $n = 1$. Cu variabile de stare $X_1(s)$, $X_2(s)$ şi $X_3(s)$ putem scrie următoarele ecuaţii

$$\begin{cases} X_1(x) = \dfrac{1}{\tau s}[U(s) - Y(s)], & (6.101) \\[2ex] X_2(s) = \dfrac{K_f}{T_1 s + 1}\left\{X_1(s) + \dfrac{\tau_1}{\tau}[U - Y(s)]\right\}, & (6.102) \\[2ex] X_3(s) = \dfrac{1}{T_\varepsilon s + 1} X_2(s), & (6.103) \end{cases}$$

$$Y(s) = X_3(s). \tag{6.104}$$

Înlocuind (6.104) în (6.101) şi (6.102) şi trecînd la domeniul timpului, cu condiţiile iniţiale $x_1(-0) = x_2(-0) = x_3(-0) = 0$ obţinem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau} \\[2ex] \dfrac{K_f}{T_1} & -\dfrac{1}{T_1} & -\dfrac{K_f\tau_1}{\tau T_1} \\[2ex] 0 & \dfrac{1}{T_\varepsilon} & -\dfrac{1}{T_\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\tau} \\[2ex] \dfrac{K_f\tau_1}{\tau T_1} \\[2ex] 0 \end{bmatrix} u, \tag{6.105}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{6.106}$$

Matricea de controlabilitate a acestui sistem are forma

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\tau} & 0 & -\dfrac{K_f\tau_1}{\tau^2 T_1 T_\varepsilon} \\[2ex] \dfrac{K_f\tau_1}{\tau T_1} & \dfrac{K_f}{\tau T_1}\left(1 - \dfrac{\tau_1}{T_1}\right) & \dfrac{K_f}{\tau T_1^2}\left(\dfrac{\tau_1}{T_1} - \dfrac{K_f\tau_1^2}{\tau T_\varepsilon} - 1\right) \\[2ex] 0 & \dfrac{K_f\tau_1}{\tau T_1 T_\varepsilon} & \dfrac{K_f}{\tau T_1 T_\varepsilon}\left(1 - \dfrac{\tau_1}{T_1} - \dfrac{\tau_1}{T_\delta}\right) \end{bmatrix} \tag{6.107}$$

şi

$$\det \mathcal{C} = \frac{K_f^2 \tau_1}{\tau^3 T_1^2 T_\varepsilon}\left(\frac{1}{T_\varepsilon} - \frac{1}{\tau_1}\right)\left(\frac{\tau_1}{T_1} - 1\right). \tag{6.108}$$

Pentru $\tau_1 = T_1$ rezultă $\det \mathcal{C} = 0$ şi rang $\mathcal{C} = 2$, ceea ce înseamnă că sistemul este de stare parţial controlabilă. Aducînd sistemul (6.105), (6.106), cu $\tau_1 = T_1$, la forma canonică diagonală, se poate vedea că partea necontrolabilă a sistemului corespunde valorii proprii $\lambda_1 = -1/T_1$. Acest fapt explică de ce subsistemul caracterizat prin valoarea proprie λ_1 nu participă la transferul intrare-ieşire şi clarifică totodată consecinţele de natură structural-parametrică ale aplicării criteriului modulului.

Capitolul II

Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate liniare

În cadrul acestui capitol se vor expune principalele metode de analiză a stabilității asimptotice și a stabilității IMEM în cazul sistemelor automate liniare.

Mare parte din aceste metode aparțin teoriei clasice a stabilității și ele s-au aplicat cu succes în analiza și sinteza sistemelor automate liniare constante monovariabile (sisteme cu o mărime prescrisă, o perturbație și o mărime reglată) încă din perioada incipientă a automaticii.

După cum se va vedea pe parcursul acestui capitol, aplicarea metodelor expuse nu este limitată numai la sistemele automate monovariabile. Ele se pot aplica cu succes, în anumite situații, și în cazul sistemelor automate multivariabile (sisteme cu mai multe intrări, mai multe ieșiri și mai multe bucle de reacție). Complexitatea acestor sisteme a impus însă elaborarea în ultimele două decenii a unor metode specifice de analiză a stabilității, care vor face obiectul capitolului IV.

1. Tehnici polinomiale

Această categorie de tehnici se aplică sistemelor dinamice liniare constante și se bazează pe utilizarea *polinomului caracteristic* — în cazul *stabilității asimptotice* (v. *teoremele 6 și 8 de la I.5*), sau pe utilizarea *polinomului polilor* — în cazul *stabilității IMEM* (v. *teoremele 8 și 16* de la I.6).

În acest context problema stabilității (asimptotice sau IMEM) se încadrează în aceea mai generală a repartiției zerourilor unui polinom în planul complex.

O posibilitate de *analiză directă* a stabilităţii asimptotice sau a celei IMEM constă în determinarea numerică a zerourilor polinomului caracteristic sau ale polinomului polilor [D 1, 2], [S1], [V 1], [W 1,2]. Pe această bază se pot face aprecieri corespunzătoare privind atît gradul de stabilitate, cît şi rezerva de stabilitate ale sistemului analizat. Determinarea numerică a zerourilor poate fi folosită, prin aplicarea repetată a procedurii numerice, şi în cazul în care anumiţi coeficienţi ai polinomului sînt definiţi pe anumite intervale. Este uşor de observat că pentru un număr mare de coeficienţi definiţi pe intervale relativ largi, acest procedeu conduce la un volum mare de calcule fără ca, în final, să se poată afirma cu certitudine că rezultatele reflectă exhaustiv proprietăţile de stabilitate structurală ale sistemului analizat. Această concluzie se bazează pe faptul că, pentru calculul repetat al zerourilor polinomului respectiv, coeficienţii săi vor lua succesiv doar un număr finit de valori din intervalele lor de definiţie şi pe faptul că relaţiile dintre coeficienţii unui polinom şi zerourile sale sînt puternic neliniare (formulele lui Viète).

Un dezavantaj important al tehnicilor polinomiale, determinat de caracterul relaţiilor dintre coeficienţii unui polinom şi zerourile sale, este acela că precizia rezultatelor este puternic influenţată de precizia cu care au fost determinaţi coeficienţii polinomului sistemului analizat. Conform formulelor lui Viète, erori foarte mici care afectează coeficienţii unui polinom conduc la erori considerabile care afectează zerourile acelui polinom. O analiză completă a stabilităţii asimptotice sau a celei IMEM porneşte de la premisa că polinomul considerat are toţi coeficinţii definiţi pe nişte intervale determinate de erorile de care aceştia sînt afectaţi. După cum se va vedea mai jos, o astfel de analiză poate fi mai simplă prin *metode indircte*, respectiv prin metode care nu presupun determinarea efectivă a rădăcinilor unui polinom.

1.1. Sisteme continue în timp

Întrucît tehnicile care se vor expune sînt aplicabile în egală măsură în studiul stabilităţii asimptotice ca şi în studiul stabilităţii IMEM, se vor da mai întîi o definiţie şi două rezultate echivalente respectiv cu *teorema 6* de la I.5 şi cu *teorema 8* de la I.6, care vor permite o tratare unitară a celor două tipuri de stabilitate.

Definiţia 1. Polinomul

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

cu $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, şi $a_0 \neq 0$, se numeşte ***hurwitzian*** dacă toate zerourile sale sînt situate în semiplanul $\mathrm{Re}\, s < 0$.

În continuare ne vom ocupa numai de polinomul de forma (1.1) cu coeficienţi reali ($a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$), urmînd ca polinoamele cu coeficienţi complecşi să fie studiate la III.1.3.3.

Teorema 1. Sistemul dinamic (I.5.3.2) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic al matricei A este hurwitzian.

Teorema 2. Sistemul dinamic (I.6.36), (I.6.37) este stabil IMEM dacă şi numai dacă polinomul polilor este hurwitzian.

Întrucît $a_0 \neq 0$, din (1.1), după împărţirea prin a_0, se obţine polinomul

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n, \quad s \in \mathbf{C}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{a_0}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

care are aceleaşi zerouri ca şi $P(s)$.

Vom demonstra mai întîi o condiţie necesară ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian.

Teorema 3. O condiţie necesară ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este

$$\alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.3}$$

D. Dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian atunci zerourile sale $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \dots, n$, satisfac condiţiile $\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$. În plus, deoarece $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, pentru orice zerou complex λ_j, $\Delta(s)$ admite şi zeroul complex conjugat $\bar{\lambda}_j$. În aceste condiţii, conform formulelor lui Viète, putem scrie

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) > 0\\
\alpha_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n > 0\\
\alpha_3 &= -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n) > 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_n &= (-1)^n \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n > 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Condiţia necesară (1.3), deosebit de simplă, este foarte utilă în aplicaţii deoarece ne permite să afirmăm că dacă $\Delta(s)$ are cel puţin un coeficient nepozitiv atunci el nu este hurwitzian.

1.1.1. Criteriul Nyquist-Mihailov

Acest criteriu se încadrează în categoria metodelor grafice și este frecvent utilizat în analiza sistemelor automate.

Fie γ un contur închis din planul s. După cum se știe, [A 1, 2], [S 2], prin transformarea $S = \Delta(s)$ conturul închis γ din planul s se transformă în conturul închis Γ din planul S. Dacă q este un punct interior al lui γ (adică este în domeniul situat la stînga lui γ cînd acesta este parcurs în sens pozitiv) atunci $Q = \Delta(q)$ este un punct interior al lui Γ. Afirmația reciprocă este de asemenea adevărată, în sensul că dacă Q este un punct interior al lui Γ, atunci există punctele $q_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, soluții ale ecuației $\Delta(q) = Q$, care sînt situate — toate — în interiorul lui γ.

Teorema 4 (Nyquist-Mihailov). Polinomul (1.2) este hurwitzian dacă și numai dacă hodograful[1] $\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, are originea ca punct interior.

D. Pentru obținerea hodografului $\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, trebuie să se considere în planul s conturul închis reprezentat de axa imaginară (punctul de închidere se află la infinit), fig. II.1.

Suficiența. Dacă hodograful $\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, are originea ca punct interior atunci ecuația $\Delta(s) = 0$, $s \in \mathbf{C}$, admite rădăcinile $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$, toate situate la stînga axei imaginare.

Necesitatea. Dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian și $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$, sînt rădăcinile ecuației $\Delta(s) = 0$ atunci λ_i, $i = 1, \ldots, n$, sînt situate toate la stînga axei imaginare. Rezultă de aici că originea planului S este situată la stînga hodografului $\Delta(j\omega)$ pentru ω luînd valori de la $-\infty$ la $+\infty$.

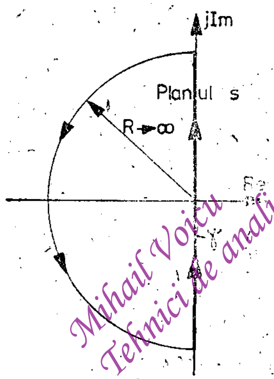


Fig. II.1. Conturul γ pentru *teorema* 4.

Exemplul 1.1. Fie sistemul automat cu schema bloc structurală din fig. I.21, în care

$$G_F(s) = \frac{8}{2s^2 + 34s + 1}, \quad G_R(s) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4s}.$$

Să se analizeze stabilitatea IMEM a acestui sistem.

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)\,G_F(s)}{1 + G_R(s)\,G_F(s)} = \frac{3s + 2}{2\,(s^3 + 17s^2 + 2s + 1)}.$$

---

[1] Hodograful unui vector sau al unui fazor dependent de o variabilă $x \in I \subseteq \mathbf{R}$ este locul geometric al vîrfului său pentru $x \in I$.

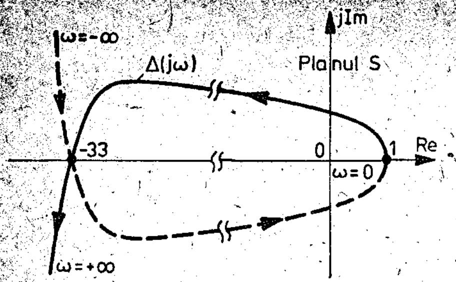


Fig. II.2. Hodograful $\Delta(j\omega)$ la *exemplul 1.1.*

Pentru analiza stabilităţii IMEM este necesar să se determine natura polinomului polilor

$$\Delta(s) = s^3 + 17s^2 + 2s + 1.$$

Pentru $s = j\omega$ se determină principalele puncte ale hodografului $\Delta(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$, după care se trasează prin puncte graficul respectiv (pentru $\omega < 0$ acesta este simetric, faţă de axa reală, cu ceea ce s-a obţinut pentru $\omega > 0$), fig. II.2. Originea planului S este în interiorul conturului Γ, ceea ce înseamnă, conform *teoremei 4*, că sistemul automat analizat este stabil IMEM.

1.1.2. Criteriul Hurwitz

Pentru a putea demonstra acest criteriu într-un mod relativ simplu, vom expune mai întîi cîteva rezultate pregătitoare.

Fie polinomul

$$\Delta^*(s) = s^n - \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}s + (-1)^n\alpha_n, \quad s \in \mathbf{C}, \qquad (1.4)$$

ale cărui zerouri sînt $-\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt conjugatele zerourilor polinomului $\Delta(s)$.

Cu ajutorul polinoamelor $\Delta(s)$ şi $\Delta^*(s)$ se definesc

$$\Delta_1(s) = (s + 2\alpha)\,\Delta(s) + s\Delta^*(s), \quad \alpha > 0, \; s \in \mathbf{C}, \qquad (1.5)$$

$$\Delta_2(s) = (-s + 2\alpha_1)\,\Delta(s) + s\Delta^*(s), \; \alpha_1 > 0, \; s \in \mathbf{C}. \qquad (1.6)$$

Este evident, că $\Delta_1(s)$ este de grad $n + 1$. Vom arăta că $\Delta_2(s)$ este de grad $n - 1$. Într-adevăr, înlocuind (1.2) şi (1.4) în (1.6), după calcule elementare, se obţine

$$\Delta_2(s) = 2[\alpha_1^2 s^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\, s^{n-2} + \ldots].$$

Pentru $s = j\omega$ din (1.5) se obţine

$$\Delta_1(j\omega) = 2\alpha\Delta(j\omega) + j\omega[\Delta(j\omega) + \Delta^*(j\omega)], \quad \omega \in \mathbf{R}. \qquad (1.7)$$

Dacă n este par atunci $\Delta^*(j\omega) = \bar{\Delta}\,(j\omega)$ şi din (1.7) rezultă

$$\Delta_1(j\omega) = 2\alpha\Delta(j\omega) + 2j\omega\,\mathrm{Re}\,\Delta(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \qquad (1.8)$$

Hodograful $\Delta_1(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se obține din $\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$. Prin înmulțirea lui $\Delta(j\omega)$ cu 2α rezultă hodograful $2\alpha\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$; punctele hodografului $2\alpha\Delta(j\omega)$ sînt apoi translate cu fazorul $2j\omega \operatorname{Re}\Delta(j\omega)$, colinear cu axa imaginară și de modul variabil. Modulul acestui vector este nul pentru $\operatorname{Re}\Delta(j\omega) = 0$, adică atunci cînd hodograful $2\alpha\Delta(j\omega)$ intersectează axa imaginară. În consecință punctele de intersecție ale hodografelor $2\alpha\Delta(j\omega)$ și $\Delta_1(j\omega)$ cu axa imaginară coincid. Conform *teoremei 4* $\Delta_1(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian.

Dacă n este impar atunci $\Delta^*(j\omega) = -\overline{\Delta}(j\omega)$ și din (1.7) rezultă

$$\Delta_1(j\omega) = 2\alpha\,\Delta(j\omega) - 2\omega \operatorname{Im}\Delta(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \tag{1.9}$$

De această dată hodograful $\Delta_1(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se obține prin translarea punctelor hodografului $2\alpha\Delta(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, cu fazorul $2\omega \operatorname{Im}\Delta(j\omega)$, coliniar cu axa reală și de modul variabil, dar astfel încît hodografele $2\alpha\Delta(j\omega)$ și $\Delta_1(j\omega)$ au aceleași puncte de intersecție cu axa reală.

Conform *teoremei 4*, $\Delta_1(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian.

În mod analog, pentru $s = j\omega$ din (1.6) se obține

$$\Delta_2(j\omega) = 2\alpha_1\Delta(j\omega) + j\omega[\Delta^*(j\omega) - \Delta(j\omega)], \quad \omega \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Dacă n este par atunci $\Delta^*(j\omega) = \overline{\Delta}(j\omega)$ și din (1.10) rezultă

$$\Delta_2(j\omega) = 2\alpha_1\Delta(j\omega) + 2\omega \operatorname{Im}\Delta(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \tag{1.11}$$

Dacă n este impar atunci $\Delta^*(j\omega) = -\overline{\Delta}(j\omega)$ și din (1.10) rezultă

$$\Delta_2(j\omega) = 2\alpha_1\Delta(j\omega) - 2j\omega \operatorname{Re}\Delta(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \tag{1.12}$$

Raționînd ca și în cazul lui $\Delta_1(s)$ se trage concluzia că $\Delta_2(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian.

Polinoamele $\Delta_1(s)$ și $\Delta_2(s)$ pot fi utilizate pentru a studia natura polinomului $\Delta(s)$.

În primul caz se utilizează $\Delta_2(s)$, care este hurwitzian dacă și numai dacă $\Delta(s)$ este hurtwitzian. Pentru a verifica dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian se formează un șir de polinoame $\Delta_2(s)$, începînd cu $\Delta(s)$, după regula precizată prin (1.6), pînă se ajunge la un polinom de gradul 2. Pentru acesta se poate verifica foarte ușor dacă este sau nu hurwitzian. Dacă este hurwitzian atunci și polinomul precedent, de gradul 3, este hurwitzian. De aici rezultă că și polinomul de gradul 4 este hurwitzian ș.a.m.d., rezultînd respectiv că $\Delta(s)$ este hurwitzian.

În al doilea caz se utilizează $\Delta_1(s)$, cu ajutorul căruia se poate demonstra criteriul Hurwitz.

Fie matricea pătratică de ordinul n

$$H_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

numită *matricea Hurwitz* asociată polinomului $\Delta(s)$, în care pe diagonala principală apar coeficienţii lui $\Delta(s)$, începînd cu α_1, în succesiunea lor naturală şi $\alpha_k = 0$ pentru toţi $k > n$.

Teorema 5 (Hurwitz). O condiţie necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca

$$\det H_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.14}$$

D. Dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian atunci $\frac{1}{2}\Delta_1(s)$ este de asemenea hurwitzian. Matricea Hurwitz asociată acestui polinom are forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha\alpha_2 & \alpha\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha & 1 & \dots \\ \alpha\alpha_4 & \alpha\alpha_3 + \alpha_4 & \alpha\alpha_2 & \alpha\alpha_1 + \alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Minorii principali diagonali ai acestei matrici sînt $m_1 = \alpha$, $m_2 = \alpha^2 \det H_1$, $m_3 = \alpha^3 \det H_2, \dots, m_n = \alpha^n \det H_{n-1}$, $m_{n+1} = \alpha^{n+1} \det H_n$.

Dacă se presupune că *teorema 5* este adevărată pentru polinoame de gradul n atunci $m_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Întrucît $\frac{1}{2}\Delta_1(s)$ este hurwitzian, rezultă că condiţia (1.14) este necesară pentru polinoame de gradul $n + 1$. Condiţia (1.14) este şi suficientă deoarece $\det H_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ este determinată de $m_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Întrucît condiţia (1.14) este adevărată pentru polinoame de gradul n, rezultă că $\Delta(s)$ este hurwitzian, ceea ce implică faptul că $\Delta_1(s)$ este hurwitzian. Aşadar $m_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, a fost suficientă pentru aceasta.

Pînă aici am demonstrat că dacă (1.14) are loc pentru polinoame de gradul n atunci ea are loc şi pentru polinoame de gradul $n + 1$. Valabilitatea condiţiei (1.14) poate fi demonstrată direct pentru polinoame de gradul 2 şi 3. Prin inducţie matematică completă, prin trecerea de la gradul n la $n + 1$, rezultă că *teorema 5* este adevărată pentru polinoame de orice grad. ■

Exemplul 1.2. Fie sistemul automat de la *exemplul 1.1.* în care $G_F(s)$ are aceeași expresie și

$$G_R(s) = k + \frac{1}{\tau s},$$

este un regulator PI (proporțional-integral) cu $k \geqslant 0$ și $\tau > 0$.

Să se determine valorile lui k și τ pentru care sistemul automat este stabil IMEM.

Funcția de transfer a sistemului automat are în acest caz expresia

$$G_0(s) = \frac{4\left(ks + \dfrac{1}{\tau}\right)}{s^3 + 17\, s^2 + \left(\dfrac{1}{2} + 4k\right) s + \dfrac{4}{\tau}}.$$

Aplicînd polinomului polilor

$$\Delta(s) = s^3 + 17s^2 + \left(\frac{1}{2} + 4k\right) s + \frac{4}{\tau}$$

teorema 5 se obține

$$H_3 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4/\tau & 4k + 1/2 & 17 \\ 0 & 0 & 4/\tau \end{bmatrix},$$

din care, conform condiției (1.14), rezultă

$$\tau > \frac{8}{136k + 17}, \quad k \geqslant 0.$$

Un rezultat echivalent cu *teorema 5* este următorul.

Teorema 6 (Hermite). O condiție necesară și suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca matricea simetrică

$$\widetilde{H}_n = (\widetilde{h}_{ij})_{ij = 1,\, 2,\, \ldots,\, n}, \tag{1.15}$$

unde

$$\widetilde{h}_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{i-1} (-1)^{k+i-1}\, \alpha_k \alpha_{i+j-k-1}, & \alpha_0 = 1, \quad i \geqslant j, \quad i + j - \text{par}, \\ 0 & , \quad i + j - \text{impar}, \end{cases} \tag{1.16}$$

cu $\widetilde{h}_{ij} = \widetilde{h}_{ji}$, să fie pozitiv definită, adică

$$\det \widetilde{H}_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.17}$$

D. Se știe că $\widetilde{H}_n$ este pozitiv definită dacă și numai dacă toți minorii săi principali diagonali sînt pozitivi, respectiv dacă și numai dacă

(1.17) este adevărată (v. anexa D). Pentru a pune în evidență echivalența dintre (1.17) și (1.14) facem observația că minorii principali diagonali ai matricii

$$\widetilde{H}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_5 & \cdots \\ 0 & \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 & 0 & \alpha_1\alpha_4 - \alpha_5 & \vdots & \cdots \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 + \alpha_5 & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \alpha_1\alpha_4 - \alpha_5 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \alpha_5 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad (1.18)$$

au expresiile

$$\det \widetilde{H}_1 = \det H_1, \qquad (1.19)$$

$$\det \widetilde{H}_i = \det H_{i-1} \det H_i, \quad i = 2, \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Reamintim că dacă condiția (1.3) nu este satisfăcută atunci $\Delta(s)$ nu este huwitzian și în atare situație verificarea condițiilor (1.14) sau (1.17) nu mai are sens. Oricum, dacă (1.3) trebuie să aibă loc, este ușor de văzut, pe baza relațiilor dintre det H_{i-1} și det H_i, că numărul de determinanți care trebuie calculați conform condiției (1.14) se reduce la jumătate. Se poate formula astfel următorul rezultat, pentru a cărui demonstrație se poate consulta [G1].

Teorema 7 (Liénard-Chipart). O condiție necesară și suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca să aibă loc unul din următoarele patru șiruri de inegalități

$$\begin{aligned} &\alpha_n > 0,\ \alpha_{n-2} > 0, \ldots; && \det H_1 > 0,\ \det H_3 > 0, \ldots, \\ &\alpha_n > 0,\ \alpha_{n-2} > 0, \ldots; && \det H_2 > 0,\ \det H_4 > 0, \ldots, \\ &\alpha_n > 0,\ \alpha_{n-1} > 0,\ \alpha_{n-3} > 0, \ldots; && \det H_1 > 0,\ \det H_3 > 0, \ldots, \\ &\alpha_n > 0,\ \alpha_{n-1} > 0,\ \alpha_{n-3} > 0, \ldots; && \det H_2 > 0,\ \det H_4 > 0, \ldots . \end{aligned} \qquad (1.20)$$

1.1.3. Criteriul Routh

Un dezavantaj al *teoremelor 5—7* este acela că apelează la calculul unor determinanți de ordin ridicat. O posibilitate de evitare a unui astfel de calcul constă în utilizarea schemei Routh.

Pentru simplificarea expunerii vom considera $n = 3$ în (1.2) şi (1.13). Este uşor de verificat că

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/\alpha_1 & -\alpha_1/(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \\ 0 & 1 & \alpha_1^2/(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{21} & 0 \\ r_{13} & r_{22} & r_{31} \end{bmatrix},$$

unde $r_{11} = \det H_1$, $r_{21} = \det H_2/\det H_1$, $r_{31} = \det H_3/\det H_2$.

Generalizînd rezultatul de mai sus se scrie

$$H_n \cdot S = R, \tag{1.21}$$

unde H_n este matricea Hurwitz (1.13) asociată polinomului (1.2) şi S, R sînt matrici de ordinul n triunghiulare (ca în cazul $n = 3$), respectiv superior şi inferior. Luînd în considerare minorii principali diagonali din (1.21) se pot deduce relaţiile:

$$r_{11} = \det H_1, \quad r_{i1} = \det H_i/\det H_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{1.22}$$

Aceste valori pot fi calculate, făcînd uz numai de minori de ordinul 2, cu ajutorul *schemei Routh:*

$$\begin{array}{llllll}
r_{01} & r_{02} & r_{03} \cdots & & & \cdots \\
r_{11} & r_{12} & r_{13} \cdots & & & \cdots \\
r_{21} & r_{22} & r_{23} \cdots & & & \cdots \\
\cdots & & & & & \cdots \\
r_{i-2\,1} & \cdots & & r_{i-2\,j} & r_{i-2\,j+1} & \cdots \\
r_{i-1\,1} & \cdots & & r_{i-1\,j} & r_{i-1\,j+1} & \cdots \\
r_{i1} & & & r_{ij} & r_{ij+1} & \\
\cdots & & & & & \cdots,
\end{array} \tag{1.23}$$

unde

$$\begin{aligned} \{r_{01}, r_{02}, r_{03}, \ldots\} &= \{1, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots\}, \\ \{r_{11}, r_{12}, r_{13}, \ldots\} &= \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots\ldots\} \end{aligned} \tag{1.24}$$

şi

$$r_{ij} = -\frac{1}{r_{i-1\,1}} \begin{vmatrix} r_{i-2\,1} & r_{i-2\,j+1} \\ r_{i-1\,1} & r_{i-1\,j+1} \end{vmatrix}, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{1.25}$$

În conformitate cu (1.14) și (1.22) este evident adevărat următorul rezultat.

Teorema 8 (Routh). O condiție necesară și suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca toate elementele primei coloane din schema Routh (1.23), cu (1.24), (1.25), să fie pozitive.

Exemplul 1.3. Fie un sistem automat cu polinomul caracteristic

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 9s^2 + s + 4.$$

Să se studieze natura acestui polinom.

Se alcătuiește, în conformitate cu (1.23)—(1.25), următoarea schemă Routh

1	9	4
2	1	
$(2.9-1.1)/2 = 17/2$	$(2.4-0)/2 = 4$	
$(17/2-2.4).2/17 = 1/17$		
$(4/17-0).17 = 4.$		

Deoarece toți $r_{i1} > 0$ rezultă că polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian, ceea ce înseamnă că sistemul automat considerat este asimptotic stabil.

În încheierea acestui paragraf vom face cîteva observații privitoare la aplicarea efectivă a *teoremelor 5—8*.

a) Este posibil ca primul termen al polinomului analizat să aibă coeficientul diferit de 1, să presupunem $\alpha_0 > 0$. În această situație *teoremele 5—8* rămîn valabile dacă în (1.13) și (1.24) se înlocuiește 1 (care îl precede, pe coloane în (1.13), pe α_2) cu α_0, respectiv în (1.16) se consideră $\alpha_0 > 0$.

b) Dacă respectiv un det H_i, det $\widetilde{H}_i$ sau r_{i1} este nepozitiv atunci nu mai este necesar să se continue calculele, deoarece în atare situație $\Delta(s)$ nu este hurwitzian. Dacă se continuă aceste calcule este posibil să se determine cîte zerouri ale lui $\Delta(s)$ sînt cu parte reală pozitivă și cîte sînt cu parte reală negativă. De exemplu, dacă nici un r_{i1} nu este nul atunci cele două numere sînt respectiv n_p și $n - n_p$, unde n_p este numărul variațiilor de semn în prima coloană a schemei Routh (1.23), cu (1.24), (1.25). Dacă un r_{i1} este nul atunci trebuie avute în vedere următoarele două cazuri:

b.1) primul element al unei linii este nul;

b.2) toate elementele unei linii sînt nule.

În ambele cazuri polinomul $\Delta(s)$ este nehurwitzian și are zerouri pe axa imaginară sau în semiplanul complex drept. Pentru a discerne asupra acestor situații se procedează în felul următor.

În cazul b.1) se aplică schema Routh polinomului $v^n\Delta(v^{-1})$, cu $v = s^{-1}$, ale cărui zerouri sînt $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sau polinomului $(s + \alpha)\,\Delta(s)$, unde $\alpha > 0$ ($\alpha = 1$). Dacă în respectivele scheme Routh apar n_{p0} variații de semn în prima coloană atunci $\Delta(s)$ are n_{p0} zerouri cu parte reală nulă sau pozitivă și $n - n_{p0}$ zerouri cu parte reală negativă.

În cazul b.2) se înlocuiește s în $\Delta(s)$ cu $s + \varepsilon$, unde $|\varepsilon|$ este suficient de mic și se aplică schema Routh polinomului $\Delta(s + \varepsilon)$, în care termenii ε^i, $i \geqslant 2$, se neglijează. Dacă pentru $\varepsilon > 0$, oricît de mic, în prima coloană a schemei Routh nu este nici o variație de semn și pentru $\varepsilon < 0$ în respectiva coloană apar n_0 variații de semn atunci $\Delta(s)$ are n_0 zerouri pe axa imaginară și $n - n_0$ zerouri cu parte reală negativă. Dacă pentru $\varepsilon > 0$, oricît de mic, $\Delta(s + \varepsilon)$ nu este hurwitzian atunci și $\Delta(s)$ nu este hurwitzian.

1.1.4. Domenii parametrice de stabilitate

După cum se știe, coeficienții polinomului caracteristic sau ai polinomului polilor sînt valori numerice și constante de material care reprezintă parametrii fizici ai sistemului. Din motive foarte diferite (tehnice, economice etc.) ne interesează să știm între ce limite se pot modifica parametrii unui sistem fără ca prin aceasta sistemul să-și piardă calitățile de stabilitate asimptotică sau IMEM.

După cum s-a văzut în cadrul *exemplului 1.2* pentru sistemele pînă la ordinul 3, cu doi parametri variabili, determinarea domeniului parametric de stabilitate (asimptotică sau IMEM) se poate realiza utilizînd condiția (1.14).

În cazul sistemelor de ordin ridicat se pune evident problema rezolvării unui sistem de n inecuații neliniare, ceea ce este în sine o problemă dificilă. Din acest motiv cercetările s-au orientat spre determinarea acelor valori ale parametrilor pentru care polinomul $\Delta(s)$ devine pentru prima oară nehurwitzian. Un polinom devine pentru prima oară nehurwitzian atunci cînd zerourile sale se deplasează în planul complex de la stînga la dreapta (în funcție de parametrii variabili) și cel puțin unul ajunge pe axa imaginară. Se poate arăta, [L1], că aceste valori se obțin prin rezolvarea, în raport cu parametrii variabili ai sistemului, a ecuațiilor critice

$$\alpha_n = 0, \tag{1.26}$$

$$\det H_{n-1} = 0. \tag{1.27}$$

Este evident că (1.26) atrage după sine faptul că $\Delta(s)$ are un zerou în originea planului complex şi reciproc. Pentru a justifica condiţia (1.27) vom apela la formula la Orlando, [B 2],

$$\det H_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j), \tag{1.28}$$

în care λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt zerourile polinomului $\Delta(s)$. Este uşor de observat că dacă λ_i şi λ_j sînt două rădăcini imaginar conjugate atunci $\lambda_i + \lambda_j = 0$ şi $\det H_{n-1} = 0$. Invers, dacă $\det H_{n-1} = 0$ atunci există λ_i, λ_j, cu $i \neq j$, astfel încît $\lambda_i + \lambda_j = 0$. De aici rezultă că λ_i, λ_j sînt imaginar conjugate.

Exemplul 1.4. Fie sistemul dinamic

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ b-1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Să se determine în planul (a, b) domeniul parametric de stabilitate asimptotică.

Pentru determinarea limitei domeniului de stabilitate asimptotică vom utiliza ecuaţiile critice (1.26), (1.27).

Polinomul caracteristic are expresia

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -(a+2) & 0 \\ 1 & s-1 & 3 \\ -(b-1) & -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^3 + s^2 + (a+3)\,s + (a+2)(3b-1).$$

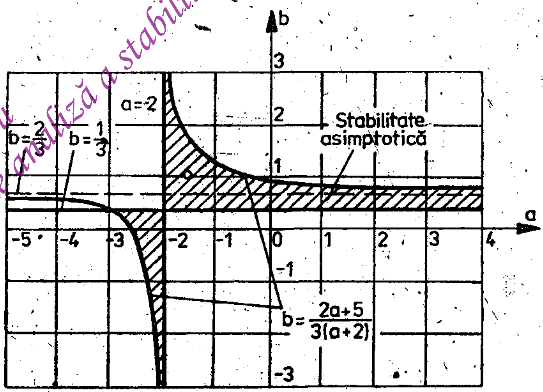


Fig. II.3. Domeniul parametric de stabilitate asimptotică la *exemplul 1.4.*

În conformitate cu (1.26), (1.27) putem scrie

$$\alpha_3 = (a + 2)(3b - 1) = 0$$

$$\det H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+2)(3b-1) & a+3 \end{vmatrix} = -3ab + 2a - 6b + 5 = 0,$$

din care rezultă funcțiile

$$a = -2, \quad b = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2a+5}{3(a+2)},$$

ale căror grafice sînt reprezentate în fig. II.3. Domeniul de stabilitate asimptotică este cel hașurat. Pentru determinarea lui se consideră cîte un punct, respectiv cîte o pereche (a, b) în fiecare din zonele determinate de graficele celor trei funcții, pentru care se verifică condițiile (1.3) și (1.14). De exemplu pentru $a = -1{,}5$ și $b = 1$ se obține $\Delta(s) = s^3 + s^2 + 1{,}5s + 1$ și

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det H_1 = 1 > 0, \quad \det H_2 = 1{,}5 > 0, \quad \det H_3 = 1{,}5 > 0.$$

În cazul în care numărul de parametri este mai mare ca doi determinarea domeniului parametric de stabilitate se poate face într-un spațiu corespunzător sau în mai multe plane parametrice.

Un alt procedeu de determinare a domeniului parametric de stabilitate este așa-numita *descompunere* $\mathfrak{D}$, [N1]. Vom expune concepția de bază a acestui procedeu considerînd un polinom de gradul n, $\Delta(s; a, b)$, care depinde de parametrii $a, b \in \mathbf{R}$.

Ecuația $\Delta(s; a, b) = 0$ este o funcție implicită a legăturii dintre rădăcinile λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, și planul parametrilor a, b. Dacă se înlocuiește $s = j\omega$ și se rezolvă ecuația $\Delta(j\omega; a, b) = 0$, $\omega \in \mathbf{R}$, în raport cu a, b se determină acele puncte ale planului (a, b) cărora le corespund zerouri imaginare ale polinomului $\Delta(s; a, b)$. Așadar $\Delta(j\omega; a, b) = 0$, $\omega \in \mathbf{R}$, este o curbă limită L în planul (a, b) care împarte acest plan în două regiuni. Pentru o anumită regiune $\Delta(s; a, b)$ este hurwitzian, iar pentru complementara ei este nehurwitzian. Determinarea efectivă a naturii fiecărei regiuni constă în trasarea curbei limită L (și anume punct cu punct pentru o bună precizie). Se consideră apoi cîte o pereche (a, b) în fiecare din regiunile determinate pentru care se verifică condițiile (1.3), (1.14) sau echivalentele lui (1.14).

În cazul în care $\Delta(s; a, b)$ depinde liniar de a, b și aceștia sînt independenți între ei, descompunerea $\mathfrak{D}$ se simplifică în ceea ce privește determinarea curbei limită L și a naturii regiunilor delimitate de ea, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Dacă $\Delta(s; a, b)$ depinde liniar de a și b atunci pentru $s = j\omega$ curba limită L satisface ecuația

$$\Delta(j\omega; a, b) = \Delta_1(j\omega)\,a + \Delta_2(j\omega)\,b + \Delta_3(j\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{1.29}$$

unde

$$\begin{aligned} \Delta_1(j\omega) &= u_1(\omega) + jv_1(\omega), \\ \Delta_2(j\omega) &= u_2(\omega) + jv_2(\omega), \\ \Delta_3(j\omega) &= u_3(\omega) + jv_3(\omega) \end{aligned} \tag{1.30}$$

și u_i, v_i, $i = 1, 2, 3$, sînt niște polinoame care se determină adecvat din $\Delta(j\omega; a, b)$ în conformitate cu (1.29).

Înlocuind (1.30) în (1.29) se obține sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} u_1(\omega)\,a + u_2(\omega)\,b + u_3(\omega) = 0 \\ v_1(\omega)\,a + v_2(\omega)\,b + v_3(\omega) = 0, \end{cases} \tag{1.31}$$

care sînt liniar independente, și deci pot fi utilizate pentru determinarea perechii (a, b), dacă determinanții

$$d = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \text{ și } d_1 = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} \text{ sau } d_2 = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix} \tag{1.32}$$

nu sînt simultan identic nuli. În aceste condiții din (1.31) se obține soluția

$$a(\omega) = \frac{d_1}{d} = \frac{u_2(\omega)v_3(\omega) - u_3(\omega)v_2(\omega)}{u_1(\omega)v_2(\omega) - u_2(\omega)v_1(\omega)}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{1.33}$$

$$b(\omega) = \frac{d_2}{d} = \frac{u_3(\omega)v_1(\omega) - u_1(\omega)v_3(\omega)}{u_1(\omega)v_2(\omega) - u_2(\omega)v_1(\omega)}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{1.34}$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei limită L și care pot fi utilizate pentru trasarea ei grafică. Ele reprezintă aplicația care transformă originea planului $\Delta(j\omega)$ în curba limită L din planul (a, b). Punctelor de pe curba L le corespund rădăcini ale ecuației (1.29) situate pe axa imaginară a planului s.

În general L este formată din diverse segmente de dreaptă sau de curbe. Pentru $\omega = \pm\infty$ și $\omega = 0$ din (1.33), (1.34) se obțin așa-numitele drepte singulare dacă $\Delta(s) = 0$ admite rădăcina nulă pentru unii a, b (adică pentru $a_n = 0$ în (1.1)) sau rădăcina la infinit pentru alți a, b (adică $a_0=0$ în (1.1)). Dreptele singulare pot fi așadar determinate foarte ușor în planul (a,b) utilizînd condițiile $a_n = 0$ și a_0 0 (dacă a_n și a_0 depind de a, b).

Pentru determinarea domeniului parametric de stabilitate (asimptotică sau IMEM) se utilizează *regula lui Nejmark*. Pentru aceasta se folosește determinantul d din (1.32) care pentru $\omega \in \mathbf{R}$ poate lua valori mai mici sau mai mari ca zero. Dacă pentru un interval $[\omega_1, \ \omega_2]$ avem $d > 0$, respectiv $d < 0$, atunci porțiunea corespunzătoare a curbei limită L se hașurează la stînga, respectiv la dreapta, cînd aceasta este parcursă pentru ω crescător. Întrucît d este în orice caz o funcție impară de ω, rezultă că atunci cînd ω parcurge mulțimea $\mathbf{R}$, curba L va ieși în evidență prin hașurul dublu situat pe o singură parte a sa. Curba L împarte planul în două regiuni. Domeniul de stabilitate se determină prin verificarea condițiilor (1.3), (1.14) pentru puncte interioare sau exterioare. Dacă anumite porțiuni de curbe sau drepte au rămas nehașurate, se poate sonda natura regiunii respective dînd valori corespunzătoare parametrilor a, b și verificînd aceleași condiții (1.3), (1.14).

Exemplul 1.5. Fie sistemul cu polinomul polilor

$$\Delta(s) = s^4 + s^3 + (a + b)\, s^2 + (a - b)\, s + c; \ a > 0, \ b > 0, \ c > 0.$$

Se cere să se determine domeniul parametric de stabilitate IMEM în planul $(a, \ b)$ pentru $c = 2$.

Pentru $s = j\omega$ din $\Delta\,(s;\, a,b)$ se obține sistemul

$$\begin{cases} \omega^2 a + \omega^2 b = \omega^4 + 2 \\ \omega a - \omega b = \omega^3 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu a, b rezultă

$$\begin{cases} a = \dfrac{\omega^4 + 1}{\omega^2} \\ \\ b = \dfrac{1}{\omega^2}, \qquad \omega \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Prin eliminarea lui ω^2 între aceste ecuații se obține ecuația curbei limită L, de forma

$$a = \frac{b^2 + 1}{b}, \quad \text{cu } a > 0, \quad b > 0,$$

al cărei grafic este reprezentat în fig. II.4, *a*. Pe de altă parte

$$d = \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega^2 \\ \omega & -\omega \end{vmatrix} = -2\omega^3, \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Aplicînd regula lui Nejmark pentru $\omega \in (-\infty, \ 0]$ avem $d \geqslant 0$ și curba L se hașurează la stînga (deasupra); pentru $\omega \in [0, \ +\infty)$, avem $d \leqslant 0$ și curba L se hașurează la dreapta (tot deasupra).

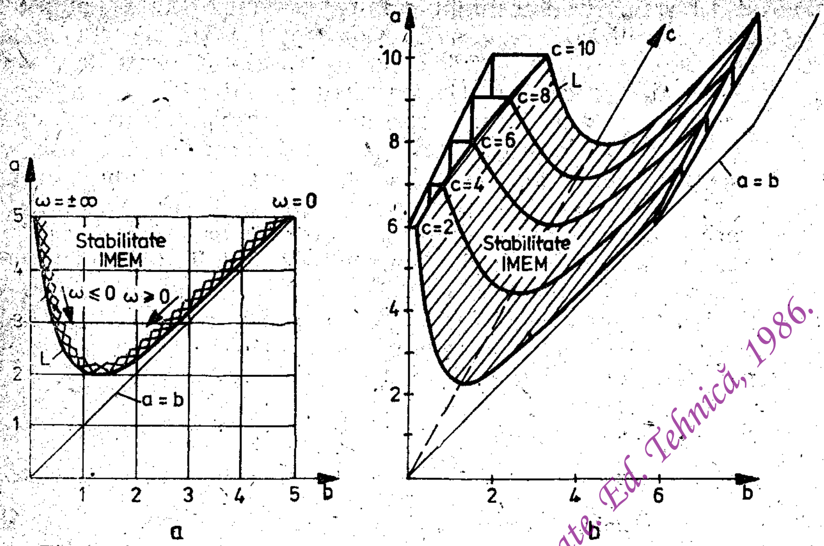


Fig. II.4. Domeniul parametric de stabilitate IMEM la *exemplul 1.5*: *a)* $c = 2$, *b)* $c \in [2,\ 10]$.

Domeniul parametric de stabilitate IMEM este uşor de determinat deoarece utilizînd (1.3) rezultă $a + b > 0$ şi $a - b > 0$.

Dacă ne interesează şi influenţa coeficientului $c > 0$, se ţine seama la determinarea domeniului de stabilitate şi de al treilea parametru. După calcule similare cu cele mai de sus se obţine ecuaţia suprafeţei limită, de forma

$$a = b + \frac{c}{2b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

a cărei reprezentare grafică este dată, în perspectivă, în fig. II.4, *b*.

După cum s-a arătat la I.6.4.2, gradul de stabilitate şi rezerva de stabilitate au o importanţă deosebită pentru funcţionarea normală a unui sistem automat. Este de la sine înţeles că la alegerea parametrilor unui sistem trebuie să se considere şi acest punct de vedere. De aceea este foarte indicat să se facă o parametrizare, în funcţie de rezerva de stabilitate $\alpha_{min} \geqslant 0$, a curbelor din planul $(a,\ b)$. Aceste curbe nu mai sînt o imagine a axei imaginare din planul s, ci a dreptei $\operatorname{Re} s = -\alpha_{min}$ din respectivul plan. Şi în acest caz se poate aplica descompunerea 𝔇 şi anume polinomului $\Delta(s - \alpha_{min};\ a,\ b)$. Vom ilustra modul de rezolvare a unei astfel de probleme cu ajutorul următorului exemplu.

Exemplul 1.6. Fie sistemul automat cu polinomul polilor

$$\Delta(s) = s^3 + as^2 + bs + 1.$$

Se cere să se determine domeniile parametrice corespunzătoare rezervelor de stabilitate $\alpha_{min} = 0$, $\alpha_{min} = 0{,}2$ și $\alpha_{min} = 0{,}4$.

Pentru $s = j\omega$ din $\Delta(s - \alpha_{min};\ a,\ b) = 0$, procedînd ca la *exemplul 1.5* se obțin ecuațiile

$$\begin{cases} a = \dfrac{2\alpha_{min}^3 + 2\alpha_{min}\,\omega^2 + 1}{\omega^2 + \alpha_{min}^2} \\[2ex] b = \dfrac{2\alpha_{min} + (\omega^2 + \alpha_{min}^2)}{\omega^2 + \alpha_{min}^2}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

la care se adaugă dreapta singulară

$$b = \frac{1}{\alpha_{min}} - \alpha_{min}^2 + \alpha_{min}a; \quad \alpha_{min} \neq 0.$$

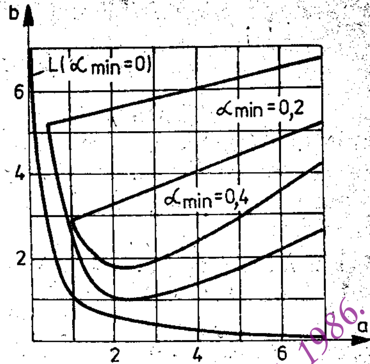


Fig. II.5. Domenii parametrice pentru diferite rezerve de stabilitate la *exemplul 1.6*.

Aceasta se obține prin anularea termenului liber al polinomului $\Delta(j\omega - \alpha_{min};\ a,\ b)$.

Imaginea grafică a domeniilor cerute este redată în fig. II.5. Este vizibil faptul că pe măsură ce rezerva de stabilitate crește domeniul parametric corespunzător se micșorează.

1.1.5. Invarianța proprietății Hurwitz

Într-o mare varietate de aplicații, proiectarea sistemelor automate se bazează pe cunoașterea modelului matematic. Este posibil ca în unele situații valorile reale ale coeficienților polinomului caracteristic sau ale polinomului polilor să difere, datorită erorilor de determinare, de cele ale modelului matematic. De exemplu, dacă la determinarea experimentală a elementelor matricii A a sistemului erorile relative de apreciere se situează în zona de toleranță de $\pm 10\%$ atunci unii dintre coeficienții polinomului caracteristic corespunzător pot fi afectați de erori relative mai mari ca 100%. În consecință este de mare interes de a determina intervalele maxime, centrate pe valorile nominale, de variație a coeficienților unui polinom pentru care acesta își conservă proprietatea de a fi hurwitzian [B3].

Se consideră polinomul (1.2) hurwitzian. Pentru a evidenția maniera diferită de perturbare a coeficienților α_i, $i = 1, 2, ..., n$, se consideră o mulțime de ponderi nenegative p_i, $\bar{p}_i$, $i = 1, 2, ..., n$. În aceste condiții se pot defini variațiile admisibile ale coeficienților după cum urmează.

Pentru orice $\varepsilon > 0$, polinomul

$$\Delta_\varepsilon(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + ... + \beta_{n-1}s + \beta_n, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{1.35}$$

se numeşte *ε-admisibil* dacă coeficienţii β_i satisfac condiţiile

$$\alpha_i - p_i\varepsilon < \beta_i < \alpha_i + \bar{p}_i\varepsilon, \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.36}$$

Fie P_ε mulţimea tuturor polinoamelor ε-admisibile asociate polinomului $\Delta(s)$. Se caută cea mai mare valoare a lui ε, adică ε_{max}, pentru care toate polinoamele din P_ε sînt hurwitziene. În aceste condiţii valoarea ε_{max} poate fi considerată ca o măsură a *robusteţii* sistemului respectiv.

Fie $H_n(\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_1)$ matricea Hurwitz asociată polinomului $\Delta_\varepsilon(s)$. Se definesc matricile

$$\begin{aligned} Q_1(\varepsilon) = H_n(&\alpha_n + \bar{p}_n\varepsilon,\ \alpha_{n-1} + \bar{p}_{n-1}\varepsilon,\ \alpha_{n-2} - p_{n-2}\varepsilon,\ \alpha_{n-3} - p_{n-3}\varepsilon,\\ &\alpha_{n-4} + \bar{p}_{n-4}\varepsilon,\ \alpha_{n-5} + \bar{p}_{n-5}\varepsilon,\ \alpha_{n-6} - p_{n-6}\varepsilon,\ \alpha_{n-7} - p_{n-7}\varepsilon, \ldots), \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} Q_2(\varepsilon) = H_n(&\alpha_n - p_n\varepsilon,\ \alpha_{n-1} - p_{n-1}\varepsilon,\ \alpha_{n-2} + \bar{p}_{n-2}\varepsilon,\ \alpha_{n-3} + \bar{p}_{n-3}\varepsilon,\\ &\alpha_{n-4} - p_{n-4}\varepsilon,\ \alpha_{n-5} - p_{n-5}\varepsilon,\ \alpha_{n-6} + \bar{p}_{n-6}\varepsilon,\ \alpha_{n-7} + \bar{p}_{n-7}\varepsilon, \ldots), \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} Q_3(\varepsilon) = H_n(&\alpha_n - p_n\varepsilon,\ \alpha_{n-1} + \bar{p}_{n-1}\varepsilon,\ \alpha_{n-2} + \bar{p}_{n-2}\varepsilon,\ \alpha_{n-3} - p_{n-3}\varepsilon,\\ &\alpha_{n-4} - p_{n-4}\varepsilon,\ \alpha_{n-5} + \bar{p}_{n-5}\varepsilon,\ \alpha_{n-6} + \bar{p}_{n-6}\varepsilon,\ \alpha_{n-7} - p_{n-7}\varepsilon, \ldots), \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} Q_4(\varepsilon) = H_n(&\alpha_n + \bar{p}_n\varepsilon,\ \alpha_{n-1} - p_{n-1}\varepsilon,\ \alpha_{n-2} - p_{n-2}\varepsilon,\ \alpha_{n-3} + \bar{p}_{n-3}\varepsilon,\\ &\alpha_{n-4} + \bar{p}_{n-4}\varepsilon,\ \alpha_{n-5} - p_{n-5}\varepsilon,\ \alpha_{n-6} - p_{n-6}\varepsilon,\ \alpha_{n-7} + \bar{p}_{n-7}\varepsilon, \ldots). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Se notează cu $q_{ij}(\varepsilon)$ minorul principal diagonal de ordinul j al matricii $Q_i(\varepsilon)$ şi cu

$$\varepsilon_i^* = \min\{\varepsilon \geqslant 0;\ \text{există } j \leqslant n \text{ cu } q_{ij}(\varepsilon) \leqslant 0\}. \tag{1.41}$$

În aceste condiţii $\varepsilon_{max} = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*\}$. Pentru demonstraţia acestei afirmaţii se poate consulta [B3].

Exemplul 1.7. [B 3]. Fie un sistem automat cu polinomul caracteristic

$$\Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 3.$$

în care coeficienţii sînt afectaţi de erori în mod uniform (adică $p_i = \bar{p}_i = 1$, $i = 1,2,3,4$). Se cere să se determine ε_{max}.

În conformitate cu (1.37) — (1.40) putem scrie

$$Q_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 5-\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 8+\varepsilon & 8-\varepsilon & 5-\varepsilon & 1 \\ 0 & 3+\varepsilon & 8+\varepsilon & 8-\varepsilon, \\ 0 & 0 & 0 & 3+\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$Q_2(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 5+\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 8-\varepsilon & 8+\varepsilon & 5+\varepsilon & 1 \\ 0 & 3-\varepsilon & 8-\varepsilon & 8+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 3-\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$Q_3(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 5-\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 8+\varepsilon & 8+\varepsilon & 5-\varepsilon & 1 \\ 0 & 3-\varepsilon & 8+\varepsilon & 8+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 3-\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$Q_4(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 5+\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 8-\varepsilon & 8-\varepsilon & 5+\varepsilon & 1 \\ 0 & 3+\varepsilon & 8-\varepsilon & 8-\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 3+\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Condiţiile de pozitivitate a minorilor principali diagonali ai matricilor $Q_i(\varepsilon)$, $i = 1,2,3,4$, conduc la următoarele inegalităţi

$$\begin{array}{llll} Q_1(\varepsilon): & \varepsilon < 5, & \varepsilon < 8, & \varepsilon^2 - 75\varepsilon + 181 > 0, \\ Q_2(\varepsilon) & \varepsilon < 3, & \varepsilon < 8, & \varepsilon^2 + 75\varepsilon + 181 > 0, \\ Q_3(\varepsilon): & \varepsilon < 3, & \varepsilon < 5, & -25\varepsilon^2 + 55\varepsilon + 181 > 0, \\ Q_4(\varepsilon): & \varepsilon < 8, & , & -25\varepsilon^2 - 55\varepsilon + 181 > 0. \end{array}$$

Utilizînd acum condiţia (1.41) se obţin $\varepsilon_1^* \approx 2{,}5$, $\varepsilon_2^* = 3$, $\varepsilon_3^* = 3$, $\varepsilon_4^* \approx 1{,}81$. Aşadar $\varepsilon_{max} \approx 1{,}81$.

1.1.6. Stabilitatea structurală a sistemelor automate

La I.6.4.2 s-a definit noţiunea de stabilitate structurală. În opoziţie cu această proprietate, se spune că un sistem este *structural instabil* dacă el este instabil pentru orice valori admisibile ale parametrilor săi. Spre deosebire de cazul sistemelor structural instabile, un sistem structural stabil are proprietatea că domeniul său parametric de stabilitate (asimptotică sau IMEM) nu este vid.

În precedentele două paragrafe s-a arătat modul în care se poate determina domeniul parametric de stabilitate al unui sistem oarecare. După cum s-a văzut, rezolvarea acestei probleme pentru sisteme de ordin superior şi pentru un număr ridicat de parametri implică un efort de calcul considerabil. Este important în atare situaţii, înainte de orice calcule, să ne punem, în mod natural întrebarea dacă sistemul analizat poate fi structural stabil, respectiv dacă admite un domeniu parametric de stabilitate nevid. Un răspuns efectiv la această întrebare este semnificativ în special pentru proiectantul de sisteme automate, deoarece, după cum se va vedea mai departe acesta poate constitui un ghid util în alegerea tipului de regulator care asigură stabilitatea structurală a sistemului automat.

Pentru un sistem automat monovariabil (cu o mărime prescrisă, o mărime reglată şi eventual o perturbaţie), primul pas în rezolvarea temei de proiectare constă în alegerea *dispozitivului de reglare*, format dintr-un traductor, un element de prescriere, un comparator, un regulator, şi un *element de execuţie* — fig. II.6, *a*. Tipul de traductor şi elementul de execuţie se aleg în funcţie de instalaţia automatizată (v. şi exemplele de la I.1.4.7 şi I.1.4.8). În ceea ce priveşte alegerea regulatorului, experienţa acumulată pînă în prezent indică pentru fiecare temă de proiectare, în funcţie de nivelul tehnic atins, tipurile cele mai potrivite de regulatoare. Problema esenţială care rămîne de rezolvat este aceea a alegeri parametrilor de acordare ai regulatorului astfel încît sistemul automat să realizeze performanţele impuse.

În mod obişnuit traductorul nu introduce întîrzieri, astfel că funcţionarea sa se caracterizeză printr-o funcţie de transfer egală cu o constantă (sensibilitatea traductorului). În aceste condiţii respectiva constantă, ca şi funcţia de transfer a elementului de execuţie, se includ în ceea ce s-a numit *partea fixată a sistemului*. Se ajunge astfel la schema bloc structurală standard din fig. II.6, *b* (evident y şi w diferă numai prin dimensiuni în comparaţie cu omoloagele lor din fig. II.6, *a*).

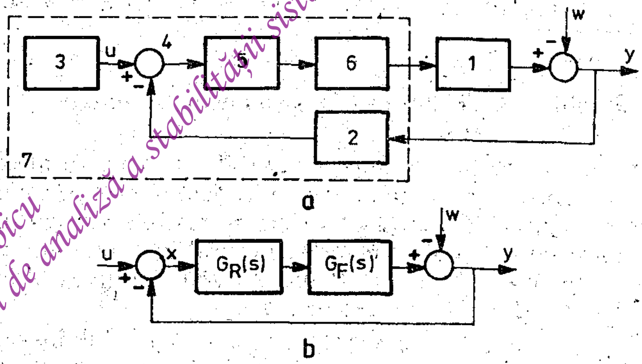


Fig. II.6. *a* — Structura unui sistem automat monovariabil: *u* — mărimea prescrisă; *y* — mărimea reglată; *w* — perturbaţia; *1* — instalaţia automatizată; *2* — traductorul; *3* — elementul de prescriere; *4* — comparatorul; *5* — regulatorul (eventual include *3* şi *4*); *6* — elementul de execuţie; *7* — dispozitivul de automatizare. *b* — Schema bloc structurală standard a unui sistem automat continuu în timp: *F* — partea fixată; *R* — regulatorul.

Relaţia intrare-ieşire, conform schemei din fig. II.6, *b*, are expresia

$$Y(s) = G_0(s)\,U(s) - G_{0w}(s)\,W(s), \tag{1.42}$$

în care

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{1.43}$$

este funcţia de transfer a sistemului închis în raport cu mărimea prescrisă;

$$G_{0w}(s) = \frac{1}{1 + G(s)} \tag{1.44}$$

este funcţia de transfer a sistemului închis în raport cu perturbaţia şi

$$G(s) = G_R(s)\,G_F(s) \tag{1.45}$$

este funcţia de transfer a sistemului deschis.

Examinînd expresiile (1.43) şi (1.44) se desprinde concluzia că stabilitatea IMEM a sistemului, atît în raport cu $U(s)$ cît şi cu $W(s)$, depinde de repartiţia în planul complex a rădăcinilor *ecuaţiei caracteristice intrare-ieşire* a sistemului automat

$$1 + G(s) = 0. \tag{1.46}$$

Fie

$$G(s) = K\,\frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{1.47}$$

în care K este factorul de amplificare al sistemului deschis, $Q(s)$ — un polinom de grad $m \geqslant 0$ şi $P(s)$ — un polinom de grad $n > m$. Se presupune că $P(s)$ şi $Q(s)$ sînt relativ prime între ele. Vom da în continuare, fără demonstraţie, următorul rezultat privitor la stabilitatea structurală a unui sistem automat monovariabil, [A 3, 4].

Teorema 9 (Aizerman-Gantmacher). Fie $Q(s)$ hurwitzian şi $P(s)$ cu factorizarea

$$P(s) = s^p \prod_1^q (a_i s^2 + 1) \prod_1^r (b_j s - 1)\,R(s), \tag{1.48}$$

unde $R(s)$ este un polinom hurwitzian de grad $n - \rho$, cu $\rho = p + 2q + r$, şi $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $b_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* şi (1.47) să fie structural stabil (IMEM) este satisfacerea următoarelor inegalităţi:

1° $p + r \leqslant m + 1$

2° m, n şi q conform tabelului

	$m = 0$	m — par	m — impar
ρ — par	$n > 2\rho$	$m + n > 2\rho - 1$	$m + n > 2(\rho - 1)$
ρ — impar	$n > 2(\rho - 1)$	$m + n > 2(\rho - 1)$	$m + n > 2\rho - 1$

Exemplul 1.8. Se consideră podul rulant din fig. I.7, cu modelul matematic (I.1.66), (I.1.67) şi cu funcţia de transfer (I.1.69). Utilizînd un motor electric de curent continuu, prevăzut cu reglaj automat de turaţie şi un reductor mecanic adecvat, se cere să se determine tipul de regulator care asigură stabilitatea structurală (IMEM) a sistemului automat de poziţionare a apucătorului.

Dacă se foloseşte pentru acţionare un motor electric de curent continuu prevăzut cu reglaj automat de turaţie şi cu un reductor mecanic de turaţie adecvat atunci acest ansamblu poate fi aproximat satisfăcător, [B4], [F1], prin funcţia de transfer

$$G_M(s) = \frac{k_M}{T_M s + 1},$$

în care k_M şi T_M sînt constante cunoscute.

Pentru măsurarea poziţiei apucătorului se folosesc un traductor de poziţie cu care se măsoară poziţia căruciorului şi un traductor de unghi cu care se măsoară unghiul de oscilaţie al pendulului reprezentat de cablu şi apucător. Acest ansamblu de traductoare furnizează un semnal electric, proporţional cu poziţia apucătorului, care poate fi caracterizat prin factorul de sensibilitate k_t.

În aceste circumstanţe funcţia de transfer a părţii fixate a sistemului este

$$G_F(s) = k_t G_M(s)\, G_P(s) = \frac{k_t\, k_M\, k_P}{s^2(T_P^2 s^2 + 1)(T_M s + 1)},$$

în care $G_P(s)$ are expresia (I.1.69).

Vom alege, conform *teoremei* 9, tipul de regulator astfel încît sistemul cu reacţie inversă negativă să fie structural stabil (IMEM). Se observă că $p = 2$, $q = 1$, $r = 0$ şi $\rho = 4$.

Ţinînd seama de condiţia 1° se obţine $2 \leqslant m + 1$. Se alege $m = 1$. Conform condiţiei 2° rezultă $1 + n > 2(4 - 1)$. Se alege $n = 6$. Cum $G_F(s)$ este deja de ordinul 5 rezultă că funcţia de transfer a regulatorului poate fi de forma

$$G_R(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}, \quad \tau > 0, \quad T > 0.$$

Avînd în vedere că parametrii k_P, k_M, k_t, T_P şi T_M sînt daţi şi că numai τ şi T sînt acordabili, ne propunem să verificăm dacă regulatorul adoptat poate asigura stabilitatea structurală (IMEM) a sistemului automat. De exemplu pentru $m_c = 1000$ kg, $m_a = 4000$ kg, $l = 10$ m, $g = 10$ m/s², $k_M = 100$ N/V, $T_M = 1$ s şi $k_t = 1$ V/m, funcţia de transfer a sistemului deschis are forma

$$G(s) = G_R(s)\, G_F(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}\, \frac{0{,}1}{s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2}.$$

Polinomul polilor are expresia

$$\Delta(s) = Ts^6 + (T+1)s^5 + (5T+1)s^4 + 5(T+1)s^3 + 5s^2 + 0{,}1\tau s + 0{,}1.$$

Aplicînd schema Routh obținem

T	$5T+1$	5	$0{,}1$
$T+1$	$5(T+1)$	$0{,}1\tau$	
1	$5-\dfrac{0{,}1\tau T}{T+1}$	$0{,}1$	
$0{,}1\tau T$	$0{,}1(\tau - T - 1)$		
$a = 5 + \dfrac{T-\tau+1}{T} - \dfrac{0{,}1\tau T}{T+1}$	$0{,}1$		
$b = 0{,}1(\tau - T - 1) - \dfrac{0{,}01\tau T}{a}$			

Avînd în vedere că este dificilă utilizarea condițiilor $a > 0$ și $b > 0$ pentru determinarea domeniului parametric de stabilitate IMEM vom apela la *metoda descompunerii* $\mathfrak{D}$.

Înlocuind $s = j\omega$ în $\Delta(s) = 0$ și explicitînd pe τ și T se obțin următoarele ecuații parametrice ale curbei limită:

$$\begin{cases} \tau = -\dfrac{10}{\omega^2}(\omega^6 - 4\omega^4 - 5\omega^2 + 0{,}1), \\[2ex] T = \dfrac{\omega^4 - 5\omega^2 + 0{,}1}{\omega^4(\omega^2 - 5)}. \end{cases}$$

Întrucît trebuie să aibă loc și condițiile $\tau > 0$, $T > 0$, curba limită L se poate construi foarte ușor, fig. II.7.

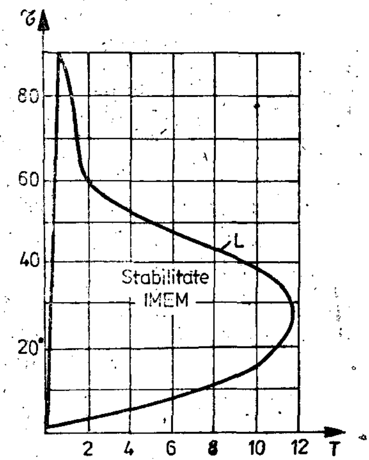


Fig. II.7. Domeniul parametric de stabilitate IMEM la *exemplul 1.8.*

1.1.7. Metoda locului rădăcinilor

Problema esențială care se rezolvă prin metoda locului rădăcinilor este aceea a determinării, sub formă grafică, a dependenței rădăcinilor ecuației caracteristice intrare-ieșire (1.46) a sistemului automat cu structura din fig. II.6, *b* de factorul de proporționalitate k al sistemului deschis, în condițiile în care funcția sa de transfer are forma

$$G(s) = G_R(s)\,G_F(s) = k\,\frac{M(s)}{N(s)}. \qquad (1.49)$$

Polinoamele $M(s)$ şi $N(s)$ sînt relativ prime între ele şi k este un parametru variabil.

În conformitate cu (1.46) şi (1.49) rezultă polinomul polilor sistemului automat

$$\Delta(s) = N(s) + kM(s), \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.50}$$

Rezultatul pe care il oferă metoda locului rădăcinilor este aşa-numitul *loc al rădăcinilor*. Acesta este locul geometric al zerourilor polinomului polilor $\Delta(s)$ (sau al rădăcinilor ecuaţiei caracteristice intrare-ieşire (1.46)) reprezentat grafic pentru $k \in \mathbf{R}_+$.

Exemplul 1.9. Se consideră un sistem automat de urmărire cu schema bloc structurală din fig. II. 6, *b* în care

$$G_R(s) = k_r, \quad G_F(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}.$$

Se cere să se determine locul rădăcinilor corespunzător acestui sistem.

Este uşor de văzut că ecuaţia caracteristică intrare-ieşire a sistemului automat are forma

$$Ts^2 + s + k = 0, \quad k + k_M k_r.$$

Aceasta are rădăcinile

$$s_{1\,2} = \begin{cases} \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4Tk}}{2T}, & 0 < k \leqslant \dfrac{1}{4T}, \\[2ex] \dfrac{-1 \pm \mathrm{j}\sqrt{4Tk-1}}{2T}, & k > \dfrac{1}{4T}. \end{cases}$$

Rezultă că pentru $k \in [0,\ 1/4\,T]$ locul rădăcinilor se află pe semiaxa reală negativă, cuprins între punctele $-1/T$ şi 0, iar pentru $(1/4\ T,\ +\infty)$ locul rădăcinilor este format de dreapta paralelă cu axa imaginară care trece prin punctul $(-1/2\ T,\ \mathrm{j}0)$. Imaginea locului rădăcinilor este redată în fig. II.8. Cînd parametrul k parcurge intervalul $[0,\ +\infty)$ locul rădăcinilor este parcurs în sensul indicat de săgeţi.

Privitor la stabilitate, fig. II.8 permite să se tragă concluzia că sistemul considerat este stabil IMEM pentru orice $k > 0$ şi că gradul său de stabilitate nu poate fi mai mare ca $\alpha = 1/2T$, oricare ar fi $k > 0$.

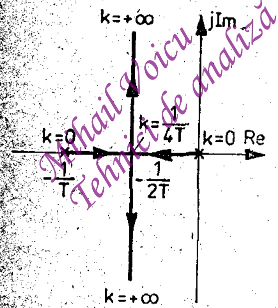


Fig. II.8. Locul rădăcinilor la *exemplul 1.9.*

Pentru a putea analiza proprietăţile geometrice generale ale locului rădăcinilor vom presupune că $M(s)$ şi $N(s)$ sînt factorizate după cum urmează:

$$M(s) = \prod_{1}^{m} (s - z_\alpha) \tag{1.51}$$

$$N(s) = \prod_{1}^{n} (s - p_\beta), \tag{1.52}$$

cu $m \leqslant n$ şi $z_\alpha \neq p_\beta$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, $\beta = 1, 2, \ldots, n$, şi cu menţiunea că z_α şi p_β sînt reale sau complexe; dacă z_a (sau p_b) este complex atunci există şi un $\bar{z}_a$ (sau $\bar{p}_b$).

În aceste circumstanţe ecuaţia caracteristică intrare-ieşire (1.46) are forma

$$k \frac{\prod_{1}^{m} (s - z_\alpha)}{\prod_{1}^{n} (s - p_\beta)} = -1, \quad s \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{R}_+. \tag{1.53}$$

Fie $s = Ae^{j\theta}$, $A \geqslant 0$, $\theta \in \mathbf{R}$ şi z_α, p_β cunoscuţi. Se pot defini următorii fazori

$$s - z_\alpha = A_{z\alpha} e^{j\theta_{z\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.54}$$

$$s - p_\beta = A_{p\beta} e^{j\theta_{p\beta}} \quad \beta = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.55}$$

Înlocuind (1.54), (1.55) în (1.53) se obţin următoarele două ecuaţii:

$$k \frac{\prod_{1}^{m} A_{z\alpha}}{\prod_{1}^{n} A_{p\beta}} = 1, \quad k \in \mathbf{R}_+, \tag{1.56}$$

$$\sum_{1}^{m} \theta_{z\alpha} - \sum_{1}^{n} \theta_{p\beta} = (2i + 1)\pi, \quad i \in \mathbf{R}. \tag{1.57}$$

Proprietatea geometrică esenţială a locului rădăcinilor este conţinută de ecuaţia (1.57), care este independentă de k. Conform ecuaţiei (1.57) se poate formula următorul enunţ: *s aparţine locului rădăcinilor dacă şi numai dacă suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în zerourile lui $G(s)$ şi vîrful în s minus suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în polii lui $G(s)$ şi vîrful în s este un multplu impar de π.* Această afirmaţie sugerează o posibilitate de trasare grafică rapidă a locului rădăcinilor pentru orice $G(s)$, dat în forma (1.49) cu (1.51), (1.52). Ecuaţia (1.56) explicitată sub forma

$$k = \frac{\prod_{1}^{n} A_{p\beta}}{\prod_{1}^{m} A_{z\alpha}}, \tag{1.58}$$

este, în această situaţie, foarte utilă pentru parametrizarea locului rădăcinilor după valorile lui k.

Pentru aplicarea expeditivă a ecuaţiei (1.53) la trasarea locului rădăcinilor se utilizează următoarele zece reguli.

Regula 1. Pentru $k = 0$ rădăcinile ecuaţiei (1.53) coincid cu polii lui $G(s)$, iar pentru $k = +\infty$, acestea coincid cu zerourile lui $G(s)$.

Într-adevăr, eliminînd numitorul în (1.53) şi înlocuind $k = 0$ se obţine $\prod_{1}^{n}(s - p_\beta) = 0$. De asemenea eliminînd numitorul în (1.53), împărţind rezultatul prin k şi făcînd apoi $k \to +\infty$ se obţine $\prod_{1}^{m}(s - z_\alpha) = 0$.

Din această regulă rezultă că pentru k crescător ramurile locului rădăcinilor pleacă din polii lui $G(s)$ şi ajung în zerourile lui $G(s)$. După cum se ştie, printre zerourile lui $G(s)$ se găseşte şi $|s| = +\infty$ ca zerou de multiplicitate $n-m$. În consecinţă $n-m$ din ramurile locului rădăcinilor ajung în punctul de la infinit pentru $k = +\infty$.

Regula 2. Locul rădăcinilor este simetric faţă de axa reală a planului s.

Într-adevăr, ecuaţia (1.53) este echivalentă cu o ecuaţie polinomială cu coeficienţi reali, ceea ce înseamnă că pentru orice $k \in \mathbf{R}_+$, rădăcinile ei sînt reale sau complex conjugate.

Regula 3. Un punct al axei reale aparţine locului rădăcinilor dacă şi numai dacă la dreapta sa, pe axa reală, se află un număr impar de zerouri şi de poli ai lui $G(s)$, fiecare considerat cu ordinul său de multiplicitate.

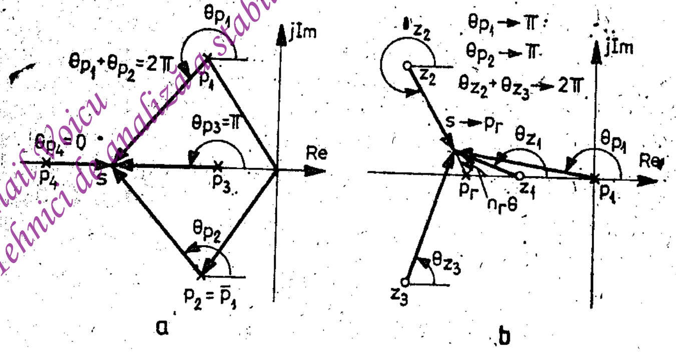


Fig. II.9. *a* — Locul rădăcinilor pe axa reală *(regula 3)*;
b — Unghiul locului rădăcinilor la plecarea dintr-un pol real *(regula 6)*.

Această regulă este o consecință directă a ecuației (1.57), fiind în fond o particularizare a ei pentru s situat pe axa reală. Dacă s, punct al locului rădăcinilor, este situat pe axa reală atunci contribuția în (1.57) a unei perechi de zerouri sau de poli complex conjugați este 2π—fig. II.9,*a*. Dacă la dreapta (la stînga) lui s se află un zerou sau un pol atunci contribuția corespunzătoare în (1.57) este $\pi(0)$. Urmează că s, situat pe axa reală, aparține locului rădăcinilor exact atunci cînd numărul de zerouri și de poli de la dreapta lui s este impar, deoarece numai astfel condiția (1.57) poate fi satisfăcută.

Regula 4. Asimptotele celor $n-m > 0$ ramuri ale locului rădăcinilor care ajung în punctul de la infinit pentru $k = +\infty$, se intersectează toate într-un punct al axei reale, numit *centru de greutate* al locului rădăcinilor, a cărui abscisă este

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{1}^{n} p_\beta - \sum_{1}^{m} z_\alpha\right), \quad n > m. \tag{1.59}$$

Direcțiile celor $n-m$ asimptote sînt

$$\theta_k = \frac{2i+1}{n-m}\pi, \quad n > m, \quad i = 0, 1, \ldots, n-m-1. \tag{1.60}$$

Pentru a justifica această regulă se scrie (1.53) sub forma

$$\frac{\prod_{1}^{n}(s-p_\beta)}{\prod_{1}^{m}(s-z_\alpha)} + k = 0, \quad n > m, \tag{1.61}$$

care pune în evidență faptul că pentru $k \to +\infty$ rezultă $|s| \to +\infty$.

Efectuînd împărțirea în primul termen din (1.61), pentru k suficient de mare restul acestei împărțiri poate fi neglijat, astfel că (1.61) este satisfăcător aproximată de următoarea ecuație polinomială

$$s^{n-m} + \left(\sum_{1}^{m} z_\alpha - \sum_{1}^{n} p_\beta\right)s^{n-m-1} + \ldots + k = 0, \quad n - m > 0. \tag{1.62}$$

Aceasta admite rădăcinile $s_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$, al căror centru de greutate situat pe axa reală are abscisa

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m}\sum_{1}^{n-m} s_i(k). \tag{1.63}$$

Ţinînd seama de faptul că

$$\sum_{1}^{n-m} s_i(k) = -\left(\sum_{1}^{m} z_\alpha - \sum_{1}^{n} p_\beta\right), \tag{1.64}$$

din (1.63) rezultă imediat (1.59).

Pentru a demonstra relaţia (1.60) vom reţine din (1.62), pentru k suficient de mare, numai primul şi ultimul termen, adică

$$s^{n-m} + k = 0, \quad n > m, \tag{1.65}$$

din care rezultă

$$s_i(k) = k^{\frac{1}{n-m}} \mathrm{e}^{\frac{2i+1}{n-m}\pi}, \quad i = 0, 1, \ldots, n - m - 1. \tag{1.66}$$

Pentru $k \to +\infty$ rezultă $|s_i(k)| \to +\infty$, dar cu argumentele specificate prin (1.60).

Regula 5. Dacă o porţiune a axei reale cuprinsă între două zerouri reale sau între doi poli reali ai lui $G(s)$ aparţine locului rădăcinilor atunci pe ea se află două ramuri distincte care, pentru o anumită valoare a lui k, au un punct comun. Acesta corespunde unei rădăcini duble şi se numeşte *punct de ramificare*. În cazul a doi poli reali, pentru k crescător, cele două ramuri părăsesc axa reală în punctul de ramificare. În cazul a două zerouri reale, pentru k crescător, cele două ramuri sînt continuarea pe axa reală a două ramuri care ajung pe ea în punctul de ramificare. Abscisele x ale punctelor de ramificare sînt rădăcini ale ecuaţiei

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_{1}^{n} \frac{1}{x - p_\beta} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.67}$$

Această regulă este o consecinţă a *regulii 1* şi a *regulii 3*.

Pentru a ajunge la ecuaţia (1.67) se porneşte de la faptul că ecuaţia $G(x) + 1 = 0$, unde x este abscisa punctului de ramificare, admite o rădăcină reală dublă, ceea ce implică $G'(x) = 0$. Din (1.49), cu (1.51), (1.52), prin logaritmare se obţine

$$\ln G(x) = \ln k + \sum_{1}^{m} \ln(x - z_\alpha) - \sum_{1}^{n} \ln(x - p_\beta).$$

Derivînd această expresie şi ţinînd seama de $G(x) = -1$ şi $G'(x) = 0$ se obţine (1.67).

Este posibilă și existența unor puncte de ramificare complexe. Acestea se determină ca rădăcini ale ecuației

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{s - z_\alpha} - \sum_{1}^{n} \frac{1}{s - p_\beta} = 0, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.68}$$

În general, într-un punct de ramificare s_* intră r ramuri și ies r ramuri ale locului rădăcinilor. Valoarea lui r se determină din condițiile

$$G(s_*) + 1 = 0, \quad G'(s_*) = 0, \ldots, \quad G^{(r-1)}(s_*) = 0, \quad G^{(r)}(s_*) \neq 0.$$

Regula 6. Dintr-un pol real, de multiplicitate n_r, al lui $G(s)$ pleacă exact n_r ramuri ale locului rădăcinilor. Unghiul dintre două ramuri alăturate este $2\pi/n_r$. Într-un zerou real, de multiplicitate m_r, al lui $G(s)$ ajung exact m_r ramuri ale locului rădăcinilor. Unghiul între două ramuri alăturate este $2\pi/m_r$.

Această regulă este o consecință a ecuației (1.57). Fie s un punct al locului rădăcinilor foarte apropiat de un pol real p_r, de multiplicitate n_r, al lui $G(s)$ — fig. II.9, *b*. Se știe că pentru $s \to p_r$ contribuția în (1.57) a zerourilor și polilor complex conjugați este un multiplu de 2π, în timp ce contribuția zerourilor și polilor reali este 0 pentru cei de la stînga și un multiplu de π pentru cei de la dreapta. Cum $n_r\theta$ este argumentul polului multiplu, rezultă că față de axa reală ramurile locului rădăcinilor care pleacă din p_r au fie unghiurile $\theta_i = \frac{1}{n_r} 2i\pi$, $i = 0, 1, \ldots, n_r - 1$, dacă numărul de zerouri și de poli reali de la dreapta este impar, fie $\theta_r = \frac{1}{n_r}(2i + 1)\pi$, $i = 0, 1, \ldots, n_r - 1$, dacă respectivul număr este par. În ambele situații unghiul dintre două ramuri alăturate este $2\pi/n_r$.

Justificarea este asemănătoare pentru cazul unui zerou real multiplu al lui $G(s)$.

Regula 7. Dintr-un pol complex p_b, de multiplicitate n_b, pleacă exact n_b ramuri ale locului rădăcinilor sub unghiurile

$$\theta_{bi} = \frac{1}{n_b}\left[\sum_{\alpha=1}^{m} \arg(p_b - z_\alpha) - \sum_{\substack{\beta=1 \\ p_\beta \neq p_b}}^{n} \arg(p_b - p_\beta) - (2i + 1)\pi\right],$$

$$i = 0, 1, \ldots, n_b - 1. \tag{1.69}$$

Într-un zerou complex z_a, de multiplicitate m_a, al lui $G(s)$ intră exact m_a ramuri ale locului rădăcinilor sub unghiurile

$$\theta_{ai} = -\frac{1}{m_a}\left[\sum_{\substack{\alpha=1\\ z_\alpha \neq z_a}}^{m} \arg(z_a - z_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{n} \arg(z_a - p_\beta) - (2i+1)\pi\right],$$

$$i_a = 0, 1, .., m_a - 1. \tag{1.70}$$

Pentru demonstrație, care se bazează pe ecuația (1.57), se procedează ca la *regula 6*.

Regula 8. Dacă într-un punct de ramificare ajung r ramuri și din el pleacă r ramuri (în total $2r$ ramuri) atunci unghiul dintre două ramuri alăturate este π/r. În cazul unui punct de ramificare situat între doi poli reali sau între două zerouri reale avem $r = 2$, ceea ce înseamnă că unghiul dintre două ramuri alăturate este $\pi/2$.

Această regulă este o consecință imediată a ecuației (1.57). Demonstrația urmează după modelul de la *regula 6*.

Regula 9. Punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară și valoarea corespunzătoare a lui k se obțin prin rezolvarea ecuației

$$N(j\omega) + kM(j\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{1.71}$$

în care necunoscutele sînt ω și k.

Ecuația (1.71) s-a obținut din (1.50) înlocuindu-se $s = j\omega$.

O altă posibilitate de determinare mai întîi a lui k și apoi a lui ω o oferă schema Routh. Anulînd elementele penultimei linii se obțin valorile lui k pentru care locul rădăcinilor intersectează axa imaginară. Dacă elementele antepenultimei linii sînt $a(k)$ și $b(k)$ atunci punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară sînt rădăcini ale ecuației

$$a(k)s^2 + b(k) = 0. \tag{1.72}$$

Regula 10. Locul rădăcinilor se parametrizează după valorile lui k cu ajutorul relației (1.58). În acest scop, pentru diverse puncte ale locului rădăcinilor, se măsoară direct pe grafic modulele A_{z_α}, $\alpha = 1, 2, ..., m$, și $A_{p\beta}$, $\beta = 1, 2, ..., n$, și se înlocuiesc în (1.58), din care rezultă apoi valoarea lui k.

Exemplul 1.10. Se consideră problema de la *exemplul 1.9*, în care $G_F(s)$ este neschimbat și $G_R(s) = k_r(\tau s + 1)$ — un regulator PD (proporțional-derivativ). Se cere să se determine locul rădăcinilor sistemului automat de urmărire.

Funcția de transfer a sistemului deschis are forma

$$G(s) = k\,\frac{s+\dfrac{1}{\tau}}{s\left(s+\dfrac{1}{T}\right)}, \quad k = k_r k_M \frac{\tau}{T}.$$

Sistemul deschis are un zerou $z_1 = -1/\tau$ și doi poli $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T$. O ramură a locului rădăcinilor ajunge în punctul de la infinit de-a lungul semiaxei reale negative.

Este necesar să se considere două cazuri.

a) $0 < \tau < T$, ceea ce înseamnă $z_1 < p_2$, fig. II.10, a.

Segmentele dintre p_1, p_2 și z_1, $-\infty$ aparțin locului rădăcinilor. Pe fiecare segment se află cîte un punct de ramificare. Abscisele respective sînt rădăcini ale ecuației

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{\tau}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\dfrac{1}{T}} = 0.$$

Rezolvînd această ecuație se obține

$$p_1 < x_1 = -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{T}\right)} < 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{T}\right)} < z_1.$$

Unghiul dintre două ramuri succesive din x_1 sau din x_2 este $\pi/2$.

b) $\tau \geqslant T$, ceea ce înseamnă $p_2 \leqslant z_1 < p_1$, fig. II.10, *b*.

Locul rădăcinilor este format numai din segmentele dintre p_1, z_1 și p_2, $-\infty$.

Comparînd acum rezultatul din fig. II.8 cu cel din fig. II.10 se trage concluzia că utilizarea în cadrul sistemului automat de urmărire a unui regulator PD poate avea un efect favorabil asupra gradului de stabilitate al sistemului, valoarea maximă posibilă a acestui grad fiind $|x_2|$ în cazul $\tau = T$, sau $1/\tau$ în cazul $\tau > T$ și nelimitată în cazul $\tau = T$.

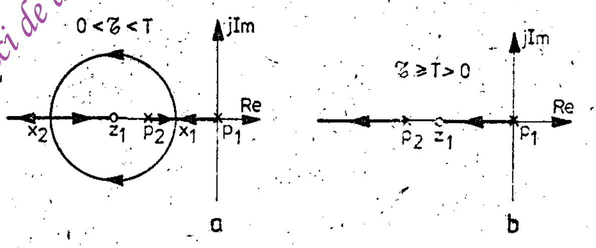


Fig. II.10. Locul rădăcinilor la *exemplul 1.10*.

Exemplul 1.11. Se consideră problema de la *exemplul 1.8* cu un regulator

$$G_R(s) = k_r \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$$

şi $G_F(s)$ neschimbat. Se ştie, fig. II.7, că pentru $T = 2$, $\tau = 10$ şi $k_r = 1$ sistemul automat de poziţionare a apucătorului podului rulant este stabil IMEM. Se cere să se determine locul rădăcinilor acestui sistem.

Funcţia de transfer a sistemului deschis are expresia

$$G(s) = G_R(s)\, G_F(s) = k \frac{s + 0,1}{s^2(s + 0,5)\,(s + 1)\,(s^2 + 5)}, \quad k = 0,5\, k_r.$$

Avem $z_1 = -0,1$, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = -0,5$, $p_4 = -1$, $p_{5,6} = \pm \mathrm{j}\sqrt{5}$.

Numărul de ramuri la infinit este $n - m = 6 - 1 = 5$. Segmentele cuprinse între p_3, z_1 şi p_4, $-\infty$ aparţin locului rădăcinilor.

Centrul de greutate al locului rădăcinilor are abscisa $-0,28$ şi direcţiile celor cinci asimptote sînt $\theta_i = \pi\,(2i + 1)/5$, $i = 0, \ldots, 4$.

Din polul real dublu $p_1 = p_2 = 0$ pleacă două ramuri tangente la axa imaginară care tind la asimptotele cu $\theta_0 = 36°$ şi $\theta_4 = 324°$. Din polii $p_5 = \mathrm{j}\sqrt{5}$ şi $p_6 = -\mathrm{j}\sqrt{5}$, pleacă cîte o ramură respectiv sub unghiurile $\theta_1 = 108°$ şi $\theta_3 = 252°$. Locul rădăcinilor, a cărui formă este dată în fig. II.11, nu are nici un punct de ramificare.

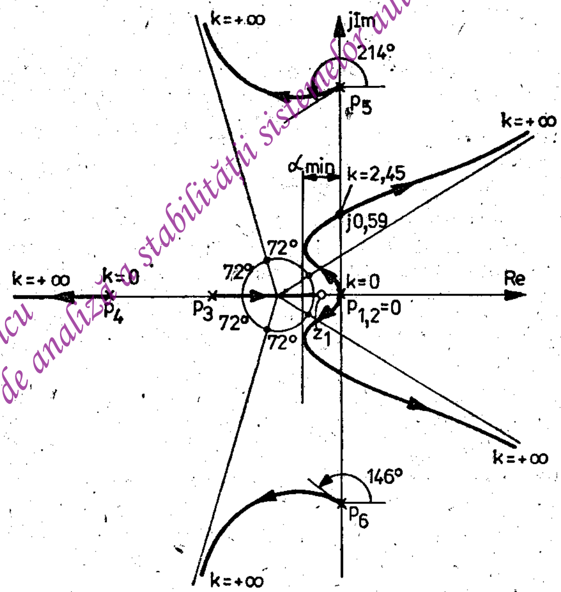


Fig. II.11. Locul rădăcinilor la *exemplul 1.11.*

Punctele de intersecţie cu axa imaginară se determină cu ajutorul ecuaţiei caracteristice intrare-ieşire.

$$s^6 + 1{,}5\, s^5 + 5{,}5\, s^4 + 7{,}5\, s^3 + 2{,}5\, s^2 + ks + 0{,}1\, k = 0,$$

în care se înlocuieşte $s = j\omega$. După calcule elementare rezultă sistemul de ecuaţii

$$-\,\omega^6 + 5{,}5\, \omega^4 - 2{,}5\, \omega^2 + 0{,}1\, k = 0$$

$$1{,}5\, \omega^5 - 7{,}5\, \omega^3 + k\omega = 0.$$

Rezolvînd acest sistem se obţin soluţiile $k = 0$, $\omega = 0$, $\omega = \pm\sqrt{5}$ şi $k = 2{,}45$, $\omega = \pm\, 0{,}59$. Întrucît $k = 0{,}5\, k_r$ rezultă că sistemul automat de poziţionare a apucătorului este stabil IMEM pentru $k_r \in (0,\ 4{,}9)$. Gradul de stabilitate IMEM nu poate depăşi o anumită valoare α_{max}. Este vizibil că pentru $k_r > 4{,}9$ sistemul devine instabil, în primul rînd datorită faptului că locul rădăcinilor are două ramuri care penetrează în semiplanul drept. Acest inconvenient este legat de tipul de regulator utilizat. După cum se va vedea la IV.2.1.3 prin utilizarea reacţiei după stare, este posibilă obţinerea unui sistem automat de poziţionare a apucătorului cu grad de stabilitate arbitrar.

1.1.8. Stabilizarea sistemelor automate

Prin viziunea globală asupra dependenţei zerourilor polinomului polilor de factorul de amplificare al sistemului deschis metoda locului rădăcinilor poate fi utilizată pentru stabilizarea IMEM a sistemelor automate monovariabile şi, mai mult, se pot realiza performanţele impuse acestuia, privitoare la răspunsul său indicial.

Vom arăta în continuare, cu ajutorul unui exemplu, care este efectul introducerii unui zerou, respectiv a unui pol suplimentar în funcţia de transfer a sistemului deschis, asupra formei locului rădăcinilor.

Exemplul 1.12. Se consideră un sistem automat, cu schema din fig. II.6, *b*, în care

$$G(s) = G_R(s)\, G_F(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+4)}.$$

Să se determine locul rădăcinilor şi apoi să se studieze ce devine acesta dacă se introduce un zerou, respectiv un pol suplimentar la -1.

Aplicînd regulile de trasare a locului rădăcinilor, pentru sistemul iniţial locul rădăcinilor are imaginea din fig. II.12, *a*.

Prin introducerea unui zerou la -1 în funcţia de transfer a sistemului deschis aceasta devine

$$G(s) = \frac{k\,(s+1)}{s(s+2)(s+4)}.$$

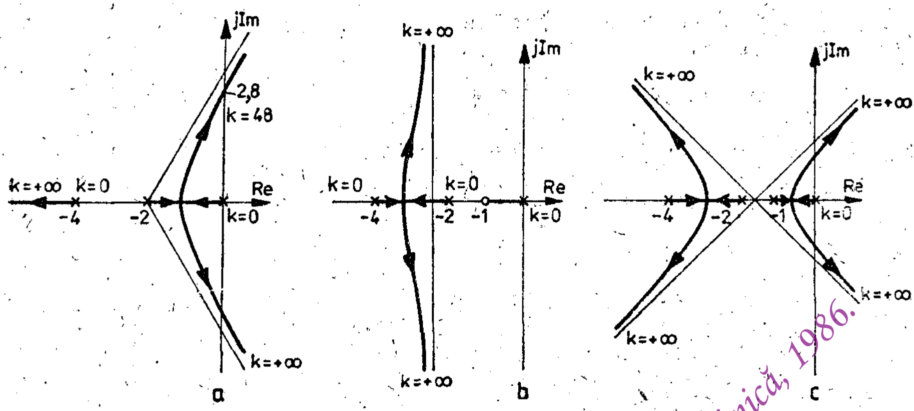


Fig. II. 12. Locul rădăcinilor la *exemplul 1.12.*, (*a*); după introducerea unui zerou la -1, (*b*) și după introducerea unui pol la -1, (*c*).

Locul rădăcinilor are forma din fig. II. 12, *b*. Se remarcă faptul că în acest fel s-a obținut un sistem automat stabil IMEM pentru orice $k > 0$. Aceasta se explică prin aceea că, pe de o parte, locul rădăcinilor s-a deplasat spre stînga (centrul de greutate s-a deplasat de la -2 la $-2{,}5$) și, pe de altă parte, prin reducerea numărului de ramuri care ajung în punctul de la infinit de la trei la două.

Trebuie să remarcăm faptul că nu orice zerou suplimentar are un astfel de efect. De exemplu dacă se introduce un zerou la -6, abscisa centrului de greutate devine $s_{cg} = \frac{1}{2}(-2-4+6) = 0$, ceea ce este echivalent cu o deplasare spre dreapta a locului rădăcinilor. Dacă se introduce un zerou la stînga lui -6, atunci $s_{cg} > 0$ și sistemul automat poate deveni instabil IMEM.

Prin introducerea unui pol la -1 în funcția de transfer a sistemului deschis, acesta devine

$$G(s) = \frac{k}{s\,(s+1)\,(s+2)\,(s+4)}.$$

Locul rădăcinilor are forma din fig. II. 12, *c*. Se remarcă faptul că locul rădăcinilor se deplasează spre dreapta și că a crescut numărul de ramuri care ajung în punctul de la infinit. Stabilitatea IMEM este influențată negativ deoarece sistemul automat este acum stabil IMEM numai pentru $k \in (0,\ 14{,}5)$ (spre deosebire de situația inițială pentru care $k \in (0,\ 48)$).

Pentru a vedea cum se poate aplica metoda locului rădăcinilor în proiectarea sistemelor automate, vom face mai întîi unele precizări privitoare la modul în care trebuie formulată tema de proiectare și la etapele pe care le parcurge proiectantul în rezolvarea problemei stabilizării.

Prin tema de proiectare a unui sistem automat monovariabil trebuie să se precizeze întotdeauna următoarele date:

1° *Instalaţia tehnologică automatizată ca sistem* (ceea ce implică definirea mărimilor de intrare: comenzi şi perturbaţii, a mărimilor de ieşire şi a relaţiilor dintre ele).

2° *Mărimile reglate,* adică acele mărimi ale instalaţiei tehnologice care trebuie să aibă o evoluţie prescrisă în conformitate cu anumite *mărimi prescrise* (constante sau variabile în timp).

3° *Performanţele* pe care trebuie să le realizeze sistemul automat în regim tranzitoriu şi în regim staţionar sau permanent, definite pe baza unor criterii de performanţă (uzual se precizează anumite valori pentru indicatorii performanţelor definiţi pe baza răspunsului indicial).

Pentru rezolvarea temei de proiectare se parcurg următoarele etape:

1° Se scriu ecuaţiile care guvernează funcţionarea părţilor componente ale sistemului şi se determină schema bloc structurală a întregului sistem. Aceasta este baza procesului de proiectare. Se subînţelege că elementul de execuţie şi traductorul sînt determinate de însăşi natura procesului automatizat.

2° Se analizează stabilitatea IMEM a sistemului automat (prevăzut cu tipul de regulator pe care experienţa în domeniu l-a impus ca fiind cel mai potrivit) şi, eventual, se determină domeniul parametric de stabilitate.

3° Se realizează stabilizarea sistemului automat prin modificarea adecvată a parametrilor şi, dacă este necesar, a structurii regulatorului, în scopul realizării performanţelor impuse.

Spre deosebire de alte metode de stabilizare a sistemelor automate liniare monovariabile, metoda locului rădăcinilor are avantajul esenţial că permite să se ţină seama de cerinţe cantitative impuse răspunsului indicial al sistemului automat. Din punctul de vedere al stabilităţii IMEM răspunsului indicial se impun două condiţii:

1° privitoare la suprareglarea σ, adică

$$\sigma \leqslant \sigma_{max}, \tag{1.73}$$

unde σ_{max} este suprareglarea maximă admisibilă, şi

2° privitoare la durata t_s a regimului tranzitoriu, adică

$$t_s \leqslant t_{s\ max}, \tag{1.74}$$

unde $t_{s\ max}$ este durata maximă admisibilă a regimului tranzitoriu.

Vom presupune în cele ce urmează că sistemul automat poate fi caracterizat prin doi poli dominanţi (v. I.6.4.3)

$$\lambda_{1;2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}), \quad 0 < \zeta < 1. \tag{1.75}$$

Întrucît suprareglarea σ depinde numai de factorul de amortizare ζ (v. fig. I.20) şi că această dependenţă este de tip monoton descrescător, rezultă că (1.73) este echivalentă cu

$$\zeta \geqslant \zeta_{min}, \tag{1.76}$$

unde ζ_{min} este factorul de amortizare minim admisibil al polilor dominanţi. Pentru $\zeta = \cos \Psi$, cu $-90° < \Psi < 90°$, condiţia (1.76) este echivalentă cu

$$|\Psi| \leqslant \Psi_{max}, \tag{1.77}$$

unde Ψ_{max} defineşte sectorul maxim admisibil în care se pot afla polii dominanţi ai sistemului, fig. II.13, conform condiţiei (1.73). Relaţia dintre Ψ_{max} şi σ_{max} se poate stabili cu ajutorul relaţiei dintre ζ_{min} şi σ_{max} (v. relaţia I.6.81). După calcule elementare se obţine

$$\cos \Psi_{max} = \frac{2{,}3 \lg \sigma_{max}}{\sqrt{9{,}86 + (2{,}3 \lg \sigma_{max})^2}}. \tag{1.78}$$

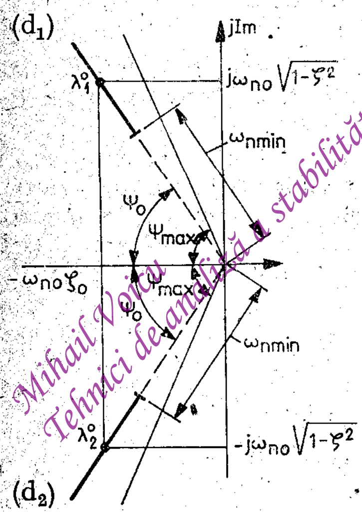


Fig. II.13. Poziţia polilor dominanţi care satisfac condiţiile (1.73), (1.74).

Pentru realizarea unei rapidităţi cît mai mari a sistemului se alege soluţia $\Psi_0 < \Psi_{max}$ (cu Ψ_0 cît mai apropiat de Ψ_{max}; dacă dominanţa polilor $\lambda_{1,2}$ are loc fără erori importante atunci se poate adopta $\Psi_0 = \Psi_{max}$), ceea ce corespunde la $\zeta_0 > \zeta_{min}$, fig. II.13 — semidreptele (d_1) şi (d_2).

Condiţia (1.74) se ia în considerare cu ajutorul fig. I.20. Pentru ζ_0 deja adoptat se determină timpul de răspuns adimensional τ_{s0}. Timpul real de răspuns trebuie să satisfacă condiţia

$$t_{s0} = \frac{\tau_{s0}}{\omega_{n0}} \leqslant t_{s\,max}, \tag{1.79}$$

unde ω_{n0} este pulsaţia naturală corespunzătoare polilor dominanţi, care se determină chiar din (1.79).

Se obține

$$\omega_{n0} \geqslant \frac{\tau_{s0}}{t_{s\,max}} = \omega_{n\,min}, \tag{1.80}$$

unde $\omega_{n\,min}$ este pulsația naturală minimă admisibilă a polilor dominanți.

Întrucît $|\lambda_{1,2}| = \omega_n$ rezultă că ω_{n0} poate fi măsurat direct pe semidreptele (d_1) și (d_2) din fig. II.13. Conform condiției (1.80) polii dominanți adoptați

$$\lambda^0_{1,2} = \omega_{n0}(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1-\zeta_0^2}) \tag{1.81}$$

trebuie să se situeze pe porțiunile trasate cu linie continuă ale semidreptelor (d_1) și (d_2). Valoarea lui ω_{n0} nu trebuie să fie totuși prea mare pentru ca polii (1.81) să nu-și piardă caracterul dominant.

Polii dominanți ai sistemului automat fiind stabiliți, se alege funcția de transfer a regulatorului, $G_R(s)$, astfel încît funcția de transfer a sistemului automat să poată fi caracterizat tocmai prin polii dominanți (1.81).

Vom ilustra cele de mai sus printr-un exemplu.

Exemplul 1.13. [F.1]. Se consideră un sistem automat cu

$$G_F(s) = \frac{12{,}5}{s(s+1)(s+2{,}5)}.$$

Se impun $\sigma_{max}\% = 17\%$ și $t_{s\,max} = 3$s.

Se cere să se determine funcția de transfer $G_R(s)$ a regulatorului care asigură realizarea performanțelor impuse.

Pentru $\sigma_{max} = 0{,}17$ din fig. I.20 și din (1.78) rezultă $\zeta_{min} \approx 0{,}5$ și $\Psi_{max} \approx 60°$. Se adoptă $\zeta_0 = 0{,}5$ și $\Psi_0 = 60°$. Din fig. I.20 se obține $\tau_{s0} = 6{,}25$ și conform condiției (1.80) în care $\omega_{n\,min} = 6{,}25/3 \approx 2{,}1$ s^{-1}, se adoptă $\omega_{n0} = 2{,}2$ s^{-1}.

Așadar polii dominanți pe care ar trebui să-i aibă sistemul automat astfel încît condițiile impuse să fie satisfăcute sînt

$$\lambda^0_{1,2} = 2{,}2\,(-0{,}5 \pm j\,0{,}87).$$

Dacă se folosește un regulator P cu $G_R(s) = k_r$ atunci funcția de transfer a sistemului deschis are expresia

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2{,}5)}, \quad k = 12{,}5\,k_r.$$

Locul rădăcinilor acestui sistem este reprezentat în fig. 14, *a*.

Se observă că oricare ar fi $k > 0$ sistemul automat nu poate avea poli în zonele admisibile AB și $A'B'$.

Știm de la *exemplul 1.12* că dacă se introduc zerouri și/sau poli suplimentari în $G(s)$ locul rădăcinilor se deplasează spre stînga sau spre dreapta. În cazul de față este necesară o deplasare a locului rădăcinilor spre stînga, fără modificarea majoră a formei sale,

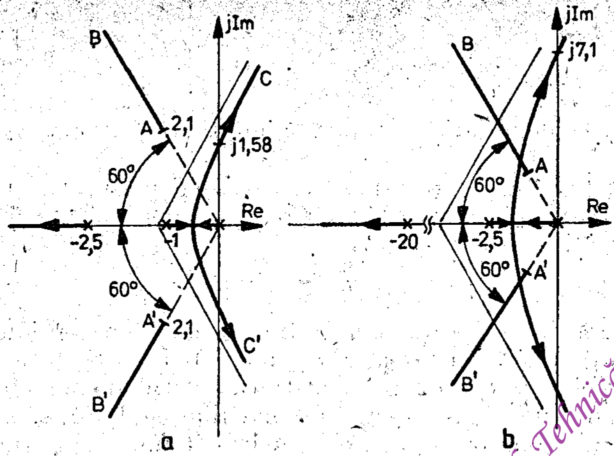


Fig. II.14. Locul rădăcinilor la *exemplul 1.13*, (*a*); după introducerea unui zero la -1 și a unui pol la -20, (*b*).

astfel încît ramurile C și C' ale locului să intersecteze segmentele AB și respectiv $A'B'$, fig. II.14, *a*. Pentru aceasta este suficient să se introducă un zerou la -1, care să compenseze polul la -1 existent în $G_F(s)$ și un pol îndepărtat, de exemplu, la -20, care să deplaseze suficient spre stînga locul rădăcinilor.

Așadar funcția de transfer a regulatorului este

$$G_R(s) = k_r \frac{s+1}{s+20},$$

unde k_r se va alege astfel încît sistemul automat să aibă polii dominanți $\lambda^0_{1,2}$.

În aceste condiții funcția de transfer a sistemului deschis este

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2{,}5)(s+20)}, \quad k = 12{,}5\, k_r,$$

și locul rădăcinilor corespunzătoare are forma din fig. II.14, *b*.

Pentru a fi siguri că locul rădăcinilor intersectează segmentele AB și $A'B'$ se rezolvă sistemul de ecuații

$$G(\alpha + j\beta) + 1 = 0$$

$$\beta = -\alpha \operatorname{tg} 60°,$$

corespunzător intersecției dintre locul rădăcinilor și semidreapta OB. Se obține soluția $\alpha = -10/9$ și $\beta = 10\sqrt{3}/9$, ceea ce înseamnă $\omega_{n0} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$, adică chiar valoarea adoptată a pulsației naturale corespunzătoare polilor dominanți. Valoarea lui k corespunzătoare respectivei intersecții se calculează cu relația $|G(\alpha + j\beta)| = 1$ din care se obține

$$k = |\alpha + j\beta|\,|\alpha + 2{,}5 + j\beta|\,|\alpha + 20 + j\beta| = 100,$$

Cum $k = 12{,}5\, k_r$, rezultă $k_r = 8$.

O verificare prin simulare analogică sau numerică a soluției adoptate confirmă justețea ei, în sensul că performanțele care se obțin sînt: $\sigma\% = 17\%$ și $t_s = 2{,}6$ s.

1.1.9. Aplicație: reglarea automată a unghiului polar al unui generator sincron

Unghiul polar al mașinii sincrone, care este definit ca decalajul unghiular dintre cîmpul învîrtitor rotoric și cîmpul învîrtitor statoric, depinde de valoarea curentului de excitație, de tensiunea la borne și de puterea activă furnizată. În condiții normale de funcționare a mașinii sincrone ca generator, aceasta trebuie să furnizeze și o putere reactivă inductivă. Aceasta se obține prin supraexcitare, situație în care unghiul polar este relativ mic. Sînt posibile și regimuri în care generatorul trebuie să furnizeze putere reactivă capacitivă. În acest caz excitația se reduce considerabil, ceea ce duce la creșterea unghiului polar. În lipsa unui reglaj automat adecvat, mașina sincronă funcționează stabil numai pînă la un unghi polar de 90°. Chiar dacă se păstrează o anumită rezervă față de această valoare, există pericolul ca la acțiunea bruscă a unor perturbații (de exemplu variații ale puterii reactive absorbite de rețea), să se depășească limita de stabilitate și generatorul să iasă din sincronism. Acest inconvenient poate fi înlăturat printr-o reglare automată a unghiului polar, care, nu numai că lărgește domeniul de stabilitate pînă la 150°, dar asigură și o stabilizare a acesteia cu suprareglare admisibilă.

Schema bloc funcțională a sistemului automat de reglare a unghiului polar a unui generator sincron este reprezentată în fig. II.15, în care m_1 este momentul motor al turbinei; m_2 — momentul electromagnetic al generatorului; ω — viteza unghiulară; J — momentul de inerție rotoric al turbinei și generatorului; u_a — tensiunea la bornele generatorului; u_δ — tensiunea proporțională cu unghiul polar δ, furnizată de traductorul de unghi polar; u_0 — tensiunea de prescriere a unghiului polar; u_1 — tensiunea de comandă a redresorului comandat și u_2, i_2 — tensiunea și curentul de excitație.

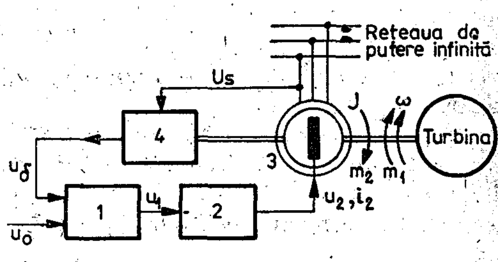


Fig. II.15. Schema bloc funcțională a sistemului de reglare automată a unghiului polar al unui generator sincron:

1 — regulatorul; *2* — redresorul comandat; *3* — generatorul sincron; *4* — traductorul de unghi polar.

Modelul matematic simplificat al generatorului sincron, în mărimi relative raportate la valorile lor nominale, [F1], este următorul

$$\frac{di_2}{dt} = c_2\left(u_2 - i_2 + \frac{c_3}{\omega_n}\frac{d\delta}{dt}\sin\delta\right) \tag{1.82}$$

$$m_2 = c_1 i_2 \sin\delta \tag{1.83}$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \omega_n c_4(m_1 - m_2) - c_4 c_5\frac{d\delta}{dt}, \tag{1.84}$$

în care

$$c_1 = \frac{p}{X_s}, \quad X_s = \omega_n L_s\frac{I_{sn}}{U_{sn}};$$

p este numărul de perechi de poli; X_s — reactanţa relativă statorică; ω_n — viteza unghiulară nominală; L_s — inductivitatea statorică; U_{sn} şi I_{sn} — valorile nominale ale tensiunii şi curentului statoric;

$$c_2 = \frac{\omega_n}{\sigma X_r}, \quad X_r = \omega_n L_r\frac{I_{rn}}{U_{rn}}, \quad \sigma = 1 - \frac{M_{rs}}{L_r L_s};$$

X_r — reactanţa relativă rotorică; σ — coeficientul, de scăpări al cuplajului magnetic rotor-stator; L_r — inductivitatea rotorică; U_{rn} şi I_{rn} — valorile nominale ale tensiunii şi curentului rotoric; M_{rs} — inductivitatea mutuală rotor-stator;

$$c_3 = (1 - \sigma)X_r, \quad c_4 = \frac{\omega_n}{pT_p}, \quad T_p = \frac{2J\omega_n^3}{3U_{sn}I_{sn}p^2};$$

T_p — constanta de timp de pornire;

$$c_5 = \frac{\cos\varphi_n}{a_n};$$

$\cos\varphi_n$ — factorul de putere nominal şi a_n — alunecarea în regim asincron la puterea nominală.

Ecuaţiile (1.82), (1.83) sînt neliniare. Pentru a putea aplica tehnicile polinomiale vom liniariza aceste două ecuaţii în mai multe puncte de funcţionare.

Pentru termenul neliniar $x = \dot{\delta}\sin\delta$ putem scrie în mici abateri

$$\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)_0 \Delta\delta + \left(\frac{\partial x}{\partial \dot{\delta}}\right)_0 \Delta\dot{\delta} = \Delta\dot{\delta}\sin\delta_0, \tag{1.85}$$

deoarece $\dot{\delta}_0 = 0$.

Procedînd asemănător pentru ecuaţia (1.83) obţinem

$$\Delta m_2 = \left(\frac{\partial m_2}{\partial i_2}\right)_0 \Delta i_2 + \left(\frac{\partial m_2}{\partial \delta}\right)_0 \Delta\delta = c_1(\Delta i_2 \sin\delta_0 + i_{20}\,\Delta\delta\cos\delta_0). \quad (1.86)$$

Înlocuind (1.85) în (1.82) şi (1.83) cu (1.86), după calcule relativ simple care constau în aplicarea transformării Laplace şi eliminarea transformatelor mărimilor Δi_2 şi Δm_2, se obţine ecuaţia

$$\mathfrak{L}\{\Delta\delta\} = G_3(s)\,[-\mathfrak{L}\{\Delta u_2\} + G_{31}(s)\,\mathfrak{L}\{\Delta m_1\}], \quad (1.87)$$

în care

$$G_3(s) = \frac{k_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad (1.88)$$

$$G_{31}(s) = k_{31}(s + b_1), \quad (1.89)$$

$$a_1 = c_2 + c_4 c_5, \quad a_2 = c_2 c_4 c_5 + c_1 c_2 c_3 c_4 \sin^2\delta_0 + \omega_n c_1 c_4 i_{20}\cos\delta_0,$$

$$a_3 = \omega_n c_1 c_2 c_4 i_{20}\cos\delta_0, \quad k_3 = \omega_n c_1 c_2 c_4 \sin\delta_0, \quad b_1 = c_2,$$

$$k_{31} = 1/c_1 c_2 \sin\delta_0.$$

Avînd în vedere că redresorul comandat şi traductorul de unghi polar sînt satisfăcător reprezentaţi prin funcţiile de transfer

$$G_2(s) = \frac{66{,}5}{s + 66{,}5}, \quad (1.90)$$

$$G_4(s) = \frac{100}{s + 100}, \quad (1.91)$$

rezultă că schema bloc structurală liniarizată a sistemului de reglare automată a unghiului polar are forma din fig. II.16. În această structură regulatorul $G_1(s)$ urmează să se determine în condiţiile în care $G_3(s)$

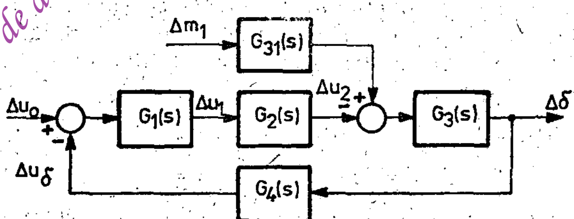


Fig. II. 16. Schema bloc structurală liniarizată a sistemului de reglare automată a unghiului polar.

şi $G_{31}(s)$ depind de punctul de funcţionare al generatorului, în speţă de δ_0 şi i_{20}. Acesta din urmă, conform cu (1.83), depinde de m_{10} prin relaţia

$$i_{20} = \frac{m_{20}}{c_1 \sin \delta_0} = \frac{m_{10}}{c_1 \sin \delta_0}.$$

Pentru un generator sincron caracterizat prin $p = 1$, $X_s = 1{,}7$, $\omega_n = 314\ \mathrm{s}^{-1}$, $\sigma = 0{,}2$, $X_r = 1500$, $T_p = 2350\ s$, $\cos \varphi_n = 0{,}8$ şi $a_n = 0{,}01$ şi pentru punctele de funcţionare $\delta_0 = 20°$, $m_{10} = 0{,}8$; 60°, 0,2; 90°, 0,2; 120°, 0,2, coeficienţii şi polii funcţiilor de transfer $G_3(s)$ şi $G_{31}(s)$ au valorile din următorul tabel.

δ_0	m_{10}	i_{20}	a_1	a_2	a_3	k_3	b_1	k_{31}	p_1	p_2	p_3
20°	0,8	3,96	9,05	115,2	94	8,54	1,05	4,8	$-0{,}87$	$-4{,}52 + j9{,}72$	$-4{,}52 - j9{,}72$
60°	0,2	0,39	9,12	88,9	5,12	22,2	1,05	1,92	$-0{,}071$	$-4{,}55 + j8{,}26$	$-4{,}55 - j8{,}26$
90°	0,2	0,34	9,00	105,8	0	25,00	1,05	1,63	0	$-4{,}5 + j9{,}12$	$-4{,}5 - j9{,}12$
120°	0,2	0,39	9,12	79,7	$-5{,}12$	22,44	1,05	1,92	0,064	$-4{,}55 + j7{,}7$	$-4{,}55 - j7{,}7$

Din acest tabel este evident că odată cu creşterea lui δ_0 gradul de stabilitate IMEM a generatorului sincron se reduce. Pentru $\delta \geqslant 90°$ acesta este instabil IMEM. Conform *teoremei 9* este posibilă stabilizarea prin utilizarea unui regulator cu funcţia de transfer

$$G_1(s) = k_1 \frac{s+b}{s+a}, \quad a \geqslant 0, \quad b > 0. \tag{1.92}$$

Exigenţele legate de precizia sistemului automat în regim staţionar impun ca regulatorul să aibă o comportare foarte apropiată de aceea a unui regulator PI (proporţional-integral). Acest lucru se obţine pentru a apropiat de 0 şi $b \gg a$, de exemplu pentru $a = 0{,}025$ şi $b = 2{,}5$. În aceste condiţii funcţia de transfer a sistemului deschis, în $\delta_0 = 120°$, $i_{20} = 0{,}2$, are expresia

$$G(s) = \frac{150 \cdot 822\, k_1 (s + 2{,}5)}{(s + 0{,}025)(s + 66{,}5)(s + 100)(s - 0{,}062)(s^2 + 11{,}7s + 186{,}3)}. \tag{1.93}$$

Locul rădăcinilor, fig. II.17, are două puncte de ramificare, dintre care unul între polii 0,062 şi —0,025 şi cinci ramuri care ajung în punctul de la infinit pentru $k = +\infty$. Impunînd condiţia ca rezerva de stabilitate să fie $\alpha_{min} = 1{,}5$ rezultă $k = 22{,}68 \cdot k_1 = (2-2{,}5)\, 10^4$, ceea ce înseamnă $k_1 \in [900,\ 1100]$. Din fig. II.17 se observă că pentru $k = 25\,000$ sistemul automat are două perechi de poli complex conjugaţi caracterizaţi prin $\Psi_0 = 60°$, ceea ce înseamnă $\zeta = 0{,}5$. Aşadar se poate adopta $k_1 = 1100$.

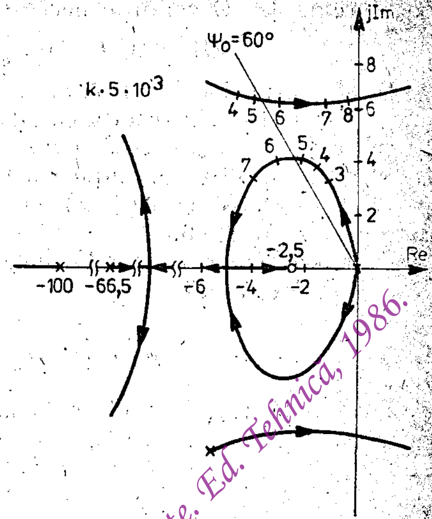


Fig. II.17. Locul rădăcinilor sistemului de reglare automată a unghiului polar.

1.2. Sisteme discrete în timp

Tehnicile care se vor expune în continuare sînt aplicabile atît pentru studiul stabilităţii asimptotice, cît şi pentru studiul stabilităţii IMEM. Conform *teoremei 8* de la I.5 şi *teoremei 16* de la I.6 cele două tipuri de stabilitate depind de repartiţia în planul complex a zerourilor polinomului caracteristic, respectiv ale polinomului polilor, în raport cu cercul de rază unitate.

În scopul realizării unei tratări unitare a celor două tipuri de stabilitate vom începe expunerea cu o definiţie şi două teoreme care rezultă din aceasta şi *teorema 8* de la I.5 şi respectiv *teorema 16* de la I.6.

Definiţia 2. Polinomul

$$\Delta(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad z \in \mathbf{C}, \qquad (1.94)$$

cu $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, şi $a_0 > 0$, se numeşte *convergent* dacă toate zerourile sale sînt situate în interiorul cercului $|z| = 1$.

Teorema 10. Sistemul dinamic (I.5.37) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic al matricei A este convergent.

Teorema 11. Sistemul dinamic (I.6.82), (I.6.83) este stabil IMEM dacă şi numai dacă polinomul polilor este convergent.

Ca şi în cazul sistemelor continue vom demonstra mai întîi o condiţie necesară ca $\Delta(z)$ să fie convergent.

Teorema 12. O condiţie necesară ca $\Delta(z)$ să fie convergent este ca

$$\Delta(1) > 0, \quad (-1)^n \Delta(-1) > 0, \quad a_0 > |a_n|. \tag{1.95}$$

D. Zerourile λ_i, $i = 1, 2, .., n$, ale polinomului $\Delta(z)$ satisfac condiţiile $|\lambda_i| < 1$. De aici rezultă că $\Delta(z)$ nu are nici un zerou pe axa reală pentru $x \leqslant -1$ şi $x \geqslant 1$, ceea ce înseamnă că $\Delta(x)$ nu are nici o variaţie de semn respectiv în intervalele $(-\infty, -1]$ şi $[1, +\infty)$. Aşadar $(-1)^n \Delta(-\infty) > 0$ şi $\Delta(+\infty) > 0$, ceea ce implică $(-1)^n \Delta(-1) > 0$ şi respectiv $\Delta(1) > 0$.

Pentru a demonstra a treia inegalitate din (1.95) vom utiliza ultima formulă Viète, adică

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Trecînd la valori absolute în această egalitate şi ţinînd seama de faptul că $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n| < 1$ rezultă imediat şi cea de a treia inegalitate. ■

1.2.1. Utilizarea transformării omografice

Există posibilitatea studierii stabilităţii asimptotice sau a celei IMEM a unui sistem discret în timp cu ajutorul tehnicilor polinomiale cunoscute de la sistemele continue în timp. În acest scop este necesară utilizarea unei transformări care stabileşte o corespondenţă biunivocă între cercul de rază unitate din planul z şi axa imaginară din planul s. O astfel de transformare este

$$s = \frac{z + 1}{z - 1}, \tag{1.96}$$

cunoscută sub numele de *transformarea omografică.*

Ea are proprietatea că transformă interiorul cercului unitate din planul z în semiplanul stîng din planul s.

Transformarea inversă are expresia

$$z = \frac{1 - s}{1 + s}. \tag{1.97}$$

Înlocuind (1.97) în (1.94) se obţine

$$\tilde{\Delta}(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \ldots + A_{n-1} s + A_n, \tag{1.98}$$

unde A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sînt coeficienţi determinabili. În virtutea proprietăţilor transformării omografice se poate enunţa următorul rezultat.

Teorema 13. Polinomul $\Delta(z)$ este convergent dacă și numai dacă polinomul $\widetilde{\Delta}(s)$ este hurwitzian.

Dacă este necesar să se tragă o concluzie privitoare la rezerva de stabilitate IMEM a unui sistem discret în timp atunci în $\Delta(z)$ se face schimbarea de variabilă $z \to rz$, $0 < r < 1$, ceea ce permite determinarea localizării zerourilor lui $\Delta(z)$ în raport cu cercul $|z| = r$. Rezerva de stabilitate se determină cu $\alpha_{min} = 1 - r$.

1.2.2. Criteriul Schur-Cohn-Jury

Schur și Cohn au enunțat un criteriu de convergență a polinomului $\Delta(z)$, analog criteriului Hurwitz, care se bazează pe faptul că anumiți determinanți, ale căror elemente sînt coeficienții lui $\Delta(z)$, sînt pozitivi sau negativi, [F2].

Numărul acestor determinanți este $2n$. O simplificare importantă a fost introdusă de Jury [J 1], în sensul că numărul de determinanți necesar a fi calculați a fost redus la n. Vom da în continuare, fără demonstrație, acest rezultat.

Fie matricele

$$A_k = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} \cdots a_{n-k+1} \\ 0 & a_n \cdots\cdots a_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots a_n \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} a_{k-1} \cdots a_1 & a_0 \\ a_{k-2} \cdots a_0 & 0 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_0 \cdots\cdots 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.99}$$

și determinanții

$$c_k = \det(A_k + B_k), \quad d_k = \det(A_k - B_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.100}$$

Teorema 14 (Schur-Cohn-Jury). O condiție necesară și suficientă ca polinomul $\Delta(z)$ să fie convergent este ca

$$c_2 < 0, \; d_2 < 0, \quad c_4 > 0, \; d_4 > 0, \quad c_6 < 0, \; d_6 < 0, \ldots, \tag{1.101}$$

pentru n par, și

$$c_1 > 0, \; d_1 < 0, \quad c_3 < 0, \; d_3 > 0, \quad c_5 > 0, \; d_5 < 0, \ldots, \tag{1.102}$$

pentru n impar.

Exemplul 1.14. Se consideră un sistem dinamic discret în timp al cărui polinom caracteristic este $\Delta(z) = z^2 + a_1 z + a_2$. Să se determine în planul (a_1, a_2) domeniul parametric de stabilitate asimptotică și domeniile corespunzătoare situării zerourilor în interiorul cercurilor de raze $r = 0{,}8$, $r = 0{,}6$ și $r = 0{,}4$.

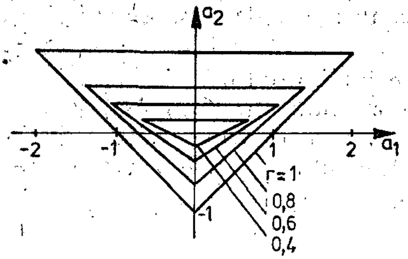


Fig. II.18. Domenii parametrice pentru diferite rezerve de stabilitate la *exemplul 1.14.*

În conformitate cu (1.99)–(1.101) putem scrie

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 + a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} =$$
$$= a_2^2 + a_1 a_2 - a_1 - 1 < 0,$$
$$d_2 = \begin{vmatrix} a_2 - a_2 & a_1 - 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix} =$$
$$= a_2^2 - a_1 a_2 + a_1 - 1 < 0,$$

din care rezultă inecuațiile

$$\begin{cases} a_2 < 1 \\ a_2 > -a_1 - 1 \\ a_2 > a_1 - 1. \end{cases}$$

Pentru a găsi domeniul pentru care zerourile lui $\Delta(z)$ sînt situate în interiorul cercului $|z| = r$, $0 < r \leqslant 1$, vom face schimbarea de variabilă $z \to rz$. Se obține $\Delta(rz) = r^2 z^2 + r a_1 z + a_2$. Din condițiile $c_2 < 0$ și $d_2 < 0$ se obțin inecuațiile

$$\begin{cases} a_2 < r^2 \\ a_2 > -r a_1 - r^2 \\ a_2 > r a_1 - r^2. \end{cases}$$

Domeniile corespunzătoare lui $r = 1$, $r = 0{,}8$, $r = 0{,}6$, $r = 0{,}4$ sînt reprezentate în fig. II.18.

1.2.3. Criteriul Jury-Blanchard

Avînd în vedere dificultățile de calcul pe care le presupun condițiile (1.101) sau (1.102), s-au căutat rezultate echivalente mai simple, analoage criteriului Routh. Un astfel de rezultat a fost enunțat de Jury și Blanchard [J2], și reformulat apoi de alți autori în cîteva variante echivalente. Ideea de bază constă în construcția recursivă a unui sistem de polinoame care au toate același număr de zerouri în interiorul cercului $|z| = 1$. Rezultatul pe care se bazează procedeul de construcție este următorul.

Teorema 15 (Rouché). Fie $P(z)$ și $P_1(z)$ două polinoame care pentru $|z| = 1$ satisfac inegalitatea $|P(z)| > |P_1(z)|$. Atunci $P(z)$ și $P(z) + P_1(z)$ au același număr de zerouri în interiorul cercului $|z| = 1$.

D. Fie polinomul $Q(z) = P(z) + \varepsilon P_1(z)$, cu $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, ale cărui zerouri sînt funcții continue de ε. Pentru ε luînd valori de la 0 la 1 aceste zerouri pleacă din zerourile lui $P(z)$ și ajung în cele ale lui $P(z) + P_1(z)$.

Pentru nici o valoare a lui ε nu există un zerou pe cercul $|z| = 1$, deoarece pe acesta ar avea loc $P(z) = -\varepsilon P_1(z)$, adică $|P(z)| \leqslant |P_1(z)|$, ceea ce ar contrazice ipoteza. În aceste condiţii pentru ε crescător de la 0 la 1, fiecare zerou al lui $P(z)$ situat în interiorul cercului $|z| = 1$ se deplasează spre un zerou al lui $P(z) + P_1(z)$ şi în acest proces nu se poate ajunge pe cercul $|z| = 1$. Aşadar, fiecărui zerou al lui $P(z)$ din interiorul cercului $|z| = 1$ îi corespunde un zerou al lui $P(z) + P_1(z)$ situat în interiorul aceluiaşi cerc. Întrucît pentru ε luînd valori de la 1 la 0 are loc şi implicaţia inversă, rezultă că teorema este adevărată. ■

Fie polinomul

$$D(z) = z^n \Delta\left(\frac{1}{z}\right) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \qquad (1.103)$$

numit *polinomul transpus* al polinomului $\Delta(z)$, relaţia (1.94).

Cu polinoamele $\Delta(z)$ şi $D(z)$ se construieşte polinomul

$$\Delta_1(z) = a_0 \Delta(z) - a_n D(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z, \qquad (1.104)$$

unde

$$b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Teorema 16. Polinomul $\Delta(z)$ este convergent dacă şi numai dacă $a_0 > |a_n|$ şi $\Delta_1(z)$ este convergent.

D. Polinomul $\Delta_1(z)$ poate fi exprimat şi sub forma $\Delta_1(z, \varepsilon) = a_0[\Delta(z) - \varepsilon D(z)]$, unde $\varepsilon = a_n/a_0$. În orice punct al cercului $|z| = 1$ are loc $1/z = \bar{z}$ şi deci $|D(z)| = |\Delta(\bar{z})| = |\bar{\Delta}(z)| = |\Delta(z)|$. Rezultă că pentru $|z| = 1$ are loc evaluarea

$$|\varepsilon D(z)| = |\varepsilon|\,|D(z)| = |\varepsilon|\,|\Delta(z)|. \qquad (1.105)$$

Suficienţa. Întrucît $a_0 > |a_n|$ rezultă că $0 \leqslant |\varepsilon| < 1$ şi, din (1.105), obţinem $|\varepsilon D(z)| < \Delta(z)$. Dacă $\Delta_1(z)$ este convergent atunci, conform *teoremei 15*, $\Delta(z)$ este convergent.

Necesitatea. Dacă $\Delta(z)$ este convergent atunci, conform *teoremei 12*, $a_0 > |a_n|$ şi $0 \leqslant |\varepsilon| \leqslant 1$, respectiv $|\varepsilon D(z)| < \Delta(z)$. În virtutea *teoremei 15* $\Delta_1(z)$ este convergent. ■

Rezultatul precedent permite construcţia recursivă a unui sistem de polinoame $\Delta(z), \Delta_1(z), \Delta_2(z), \dots,$ toate de gradul n, unde $\Delta_2(z)$ se obţine din $\Delta_1(z)$ aşa cum $\Delta_1(z)$ s-a obţinut din $\Delta(z)$ ş.a.m.d. Coeficienţii acestor polinoame se calculează conform schemei *Jury-Blanchard*:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \cdots & z^{n-i} \quad \cdots & z^0 \\
\hline
\Delta(z) & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-i} & a_n \\
D(z) & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_i & a_0 \\
\Delta_1(z) & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\ b_{n-j-1} & \cdots & b_{n-1} \\
D_1(z) & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots\ b_j & \cdots & b_0 \\
\Delta_2(z) & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-2} \\
D_2(z) & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & \cdots & c_0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Delta_{n-2}(z) & e_0 & e_1 & e_2 & & & \\
D_{n-2}(z) & e_2 & e_1 & e_0 & & & \\
\Delta_{n-1}(z) & f_0 & f_1 & & & & \\
D_{n-1}(z) & f_1 & f_0 & & & & \\
\Delta_n(z) & g_0 & & & & & \\
D_n(z) & g_0 & & & & &
\end{array}
\tag{1.106}
$$

cu formulele

$$
\begin{aligned}
& b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \\
& c_j = b_0 b_j - b_{n-1} b_{n-j-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& f_k = e_0 e_k - e_2 e_{2-k}, \quad k = 0, 1, \\
& g_0 = f_0^2 - f_1^2.
\end{aligned}
\tag{1.107}
$$

Schema (1.106), în virtutea *teoremei 17*, ne conduce în mod firesc la următorul rezultat.

Teorema 17 (Jury-Blanchard). O condiţie necesară şi suficientă ca polinomul $\Delta(z)$ să fie convergent este ca

$$a_0 > |a_n|, \quad b_0 > |b_{n-1}|, \quad c_0 > |c_{n-2}|, \ldots, f_0 > |f_1|. \tag{1.108}$$

D. Este evident că $\Delta(z)$ este convergent dacă şi numai dacă $a_0 > |a_n|$ şi $\Delta_1(z), \ldots, \Delta_{n-1}(z)$ sînt convergente. $\Delta_1(z)$ este convergent dacă şi numai dacă $b_0 > |b_{n-1}|$ şi $\Delta_2(z), \ldots, \Delta_{n-1}(z)$ sînt convergente. Continuînd în acest mod se obţine condiţia necesară şi suficientă (1.108). ■

Dacă un coeficient din prima coloană a schemei Raible (exclusiv a_0) este nul atunci este posibil ca $\Delta(z)$ să aibă zerouri pe cercul $|z| = 1$. Pentru a determina numărul n_1 al acestor zerouri se face în $\Delta(z)$ schimbarea de variabilă $z \to (1 + \varepsilon)z$, unde $|\varepsilon| > 0$ este un număr arbitrar de mic. Această schimbare se realizează foarte simplu dacă se face aproximarea $(1 + \varepsilon)^k z^k \approx (1 + k\varepsilon) z^k$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Considerînd $\varepsilon > 0$ şi apoi $\varepsilon < 0$, în prima coloană a schemei Raible (exclusiv a_0) a lui $\Delta(z, \varepsilon)$ se obţin $n_{\varepsilon-}$ şi respectiv $n_{\varepsilon+}$ coeficienţi pozitivi. Numărul n_1 de zerouri pe $|z| = 1$ ale lui $\Delta(z)$ este $n_1 = |n_{\varepsilon+} - n_{\varepsilon-}|$. În acest caz $n_0 = \min(n_{\varepsilon+}, n_{\varepsilon-})$ şi $n_2 = n - n_0 - n_1$.

Exemplul 1.16. Se consideră un sistem dinamic discret în timp cu polinomul caracteristic $\Delta(z) = z^3 + 3{,}3\, z^2 + 3z + 0{,}8$. Să se studieze stabilitatea internă a sistemului.

Schema Jury-Blanchard este următoarea

	z^3	z^2	z^1	z^0
$\Delta(z)$	1	3,3	3	0,8
$D(z)$	0,8	3	3,3	1
$\Delta_1(z)$	0,36	0,9	0,36	
$D_1(z)$	0,36	0,9	0,36	
$\Delta_2(z)$	0	0		
$D_2(z)$	0	0		

Sistemul considerat nu este asimptotic stabil.

Pentru a determina repartiţia zerourilor în raport cu cercul de rază unitate vom face schimbarea de variabilă $z \to (1 + \varepsilon)z$. Se obţine $\Delta(z, \varepsilon) \approx (1 + 3\varepsilon) z^3 + 3{,}3\,(1 + 2\varepsilon) z^2 + 3\,(1 + \varepsilon) z + 0{,}8$. Schema Raible pentru acest polinom are forma

	z^3	z^2	z^1	z^0
	$1 + 3\varepsilon$	$3{,}3\,(1 + 2\varepsilon)$	$3\,(1 + \varepsilon)$	$0{,}8$
$k_a = \dfrac{0{,}8}{1 + 3\varepsilon}$	$\dfrac{0{,}36 + 6\varepsilon}{1 + 3\varepsilon} = b'_0;$	$\dfrac{0{,}9 + 14{,}1\varepsilon}{1 + 3\varepsilon}$	$\dfrac{0{,}36 + 6{,}72\varepsilon}{1 + 3\varepsilon}$	
$k_b = \dfrac{0{,}36 + 6{,}72\varepsilon}{0{,}36 + 6\varepsilon}$	$\dfrac{-0{,}52\varepsilon}{(0{,}36 + 6\varepsilon)(1 + 3\varepsilon)} = c'_0;$		$\dfrac{-0{,}64\varepsilon}{(0{,}36 + 6\varepsilon)(1 + 3\varepsilon)}$	
$k_0 = 1{,}24$	$\dfrac{0{,}27\varepsilon}{(0{,}36 + 6\varepsilon)(1 + 3\varepsilon)} = d'_0.$			

Din prima coloană a acestei scheme rezultă

$\varepsilon > 0$ implică $\quad b'_0 > 0,\ c'_0 < 0,\quad d'_0 > 0,$

$\varepsilon < 0$ implică $\quad b'_0 > 0,\ c'_0 > 0,\quad d'_0 < 0.$

Aşadar $n_{\varepsilon+} = 2$ şi $n_{\varepsilon-} = 1$. Urmează că $n_1 = 1$, $n_0 = 1$ şi $n_2 = 1$. În aceste condiţii sistemul considerat este instabil (intern).

1.2.4. Condiții suficiente de convergență

Procedeul recursiv care a condus la schema Jury-Blanchard sugerează o foarte interesantă și de mare simplitate condiție suficientă ca polinomul $\Delta(z)$ să fie convergent.

Teorema 20 (Kakeya). Dacă

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{n-1} > a_n > 0, \tag{1.114}$$

atunci polinomul $\Delta(z)$ este convergent.

D. Din formulele (1.107) și din (1.114) rezultă

$$b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i} > a_0 a_{i+1} - a_n a_{n-i-1} = b_{i+1},$$
$$i = 0, 1, \dots, n-2.$$
$$c_j = b_0 b_j - b_{n-1} b_{n-j-1} > b_0 b_{j+1} - b_{n-1} b_{n-j-2} = c_{j+1},$$
$$j = 0, 1, \dots, n-3.$$

. . . .

$$e_0 > e_1 > e_2,$$

$$f_0 > f_1,$$

ceea ce înseamnă că condiția (1.108) ca $\Delta(z)$ să fie convergent este satisfăcută. ■

Un alt rezultat interesant și util în aplicații este următorul.

Teorema 21. Dacă există un coeficient a_{n-r}, $0 \leqslant r \leqslant n$ astfel încît

$$|a_{n-r}| > |a_0| + \dots + |a_{n-r-1}| + |a_{n-r+1}| + \dots + |a_n| \tag{1.115}$$

atunci $\Delta(z)$ are exact r zerouri în interiorul cercului $|z| = 1$.

D. Pe cercul $|z| = 1$ putem face, conform ipotezei, următoarele evaluări

$$|\Delta(z) - a_{n-r}z^r| = |a_0 z^n + \dots + a_{n-r-1}z^{r+1} + a_{n-r+1}z^{r-1} + \dots + a_n| \leqslant$$
$$\leqslant |a_0| + \dots + |a_{n-r-1}| + |a_{n-r+1}| + \dots + |a_0| < |a_{n-r}| = |a_{n-r}z^r|.$$

Conform *teoremei 15* polinoamele $a_{n-r}z^r$ și $\Delta(z) - a_{n-r}z^r + a_{n-r}z^r = \Delta(z)$ au exact același număr r de zerouri în interiorul cercului $|z| = 1$. ■

O consecință imediată a teoremei precedente este următorul rezultat.

Teorema 22. Dacă

$$|a_0| > |a_1| + \dots + |a_n|, \tag{1.116}$$

atunci polinomul $\Delta(z)$ este convergent.

1.2.5. Metoda locului rădăcinilor

Această metodă se aplică exact după aceleași reguli ca în cazul sistemelor automate continue în timp. Ca și în acest caz sistemele automate monovariabile și discrete în timp pot fi reduse la schema bloc standard din fig. II.19, *a*.

Relația intrare-ieșire conform schemei din fig. II.19, *a* are expresia

$$Y(z) = G_0(z)\, U(z) - G_{0w}(z)\, W(z), \tag{1.117}$$

în care

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \tag{1.118}$$

este funcția de transfer în z a sistemului închis în raport cu mărimea prescrisă;

$$G_{0w}(z) = \frac{1}{1 + G(z)} \tag{1.119}$$

este funcția de transfer în z a sistemului închis în raport cu perturbația și

$$G(z) = G_R(z)\, G_F(z) \tag{1.120}$$

este funcția de transfer în z a sistemului deschis.

Examinînd expresiile (1.118) și (1.119) rezultă că stabilitatea IMEM a sistemului automat, atît în raport cu $U(z)$ cît și cu $W(z)$, depinde de

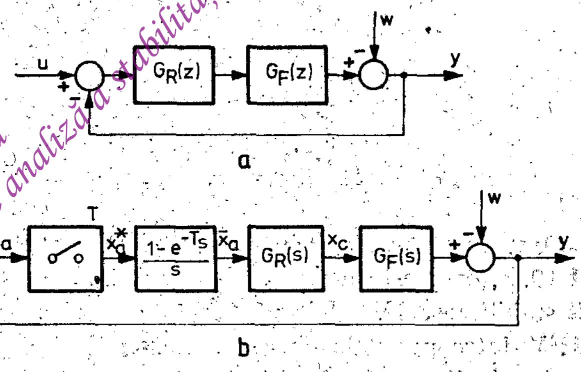


Fig. II.19. *a* — Schema bloc structurală standard a unui sistem automat discret în timp; *F* — partea fixată; *R* — regulatorul. *b* — Schema bloc structurală a unui sistem automat discret în timp cu partea fixată continuă în timp.

repartiția în planul complex a rădăcinilor *ecuației caracteristice intrare-ieșire* a sistemului automat

$$1 + G(z) = 0. \tag{1.121}$$

Prin ipoteză funcția de transfer în z a sistemului deschis are forma

$$G(z) = k \frac{\prod_{1}^{m} (z - z_\alpha)}{\prod_{1}^{n} (z - p_\beta)}, \tag{1.1122}$$

unde z_α, $\alpha = 1, 2, ..., m$, sînt zerourile, p_β, $\beta = 1, 2, ..., n$, sînt polii și $k \in \mathbf{R}_+$ este un parametru variabil al sistemului deschis.

Se presupune că $z_\alpha \neq p_\beta$, $\alpha = 1, 2, ..., m$, $\beta = 1, 2, ..., n$.

Locul rădăcinilor sistemului din fig. II.19, *a* este locul geometric al rădăcinilor ecuației caracteristice intrare-ieșire (1.121) pentru $k \in \mathbf{R}_+$ variabilă parametrică. Evident, evaluarea locului rădăcinilor se face, în cazul sistemelor automate discrete în timp, prin raportare la cercul $|z| = 1$.

În ceea ce privește modul de determinare a funcției de transfer în z se poate consulta anexa B și exemplul de la I.1.4.8.

1.2.6. Stabilitatea IMEM între punctele de eșantionare

Rezultatele și tehnicile expuse pînă aici permit analiza stabilității sistemelor discrete în timp, dar numai pentru evoluții discrete în timp. În condițiile în care toate semnalele unui sistem sînt discrete în timp, o astfel de analiză oferă o imagine concludentă asupra proprietăților sale de stabilitate. Există numeroase situații în care o parte a unui sistem discret în timp este constituită de elemente cu evoluție continuă în timp. În această categorie de sisteme se încadrează sistemul automat studiat la I.1.4.8.

Vom arăta, în continuare, pentru cazul sistemelor cu structura din fig. II.19, *b* (care este o formă tipică pentru cea din fig. I.14), în ce condiții stabilitatea IMEM în punctele de eșantionare implică stabilitatea IMEM între punctele de eșantionare.

Reamintim că schema din fig. II.19, *b* este reductibilă la cea standard din fig. II.19, *a*, în care funcția de transfer în z a sistemului deschis se calculează cu

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_R(z) G_F(z)\right\} = (1 - z^{-1}) G_R(z)\, \mathcal{Z}\left\{\frac{G_F(s)}{s}\right\}. \quad (1.123)$$

Indicaţii privind calculul transformatei $\mathcal{Z}\left\{\frac{G_F(s)}{s}\right\}$ se găsesc în anexa B.

Teorema 23. Fie sistemul automat discret în timp cu schema din fig. II.19, *b*, stabil IMEM în punctele de eşantionare. Dacă partea continuă reprezentată de $G_F(s)$ are cel mult un pol în origine şi ceilalţi poli sînt toţi situaţi în Re $s < 0$ atunci sistemul automat discret în timp este stabil IMEM între punctele de eşantionare.

D. Dacă sistemul automat discret în timp este stabil IMEM atunci pentru orice $u(t)$, $t \geqslant 0$, mărginit, toate mărimile intermediare ale sistemului, considerate ca şiruri de eşantioane, sînt mărginite. Rezultă că $\bar{x}_a$ şi x_c, care sînt funcţii scară, sînt de asemenea mărginite. În ipotezele precizate pentru $G_F(s)$, urmează că şi $y(t)$ este mărginită pentru orice $t \geqslant 0$, deoarece perioada de eşantionare T, care satisface teorema eşantionării, este finită. ■

Rezultatul demonstrat mai sus este o condiţie suficientă de stabilitate IMEM între punctele de eşantionare. Ipotezele ei sînt îndeplinite în marea majoritate a aplicaţiilor, fapt care justifică, în respectivele aplicaţii, limitarea analizei numai la stabilitatea IMEM în punctele de eşantionare. În cazul în care ipoteza *teoremei 23* privitoare la $G_F(s)$ nu este satisfăcută, analiza stabilităţii IMEM în punctele de eşantionare nu este suficientă. Pentru o analiză exhaustivă a stabilităţii IMEM se utilizează metoda transformatei z modificate sau a transformatei z divizate, [K 1].

1.2.7. Aplicaţie: reglarea automată discretă a temperaturii unui cuptor electric

Se consideră sistemul automat analizat ca exemplu la I.1.4.8. Se cere să se studieze posibilităţile de acordare a parametrilor k_r, T_r şi T, care definesc algoritmul de reglare discretă, astfel încît sistemul automat să fie stabil IMEM.

Ţinînd seama de relaţia (1.1.48) de la I.1.4.8 rezultă că polinomul polilor are expresia

$$\Delta(z) = z^{\alpha+2} - (b + 1)\, z^{\alpha+1} + bz^{\alpha} + kz - ka, \quad (1.124)$$

unde

$$a = \frac{T_r}{T + T_r}, \quad b = e^{-\frac{T}{T_c}}, \quad k = \frac{1 - b}{a} k_r k_p k_c k_t, \; \alpha = \frac{T_m}{T}. \quad (1.125)$$

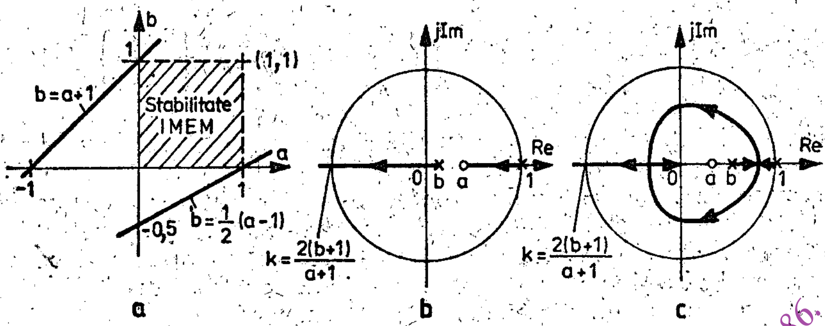


Fig. II.20. *a* — Domeniul parametric de stabilitate IMEM al sistemului de reglare automată a temperaturii ($\alpha = 0$, $k = 1$);
b — Locul rădăcinilor pentru $\alpha = 0$ și $a > b$;
c — Locul rădăcinilor pentru $a \leqslant b$.

Pentru simplificarea determinării domeniului parametric de stabilitate, în condițiile în care $0 \leqslant a < 1$ și $0 < b < 1$, vom considera $k = 1$ și vom examina cazurile $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$.

1° $\alpha = 0$ (timpul mort T_m este neglijabil în raport cu T). Polinomul (1.124) devine

$$\Delta(z) = z^2 - bz + b - a. \tag{1.126}$$

În conformitate cu rezultatele de la *exemplul 1.14*, putem scrie condițiile

$$\begin{cases} b < a + 1 \\ b > \dfrac{1}{2}(a - 1), \end{cases} \tag{1.127}$$

care permite delimitarea domeniului parametric de stabilitate IMEM, fig. II.20, *a* (cuprinde și pătratul $0 \leqslant a < 1$, $0 < b < 1$). Sistemul este stabil IMEM pentru orice $T > 0$, orice $T_r \geqslant 0$ și pentru $k = 1$.

Pentru a analiza influența factorului k_r asupra stabilității IMEM se trasează locul rădăcinilor pentru $k \in \mathbf{R}_+$ — fig. II.20, *b*, *c*. Rezultă că pentru $a \leqslant b$ există posibilități mai largi de plasare a zerourilor lui $\Delta(z)$ prin valori k adecvate.

2° $\alpha = 1$ ($T = T_m$). Polinomul (1.124) are forma

$$\Delta(z) = z^3 - (b + 1)z^2 + (b + 1)z - a. \tag{1.128}$$

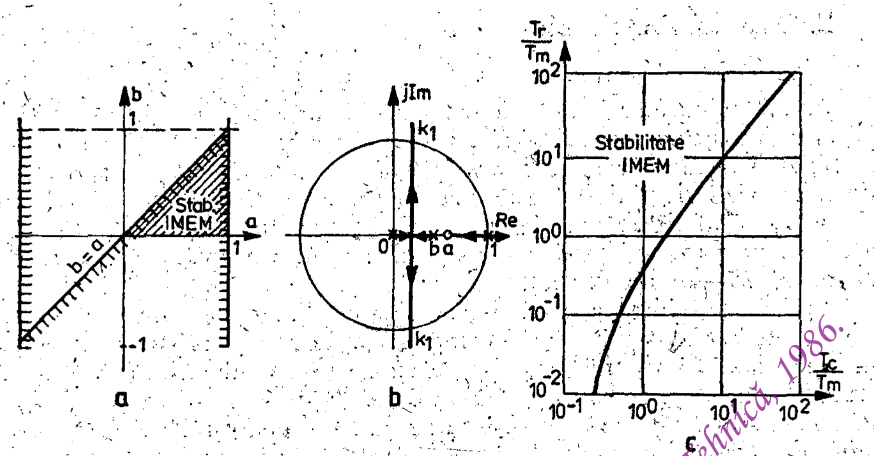


Fig. II.21. *a* — Domeniul parametric de stabilitate IMEM al sistemului de reglare automată a temperaturii ($\alpha = 1$ şi $k = 1$); *b* — Locul rădăcinilor pentru $\alpha = 1$ şi $a > b$; *c* — Domeniul parametric de stabilitate IMEM pentru $\alpha = 1$

Utilizînd schema Jury-Blanchard (1.106), cu (1.107), se obţin condiţiile

$$\begin{gathered} -1 < a < 1 \\ a > b, \end{gathered} \tag{1.129}$$

iar domeniul parametric de stabilitate IMEM, cu restricţiile $0 \leqslant a < 1$ şi $0 < b < 1$ este reprezentat în fig. II.21, *a*.

Locul rădăcinilor pentru $a > b$ este reprezentat în fig. II.21, *b*.

În ceea ce priveşte alegerea parametrilor T, T_r şi k_r se ţine seama de (1.129) şi de $k < k_1$, fig. II.21, *b*. Din inegalitatea $a > b$, în conformitate cu (1.125) şi $T = T_m$, se obţine

$$2{,}3 \lg\left(1 + \frac{T_m}{T_r}\right) < \frac{T_m}{T_c}, \tag{1.130}$$

din care se poate determina T_r — fig. II.21, *c*.

Pentru alegerea lui k_r, ţinînd seama de (1.125), rezultă condiţia

$$k_r < \frac{T_r k_1}{(T_m + T_r)\left(1 - e^{-\frac{T_m}{T_c}}\right) k_p k_c k_t}. \tag{1.131}$$

2. Tehnici matriceale

Aceste tehnici se aplică sistemelor dinamice liniare constante şi se bazează pe utilizarea *matricii de evoluţie* A a sistemului — în cazul stabilităţii asimptotice (v. *teoremele 6 şi 8* de la I.5), sau pe utilizarea fie a matricii A, ţinîndu-se seama de proprietăţile de controlabilitate şi de observabilitate a stării sistemului, fie a unor matrici pătratice asociate polinomului polilor — în cazul stabilităţii IMEM (v. *teoremele 7—11 şi 15—19* de la I.6).

În fond stabilitatea unui sistem dinamic liniar constant este determinată de localizarea în planul complex a valorilor proprii ale matricii A, în cazul stabilităţii interne, sau de localizarea polilor matricii sale de transfer, în cazul stabilităţii externe. În aceste circumstanţe *o analiză directă* a stabilităţii asimptotice sau IMEM se poate realiza prin determinarea formei canonice diagonale (Jordan) a sistemului. O astfel de abordare constă în folosirea unor procedee de calcul numeric adecvate, [D 1, 2], [S 1], [V 1], [W 1, 2].

Ca şi în cazul tehnicilor polinomiale, în afară de analiza directă a stabilităţii, s-au dezvoltat şi *tehnici indirecte*, prin care este posibilă determinarea regiunii din planul complex în care sînt localizate valorile proprii ale unei matrici, fără cunoaşterea efectivă a respectivelor valori proprii.

Pentru a realiza o tratare relativ unitară a problemei stabilităţii în cazul sistemelor continue în timp şi în cel al sistemelor discrete în timp, vom defini două noţiuni analoage cu noţiunile de polinom hurwitzian şi de polinom convergent.

Definiţia 1. Matricea A, reală de ordinul n, se numeşte hurwitziană dacă toate valorile ei proprii sînt situate în semiplanul $\operatorname{Re} s < 0$.

Definiţia 2. Matricea A, reală de ordinul n, se numeşte convergentă dacă toate valorile ei proprii sînt situate în interiorul cercului $|z| = 1$.

Pe baza acestor definiţii se pot enunţa două rezultate echivalente respectiv cu *teoremele 6 şi 8* de la I.5.

Teorema 1. Sistemul dinamic (I.5.32) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă matricea A este hurwitziană.

Teorema 2. Sistemul dinamic (I.5.37) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă matricea A este convergentă.

Ca şi în cazul tehnicilor polinomiale, considerăm utilă enunţarea unor condiţii necesare ca matricea A să fie hurwitziană, respectiv convergentă. Pentru aceasta avem nevoie de un rezultat pregătitor, referitor la relația dintre elementele diagonalei principale a unei matrici pătratice de ordinul n și coeficientul termenului de gradul $n-1$ al polinomului său caracteristic.

Fie A o matrice reală de ordin n, cu elementele a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, și cu polinomul caracteristic

$$\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{2.1}$$

Teorema 3. Pentru orice matrice A are loc

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2.2}$$

D. Se știe că polinomul caracteristic se determină, conform definiției, cu

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & s - a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Demostrația se face prin inducție completă. Pentru $k = 1, 2, 3$, relația (2.2) are loc în mod evident. Pentru $k = n - 1$ are loc prin ipoteză

$$\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n-1} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \ldots & -a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \ldots & s - a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = s^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}\right) s^{n-2} + \ldots \tag{2.4}$$

Rămîne de arătat că pentru $k = n$ are loc (2.2). Dezvoltînd determinantul (2.3) după elementele ultimei linii putem scrie

$$\Delta(s) = -(-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1}(s) - (-1)^{n+2} a_{n2} M_{n2}(s) - \ldots + \\ + (-1)^{2n}(s - a_{nn}) M_{nn}(s), \tag{2.5}$$

în care $M_{n1}(s), \ldots, M_{nn-1}(s)$ sînt minorii corespunzători elementelor $-a_{n1}, \ldots, -a_{nn-1}$, polinoame de grad cel mult $n - 2$ în s, iar $M_{nn}(s)$ este minorul corespunzător elementului $(s - a_{nn})$, polinom de gradul $n - 1$ în s, identic cu determinantul (2.4). În atare condiții din (2.5) rezultă

$$\Delta(s) = (s - a_{nn})\left[s^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}\right) s^{n-2} + \ldots\right] + \ldots = s^n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) s^{n-1} + \ldots,$$

ceea ce înseamnă că (2.2) este adevărată. ■

Pe baza *teoremei 3* se pot demonstra următoarele două condiţii necesare.

Teorema 4. O condiţie necesară ca matricea A să fie hurwitziană este ca

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} < 0. \tag{2.6}$$

Demonstraţia este imediată şi se bazează pe faptul că dacă A este hurwtizană atunci $a_1 > 0$ (*teorema 3* de la subcap. 1).

Teorema 5. O condiţie necesară ca matricea A să fie convergentă este ca

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right| < n. \tag{2.7}$$

D. Dacă A este convergentă atunci valorile ei proprii satisfac condiţiile $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Conform primei formule Viète putem scrie

$$|a_1| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| < n,$$

de unde, ţinînd seama de (2.2), rezultă (2.7). ■

Examinînd condiţiile (2.6) şi (2.7) rezultă că proprietatea unei matrici de a fi hurwitziană sau convergentă implică în mod necesar ca elementele diagonalei principale să aibă anumite proprietăţi. Se va vedea în subcapitolul următor că această idee a fost folosită în scopul obţinerii unor condiţii suficiente, toate bazate pe un anumit gen de dominanţă a elementelor diagonalei principale, faţă de celelalte elemente ale matricii, în sensul liniilor sau al coloanelor.

2.1. Tehnici de localizare a valorilor proprii prin inegalităţi

Această categorie de tehnici permite evaluarea cu aproximaţie, prin inegalităţi constituite chiar cu elementele unei matrici pătratice, a unei regiuni din planul complex în care sînt situate valorile proprii ale respectivei matrici. Pentru a se putea decide dacă o matrice este hurwitziană sau convergentă trebuie ca regiunea de localizare să fie situată în întregime în semiplanul $\operatorname{Re} s < 0$ sau respectiv în interiorul cercului $|z| = 1$. Din acest motiv rezultatele privitoare la stabilitatea asimptotică, care se pot formula pe baza unei atare evaluări, sînt condiții suficiente. Acest dezavantaj, după cum se va vedea mai jos, este parțial compensat de simplitatea inegalităților de evaluare a localizării valorilor proprii.

2.1.1. Discurile lui Gherşgorin

Fie A o matrice reală de ordin n, cu elementele a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, şi fie discurile lui Gherşgorin, [G1],

$$D_i = \{s \in \mathbf{C};\ |s - a_{ii}| \leqslant r_i\},\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.8}$$

asociate matricii A, în care

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|. \tag{2.9}$$

Teorema 6 (Gherşgorin). Fiecare valoare proprie a matricii A se află în cel puțin unul din discurile D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

D. După cum se ştie (v. I.5.2.1), dacă λ este o valoare proprie a matricii A atunci există un vector propriu $v \neq 0$ astfel încît $Av = \lambda v$ sau detaliat

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.10}$$

unde v_i sînt componentele vectorului v.

Fie $|v_k| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |v_j|$. În aceste condiții pentru $i = k$ din (2.10) rezultă

$$|\lambda - a_{kk}|\,|v_k| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} v_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|v_j| \leqslant |v_k|\, r_k.$$

Întrucît $v \neq 0$, rezultă $|v_k| > 0$, ceea ce implică $|\lambda - a_{kk}| \leqslant r_k$, respectiv $\lambda \in D_k$. ■

Este evident că pentru o aceeaşi matrice A se poate defini, pe coloane, încă un set de discuri Gherşgorin

$$D_j^T = \{s \in \mathbf{C};\ |s - a_{jj}| \leqslant r_{jj}^T\},\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.11}$$

unde

$$r_j^T = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \tag{2.12}$$

(ceea ce constituie de fapt discurile lui Gherşgorin asociate matricii A^T), pentru care se poate formula următorul rezultat.

Teorema 7. Fiecare valoare proprie a matricii A se află în cel puţin unul din discurile D_j^T, $j = 1, 2, ..., n$.

Fie

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \tag{2.13}$$

$$D^T = \bigcup_{j=1}^{n} D_j^T \tag{2.14}$$

şi fie

$$\sigma(A) = \{s \in \mathbf{C};\ s = \lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n\} \tag{2.15}$$

spectrul matricii A, unde λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, sînt valorile proprii ale matricii A.

Rezultatul esenţial pentru localizarea valorilor proprii ale matricii A, care se obţine direct din *teoremele 6 şi 7* constă în faptul că $\sigma(A) \subseteq D$ şi $\sigma(A) \subseteq D^T$, ceea ce implică $\sigma(A) \subseteq D \cap D^T$, cu precizarea că egalităţile sînt posibile numai în cazul matricilor diagonale. În aceste condiţii se pot enunţa următoarele rezultate privitoare la natura matricii A.

Teorema 8. Dacă are loc unul din următoarele două seturi de inegalităţi

$$-a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.16}$$

$$-a_{jj} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \ j = 1, 2, ..., n, \tag{2.17}$$

atunci matricea A este hurwitziană.

D. Dacă au loc inegalităţile (2.16) atunci $-a_{ii} > r_i$, $i = 1, 2, ..., n$, ceea ce implică $\sigma(A) \subseteq D \subset \{s \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\ s < 0\}$. Acest lucru este suficient pentru ca A să fie hurwitziană. Demonstraţia pornind de la (2.17) decurge în acelaşi mod. Să observăm în final că (2.16) sau (2.17) se pot utiliza numai dacă $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, ..., n$. ■

În acelaşi fel se demonstrează şi afirmaţia următoare.

Teorema 9. Dacă are loc unul din următoarele două seturi de inegalități

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{2.19}$$

atunci matricea A este convergentă.

Să notăm și aici că (2.18) sau (2.19) se pot aplica numai dacă $|a_{ii}| < 1$, $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplul 2.1. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} -5{,}1 & 1{,}5 & 0{,}3 & -2{,}2 \\ 0{,}4 & -3{,}2 & -1{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 2{,}1 & -4{,}1 & -0{,}7 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & -1{,}2 & -2{,}2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine regiunea $D \cap D^T$ în care sînt localizate valorile ei proprii.

În conformitate cu (2.8) și (2.11) se pot defini următoarele două seturi de discuri Gherșgorin:

$$D: \ |s + 5{,}1| \leqslant 4; \ |s + 3{,}2| \leqslant 2{,}5; \ |s + 4{,}1| \leqslant 3{,}4; \ |s + 2{,}2| \leqslant 1{,}8,$$

$$D^T: \ |s + 5{,}1| \leqslant 1{,}2; \ |s + 3{,}2| \leqslant 4; \ |s + 4{,}1| \leqslant 3{,}4; \ |s + 2{,}2| \leqslant 3{,}1,$$

care sînt reprezentate în fig. II.22. Intersecția lor, reprezentată hașurat, este la stînga axei imaginare, ceea ce înseamnă că A este hurwitziană. Acest ultim rezultat se poate

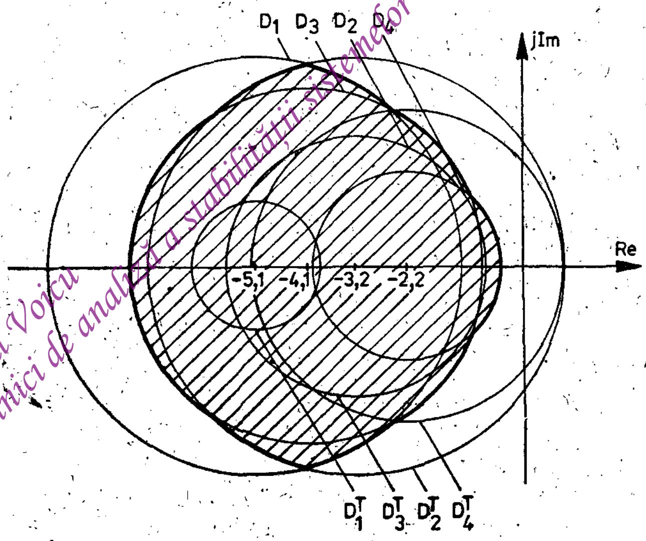


Fig. II.22. Regiunea de localizare a valorilor proprii *exemplul 2.1.*

obține și cu *teorema 8*. Pentru (2.16) putem scrie într-adevăr $5,1 > 4$; $3,2 > 2,5$; $5,1 > 3,4$; $2,2 > 1,8$.

O posibilitate de micșorare a regiunii $D \cap D^T$ constă în transformarea matricii A prin asemănare (conform relației (I.5.10)). Pentru ca volumul de calcule să nu crească prea mult se utilizează o transformare de forma

$$A_\alpha = \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}) A \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{2.20}$$

unde $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt niște numere care se determină astfel încît regiunea $D \cap D^T$ să fie cît mai mică posibil.

Este ușor de observat că elementele matricii A_α sînt $\frac{1}{\alpha_i} a_{ij} \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Întrucît matricile A și A_α au același spectru $\sigma(A)$ rezultă că *teoremele 8 și 9* se pot aplica și matricii A_α, obținîndu-se următoarele rezultate relative la natura matricii A.

Teorema 10. Dacă există numerele $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît să aibă loc unul din următoarele două seturi de inegalități

$$-a_{ii} > \frac{1}{\alpha_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \alpha_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.21}$$

$$-a_{jj} > \alpha_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \frac{1}{\alpha_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.22}$$

atunci matricea A este hurwitziană.

Teorema 11. Dacă există numerele $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, .., n$, asfel încît să aibă loc unul din următoarele două seturi de inegalități

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \alpha_j < \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \frac{1}{\alpha_i} < \frac{1}{\alpha_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.24}$$

atunci matricea A este convergentă.

Aplicarea practică a *teoremelor 10 și 11* este legată de o dificultate majoră, și anume de determinarea numerelor $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. După cum s-a arătat în [V 2, 3] existența unei soluții $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pentru oricare din sistemele de inecuații (2.21), (2.22) depinde în exclusivitate de matricea A. Privitor la semnificația exactă a numerelor $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, din punctul de vedere al evaluării răspunsului liber și al stabilizării sistemului $\dot{x} = Ax + Bu$ se pot consulta [V 4—8].

Pentru a enunța rezultatele demonstrate în [V 2, 3] în legătură cu existența unei soluții pentru oricare din sistemele (2.21), (2.22), respectiv pentru oricare din sistemele (2.23), (2.24), se definesc: matricea

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & |a_{13}| & \ldots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & a_{22} & |a_{23}| & \ldots & |a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ |a_{n1}| & |a_{n2}| & |a_{n3}| & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

ai cărei minori principali diagonali sînt $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, și matricea

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} |a_{11}| - 1 & |a_{12}| & |a_{13}| & \ldots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| - 1 & |a_{23}| & \ldots & |a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ |a_{n1}| & |a_{n2}| & |a_{n3}| & \ldots & |a_{nn}| - 1 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

ai cărei minori principali diagonali sînt $\widetilde{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 12. Dacă

$$(-1)^i \bar{A}_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.27}$$

atunci matricea A este hurwitziană.

Teorema 13. Dacă

$$(-1)^i \widetilde{A}_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.28}$$

atunci matricea A este convergentă.

Trebuie să observăm și aici că aplicarea condițiilor (2.27) și (2.28) este posibilă numai dacă $a_{ii} < 0$ și respectiv $|a_{ii}| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplul 2.2. Fie procesul de reînnoire cu piese de schimb, analizat la I.1.4.5, cu $n = 2$, descris de ecuația intrare-stare

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Dacă aprovizionarea se face în funcție de numărul de piese care se înlocuiesc în anul k și anume în funcție de $(1 - p_0)\, x_0(k)$, $(1 - p_1)\, x_1(k)$ și $x_2(k)$ atunci legea de conducere a procesului poate fi de forma

$$u(k) = a\,[(1 - p_0)\, x_0(k) + (1 - p_1)\, x_1(k)] + b x_2(k),$$

unde $a, b > 0$.

Ce condiţie trebuie să satisfacă a şi b astfel încît sistemul să fie asimptotic stabil? Cu legea de conducere adoptată matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} a(1-p_0) & a(1-p_1) & b \\ p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \end{bmatrix},$$

pentru care

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a(1-p_0)-1 & a(1-p_1) & b \\ p_0 & -1 & 0 \\ 0 & p_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

În conformitate cu (2.28) obţinem condiţiile

$$\begin{cases} a(1-p_0)-1<0 \\ a(1-p_0)+ap_0(1-p_1)-1<0 \\ a(1-p_0)+ap_0(1-p_1)+bp_0p_1-1<0, \end{cases}$$

din care, în baza faptului că $p_0p_1 < p_0$, rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-p_0p_1} \\ b < \dfrac{1-(1-p_0p_1)a}{p_0p_1}. \end{cases}$$

2.1.2. Alte rezultate de tip inegalitate

S-a văzut mai sus că pe baza discurilor lui Gherşgorin se pot formula condiţii suficiente de stabilitate. Numeroşi autori, plecînd de la discurile lui Gherşgorin, au obţinut o serie de condiţii de tip inegalitate, care pot furniza rezultate mai bune decît discurile lui Gherşgorin atît în ceea ce priveşte localizarea valorilor proprii, cît şi în ceea ce priveşte stabilitatea asimptotică.

Vom da în continuare, fără demonstraţie, cîte două astfel de rezultate datorate lui Ostrowski, [C2], care pot fi mai bune decît respectiv *teoremele 8 şi 9*.

Teorema 14. Dacă există γ, cu $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, astfel încît

$$-a_{kk} > \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right)^{\gamma} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|\right)^{1-\gamma}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.29)$$

atunci matricea A este hurwitziană.

Teorema 15. Dacă există γ, cu $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, astfel încît

$$|a_{kk}| + \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right)^{\gamma} \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|\right)^{1-\gamma} < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.30}$$

atunci matricea A este convergentă.

Este ușor de observat că pentru $\gamma = 0$ și $\gamma = 1$ din (2.29) (2.30) se obțin (2.16) și respectiv (2.17) și (2.18) și respectiv (2.19).

Teorema 16. Dacă există numerele $k_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu $\sum_{1}^{n} 1/(k_i + 1) \leqslant 1$, și $p > 0$, $q > 0$ cu $1/p + 1/q = 1$, astfel încît să aibă loc unul din următoarele două seturi de inegalități

$$-a_{ii} > k_i^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.31}$$

$$-a_{jj} > k_j^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.32}$$

atunci matricea A este hurwitziană.

Teorema 17. Dacă există numerele $k_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu $\sum_{1}^{n} 1/(k_i + 1) \leqslant 1$, și $p > 0$, $q > 0$ cu $1/p + 1/q = 1$, astfel încît să aibă loc unul din următoarele două seturi de inegalități

$$|a_{ii}| + k_i^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.33}$$

$$|a_{jj}| + k_j^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.34}$$

atunci matricea A este convergentă.

Și în acest caz este ușor de observat că pentru $p = 1$ și $q = \infty$ din (2.31), (2.32) și (2.33), (2.34) se obțin respectiv (2.16), (2.17) și (2.18) (2.19).

Alte rezultate, similare cu cele enunțate prin *teoremele 14—17*, dar mai puțin avantajoase pentru aplicații, se pot formula pe baza inegalităților lui Brauer și a inegalității lui Fan-Ky și Hoffmann, [C2].

Exemplul 2.3. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0,5 & 0,7 & -1,2 \\ 1 & -6 & 1 & 1 \\ 0,5 & -1 & -3,8 & -3 \\ -1,5 & 0 & 1,5 & -4,4 \end{bmatrix}$$

Să se determine natura acestei matrici.

Dacă se aplică (2.27) se obțin $\bar{A}_1 = -4 < 0$, $\bar{A}_2 = 23,5 > 0$, $\bar{A}_3 = -82,25 < 0$ și $\bar{A}_4 = 186,51 > 0$, ceea ce înseamnă că A este hurwitziană. Dacă se aplică (2.29), pentru $\gamma = 0,4$ se obțin $4 > 2,74$; $6 > 1,98$; $3,8 > 3,67$; $4,5 > 4,17$. Aceasta înseamnă că spectrul $\sigma(A)$ este inclus în reuniunea următoarelor discuri $|s + 4| \leqslant 2,74$, $|s + 6| \leqslant 1,98$, $|s + 3,8| \leqslant 3,67$ și $|s + 4,5| \leqslant 4,17$.

2.2. Tehnici de localizare a valorilor proprii prin șirul puterilor unei matrici

Dacă un sistem dinamic este cunoscut sub forma ecuațiilor sale intrare-stare-ieșire, este posibilă analiza stabilității fără determinarea polinomului caracteristic, cu ajutorul șirului puterilor unei matrici pătratice. Întrucît tehnicile care s-au dezvoltat pe această idee au la bază condiția necesară și suficientă (I.5.40), vom începe expunerea cu cazul sistemelor discrete în timp.

2.2.1. Sisteme discrete în timp

Teorema 18. O condiție necesară și suficientă ca matricea A să fie convergentă este ca

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0. \tag{2.35}$$

Pentru demonstrație se procedează ca în cazul *teoremei 8* de la I.5.2.5, deoarece deosebirea dintre (I.5.40) și (2.35) este neesențială în situația în care A este o matrice cu elemente constante.

Convertirea condiției necesare și suficiente (2.35), care de altfel justifică și denumirea de *matrice convergentă* dată lui A (și polinomului ei caracteristic), într-un procedeu practic constă în următoarele. În primul rînd se extrage din șirul de matrici A^k, $k \in \mathbf{N}$, subșirul A^{2^k}, $k \in \mathbf{N}$, care are aceleași proprietăți ca șirul din care a fost extras, dar converge mai rapid la matricea nulă în cazul în care A este convergentă.

Practic acest lucru este realizabil foarte ușor deoarece se pot calcula succesiv $A^2 = A \cdot A$, $A^4 = A^2 \cdot A^2$, $A^8 = A^4 \cdot A^4$, $A^{16} = A^8 \cdot A^8$ etc., astfel că după un număr de numai 10 pași (adică 10 ridicări la puterea a doua) se ajunge la $A^{1.024}$. În al doilea rînd nu este necesar să se facă un număr prea mare de pași pentru a vedea dacă $\lim\limits_{k \to \infty} A^{2^k} = 0$. Calculele se pot întrerupe atunci cînd fiecare element $m_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, al matricei $M^{(k)} = A^{2^k}$ satisface condiția

$$|m_{ij}^{(k)}| < \frac{1}{n}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.36}$$

Justificarea acestei condiții se bazează pe *teorema 9*. Este ușor de verificat că dacă are loc (2.36) atunci matricea $M^{(k)}$ satisface (2.18) sau (2.19), ceea ce înseamnă că $M^{(k)}$ și respectiv A sînt convergente.

Este evident că în locul condiției (2.36) se pot folosi drept condiții de stop și inegalitățile (2.18) sau (2.19), care sînt mai puțin restrictive ca (2.36).

Dacă dimpotrivă $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii}^{(k)}\right| \geqslant n$, rezultă că $M^{(k)}$ nu satisface condiția necesară de convergență (2.7). În acest caz se trage concluzia că matricea A nu este convergentă.

Pentru a stabili dacă valorile proprii ale matricei A sînt situate în interiorul cercului $|z| = r$, $0 < r \leqslant 1$, procedeul de mai sus urmează să se aplice în același fel matricii $r^{-1}A$.

Exemplul 2.4. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & -0,1 \\ -0,6 & 1,3 & -0,4 \\ -0,6 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Să se verifice dacă această matrice este convergentă.

Se observă că este satisfăcută condiția necesară de convergență (2.7), în timp ce condiția suficientă (2.28) nu se poate aplica deoarece $a_{22} = 1,3 > 1$.

Vom arăta că aplicînd procedeul expus mai sus există un k pentru care are loc (2.36). Într-adevăr, calculînd $M^{(k)} = A^{2^k}$, pentru $k = 4$ se obține

$$M^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,05765 & 0,11012 & -0,11012 \\ -1,11846 & 1,02353 & -0,59307 \\ -1,11846 & 0,85576 & -0,42595 \end{bmatrix}$$

în timp ce pentru $k = 5$ rezultă

$$M^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,00001 & 0,00078 & -0,00078 \\ -0,10298 & 0,07022 & -0,03389 \\ -0,10298 & 0,06943 & -0,03509 \end{bmatrix}.$$

Așadar, $|m_{ij}^{(5)}| < \dfrac{1}{3}$, ceea ce înseamnă că matricea A este convergentă.

2.2.2. Sisteme continue în timp

După cum s-a arătat la I.5.2.1, ecuaţia caracteristică a matricii A se determină cu expresia

$$\det\,[Is - A] = 0. \tag{2.37}$$

Pentru a putea utiliza *teorema 18* şi în cazul sistemelor continue în timp vom face în (2.37) schimbarea $s = (z+1)/(z-1)$ — transformarea omografică (1.96). În aceste condiţii din (2.37) rezultă ecuaţia

$$\det\left[I\frac{z+1}{z-1} - A\right] = 0. \tag{2.38}$$

Eliminînd numitorul în (2.38) şi operînd după cum se arată mai jos

$$\det\,[(I-A)z + (I+A)] = \det\,[I-A]\det\,[Iz + (I-A)^{-1}(I+A)] =$$

$$= \det\,(I-A)\det\,[Iz - (I-A)^{-1}(-I-A)],$$

se obţine

$$\det\,[Is - M] = 0, \tag{2.39}$$

în care

$$M = (I-A)^{-1}(-I-A). \tag{2.40}$$

Întrucît prin transformarea omografică se stabileşte o corespondenţă biunivocă între semiplanul Re $s < 0$ şi interiorul cercului $|z| = 1$, rezultă că matricea M poate fi utilizată pentru analiza naturii matricii A pe baza *teoremei 18*.

Teorema 19. O condiţie necesară şi suficientă ca matricea A să fie hurwitziană este ca M să fie convergentă.

O simplificare privind calculul matricei M se poate realiza în felul următor:

$$M = (I-A)^{-1}(I-A-2I) = I - 2(I-A)^{-1}. \tag{2.41}$$

Trebuie să remarcăm faptul că din punct de vedere practic inversarea matricei $I-A$ poate ridica o serie de dificultăţi. O posibilitate de a evita inversarea matricei $I-A$ constă în a înlocui matricea A cu εA, unde $\varepsilon > 0$ este un scalar care se alege astfel încît $\|\varepsilon A\| < 1$. Întrucît A este hurwitziană dacă şi numai dacă εA este hurwitziană, se poate folosi, pentru analiza naturii matricii A, în locul matricii M, matricea

$$M_\varepsilon = I - 2(I - \varepsilon A)^{-1}. \tag{2.42}$$

În situația în care $\| \varepsilon A \| < 1$, seria matriceală $\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon A)^k$ este convergentă și are suma $(I - \varepsilon A)^{-1}$, deoarece $(\varepsilon A)^k \to 0$ pentru $k \to +\infty$. Ca urmare M_ε poate fi aproximată prin

$$M_\varepsilon \approx I - 2 \sum_{k=0}^{m} (\varepsilon A)^k. \tag{2.43}$$

Valoarea lui m se alege în funcție de precizia dorită. Să observăm și aici că dacă convergența seriei matriceale este slabă atunci pentru a realiza precizia dorită trebuie ca m să fie relativ mare.

Pentru a stabili dacă valorile proprii ale matricii A se află în semiplanul Re $s < -\alpha$, $\alpha > 0$, procedeul expus mai sus se aplică în același mod matricii $A + \alpha I$.

Exemplul 2.5. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se stabilească dacă această matrice este hurwitziană.

Se observă că este satisfăcută condiția necesară (2.6), dar condiția suficientă (2.27) nu se poate aplica deoarece $a_{33} = 2 > 0$.

Folosind (2.40) se obține

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ -1 & 7/6 & -5/6 \end{bmatrix},$$

care satisface condiția necesară (2.6), dar căreia nu i se poate aplica condiția suficientă (2.28), deoarece $m_{22} = 5/3 > 1$. Procedînd ca la *exemplul 2.4* vom arăta că pentru M^4 condiția (2.36) este satisfăcută. Într-adevăr

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}33333 & 0{,}72222 & -0{,}61111 \\ -0{,}33333 & 0{,}47222 & -0{,}36111 \end{bmatrix}$$

și

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0625 & -0{,}0625 \\ -0{,}03704 & 0{,}14969 & -0{,}13734 \\ -0{,}03704 & 0{,}08719 & -0{,}07484 \end{bmatrix}$$

pentru care $m_{ij}^{(4)} < 1/3$.

2.3. Tehnici bazate pe matrici asociate

2.3.1. Matricea companion a unui polinom

Rezultatele expuse în paragrafele precedente conduc în mod natural la problema localizării zerourilor polinomului polilor cu ajutorul unei matrici asociate acestuia. Se știe că polinomului (2.1) i se poate asocia matricea de tip Frobenius

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

numită *matricea companion* a polinomului $\Delta(s)$, cu proprietatea

$$\Delta(s) = \det\ (Is - A). \tag{2.45}$$

Într-adevăr, putem scrie succesiv

$$\det\ (Is - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & s & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & s + a_1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} a_n M_{n1}(s) + (-1)^{n+2} a_{n-1} M_{n2}(s) + \dots + (-1)^{2n-1} a_2 M_{nn-1}(s) + $$
$$+ (-1)^{2n}(s + a_1) M_{nn}(s), \tag{2.46}$$

în care

$$M_{nk}(s) = (-1)^{n-k} s^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots, n, \tag{2.47}$$

sînt minorii matricii caracteristice $Is - A$ corespunzători elementelor ultimei sale linii. Înlocuind (2.47) în (2.46) se obține imediat (2.45), cu $\Delta(s)$ de forma (2.1).

Avînd în vedere faptul că matricea companion a unui polinom se construiește foarte ușor, rezultă că tehnicile bazate pe șirul puterilor unei matrici, expuse la 2.2 se pot aplica imediat.

Nu același lucru se poate afirma despre rezultatele de tip inegalitate de la 2.1. Într-adevăr, examinînd rezultatele bazate pe discurile lui Gherşgorin (v. 2.1.1) se trage concluzia că numai *teorema 13* poate fi aplicată matricei (2.44), iar ceea ce se obţine coincide cu *teorema 22* de la 1.2.4, pentru $a_0 = 1$.

2.3.2. Partea simetrică a unei matrici

Pentru a obţine rezultate privitoare la localizarea valorilor proprii într-o bandă verticală din planul complex se poate face uz de teorema următoare, valabilă pentru orice matrice A, reală de ordinul n, a cărei parte simetrică se determină cu relaţia

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T). \tag{2.48}$$

Fie λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, valorile proprii ale matricii A şi fie μ_{min}, μ_{max} valorile proprii minimă, respectiv maximă ale matricii A_s (valorile proprii ale oricărei matrici reale simetrice sînt toate reale, [B5], [G1]).

Teorema 20 (Bendixson). Pentru orice matrice A are loc

$$\mu_{min} \leqslant \operatorname{Re} \lambda_i \leqslant \mu_{max}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.49}$$

D. Fie forma hermitică (v. anexa D)

$$y = x^* A_s x, \quad x \in \mathbf{C}^n, \tag{2.50}$$

unde x^* este conjugatul transpus al vectorului x, şi fie transformarea

$$x = V_s \tilde{x}, \tag{2.51}$$

unde V_s este matricea modală a matricii A_s. În cazul matricilor reale simetrice V_s este ortogonală, adică satisface condiţia $V_s^T = V_s^{-1}$, [B5].

Înlocuind (2.51) în (2.50) se obţine

$$y = \tilde{x}^* V_s^{-1} A_s V_s \tilde{x} = \tilde{x}^* \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\tilde{x} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j \bar{\tilde{x}}_j, \tag{2.52}$$

în care μ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, sînt valorile proprii ale matricii A_s şi $\tilde{x}_j$, $\bar{\tilde{x}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sînt componentele vectorului $\tilde{x}$ şi respectiv conjugatele lor.

Pe de altă parte, înlocuind (2.48) în (2.50) pentru $x = v$, unde v este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ (pentru simplificare nu mai scriem indicele i) a matricii A, putem scrie succesiv

$$y = v^* \frac{1}{2}(A + A^T) v = \frac{1}{2} v^* A v + \frac{1}{2} v^* A^T v = \frac{1}{2} v^* \lambda v + \frac{1}{2} v^* \bar{\lambda} v =$$

$$= v^* \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} v = v^* v \operatorname{Re} \lambda. \tag{2.53}$$

Pentru $v = V_s\tilde{v}$ în (2.53), ținînd seama de faptul că $V_s^T V_s = V_s^{-1} V_s = I$ și pentru $\tilde{x} = \tilde{v}$ în (2.52) se obține egalitatea

$$(\mathrm{Re}\ \lambda) \sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j \bar{\tilde{v}}_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{v}_j \bar{\tilde{v}}_j, \tag{2.54}$$

în care $\tilde{v}_j$ și $\bar{\tilde{v}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sînt componentele vectorului $\tilde{v}$ și respectiv conjugatele lor. Făcînd acum în (2.54) majorarea $\mu_j \to \mu_{max}$ și respectiv minorarea $\mu_j \to \mu_{min}$, ambele pentru toți $j = 1, 2, \ldots, n$, se obține imediat (2.49). ■

Rezultatul formulat prin *teorema 20* poate fi folosit pentru obținerea următoarelor condiții suficiente de stabilitate asimptotică.

Teorema 21. O matrice A, reală de ordinul n, este hurwitziană dacă

$$\mu_{max} < 0. \tag{2.55}$$

Din punct de vedere practic, în locul *teoremei 21* este mai util următorul rezultat echivalent, în care prin A_{sk} vom nota minorii principali diagonali ai matricii A_s.

Teorema 22. O matrice A, reală de ordinul n, este hurwitziană dacă

$$(-1)^k A_{sk} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.56}$$

D. Dacă A_s satisface (2.55) atunci ea este negativ definită. Conform criteriului lui Sylvester (anexa D) A_s este negativ definită dacă și numai dacă are loc (2.56). ■

Exemplul 2.6. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine în planul (a, b) domeniul în care (2.56) este satisfăcută și să se compare cu domeniul de stabilitate asimptotică și cu domeniul determinat cu (2.16).

Avem

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a+b}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

și

$$A_{s_1} = -1 < 0, \quad A_{s_2} = 1 - \frac{1}{4}(a+b)^2 > 0,$$

din care rezultă $-2 < a+b < 2$, respectiv domeniul cuprins între dreptele paralele (d_1) și (d_2) din fig. II.23.

Pentru determinarea domeniului de stabilitate asimptotică se calculează

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = s^2 + 2s + 1 - ab$$

și se pune condiția $ab < 1$. Domeniul corespunzător este cuprins între arcele de hiperbolă (h_1) și (h_2), fig. II.23.

În sfîrșit, folosind (2.16) rezultă

$$-1 < a < 1, \qquad -1 < b < 1,$$

iar domeniul corespunzător este interiorul pătratului P, fig. II.23.

Concluzia care se desprinde din acest exemplu este că prin condiția suficientă (2.56) se obține un domeniu mai mic decît cel de stabilitate asimptotică (acestea coincid numai dacă însăși matricea A este simetrică), dar mai mare decît cel furnizat de condiția suficientă (2.16).

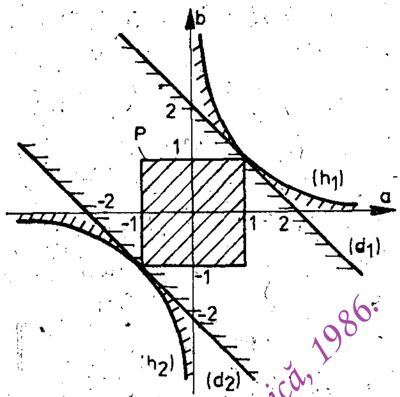


Fig. II.23. Comparație la *exemplul 2.6.* între domeniul de stabilitate asimptotică și domeniile obținute cu (2.16) și (2.56).

2.3.3. Matricea Hankel asociată unei fracții raționale

Fie fracția rațională

$$R(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{2.57}$$

unde $P(s)$ și $Q(s)$ sînt două polinoame cu coeficienți reali, relativ prime între ele, cu grad $Q = m \leqslant$ grad $P = n$.

Se știe că funcția $R(s)$ poate fi dezvoltată în serie de forma

$$R(s) = s_{-1} + s_0 s^{-1} + s_1 s^{-2} + \ldots, \tag{2.58}$$

în care s_i, $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$, se numesc *parametrii Markov* ai fracției $R(s)$. Cu ajutorul acestor parametri se definesc matricile de tip Hankel

$$H_R^{0k} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{bmatrix}, \quad H_R^{1k} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} \end{bmatrix}, \tag{2.59}$$

numite *matricile Hankel de ordinul k* asociate fracției $R(s)$.

Matricile (2.59) au fost utilizate pentru obținerea unor rezultate de stabilitate. De exemplu, separînd în $\Delta(s)$, relația (2.1), polinoamele $\Delta_p(s)$ și $\Delta_i(s)$ conform ecuației

$$\Delta(s) = \Delta_p(z) + s\Delta_i(z), \quad z = s^2, \tag{2.60}$$

numite *partea pară* şi respectiv *partea impară* a lui $\Delta(s)$, şi înlocuind

$$P(z) = \Delta_p(z), \; Q(z) = \Delta_i(z) \tag{2.61}$$

se obţine

$$R(z) = \frac{\Delta_i(z)}{\Delta_p(z)} = z_{-1} + z_0 z^{-1} - z_1 z^{-2} + z_2 z^{-3} - z_3 z^{-4} + \ldots . \tag{2.62}$$

În acest caz coeficienţii z_i, $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$, se numesc *parametrii Markov* ai polinomului $\Delta(s)$. Matricile Hankel corespunzătoare au formele

$$H^{0k} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{k-1} \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{k-1} & z_k & \ldots & z_{2k-2} \end{bmatrix}, \quad H^{1k} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_k \\ z_2 & z_3 & \ldots & z_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_k & z_{k+1} & \ldots & z_{2k-1} \end{bmatrix}. \tag{2.63}$$

Rezultatul de stabilitate, a cărui demonstraţie este dată în [G1], are următoarea formulare.

Teorema 23 (Cebîşev-Markov-Gantmacher). Polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian dacă şi numai dacă matricele reale simetrice H^{0k} şi H^{1k} sînt pozitiv definite, unde $k = n/2$ sau $(n-1)/2$ după cum n este par sau impar; în ultimul caz există şi condiţia suplimentară $z_{-1} > 0$.

Un rezultat similar a fost formulat şi pentru polinoame convergente [D3].

Exemplul 2.7. Se consideră polinomul

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 9s^2 + s + 4.$$

Să se studieze natura acestui polinom.

Evident, putem face separarea

$$\Delta(s) = s^4 + 9s^2 + 4 + s\,(2s^2 + 1),$$

ceea ce înseamnă

$$\Delta_p(z) = z^2 + 9z + 4, \quad \Delta_i(z) = 2z + 1,$$

$$R(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 9z + 4} = 2z^{-1} - 17\,z^{-2} + 145\,z^{-3} - 1237\,z^{-4} + \ldots .$$

Matricile Hankel

$$H^{02} = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 17 & 145 \end{bmatrix}, \quad H^{12} = \begin{bmatrix} 7 & 145 \\ 145 & 1235 \end{bmatrix}$$

fiind pozitiv definite, rezultă că $\Delta\,(s)$ este hurwitzian.

Deşi, comparativ cu criteriul Hurwitz (*teorema 5* de la 1.1.2), ordinul cel mai mare al determinanţilor care trebuie calculaţi în cazul *teoremei 23* se reduce la jumătate, acest rezultat este mai puţin semnificativ pentru aplicaţii deoarece este legat de dificultatea majoră a calculării parametrilor Markov. Cu toate acestea, din punct de vedere teoretic, ideea asocierii matricilor (2.59) fracţiei $R(s)$, respectiv polinoamelor $P(s)$ şi $Q(s)$ s-a dovedit semnificativă după cum se va vedea mai jos.

2.3.4. Matricea Hankel asociată unei perechi de matrici

Prin extensie, matricea Hankel a parametrilor Markov poate fi asociată şi matricilor A, de ordinul n, şi B, de ordinul m, considerînd în (2.57)

$$P(s) = \det\,[I_n s - A] \tag{2.64}$$

$$Q(s) = \det\,[I_m s - B), \tag{2.65}$$

unde I_n şi I_m sînt matricile unitate corespunzătoare.

Evident utilizarea matricilor (2.59), asociate de astă dată matricilor A şi B, presupune calculul determinanţilor din (2.64) şi (2.65) şi apoi a parametrilor Markov.

După cum s-a arătat recent, [D4], aceste dezavantaje pot fi evitate dacă matricile A şi B sînt de tip *Hessenberg inferior normalizate*, adică de forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & b_{n-13} & \dots & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.66}$$

Prin definiţie matricea reală simetrică

$$H_{AB} = [h_1 \; h_2 \dots h_n],$$

determinată după cum urmează:

$$\begin{aligned} w_n &= [0 \quad 0 \dots 0 \quad c]^T;\; c \neq 0 \\ w_{n-1} &= -(A + b_{nn}I)w_n, \\ w_{n-2} &= -(A + b_{n-1\,n-1}I)w_{n-1} - b_{nn-1}w_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_1 &= -(A + b_{22}I)w_2 - b_{32}w_3 - \dots - b_{n2}w_n; \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$h_1 = (A + b_{11}I)w_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j1}w_j,$$

$$h_{i+1} = (A - a_{ii}I)h_i - \sum_{k=1}^{i=1} a_{ik}k_k,\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.68}$$

se numeşte *matricea Hankel generalizată a parametrilor Markov*, asociată matricelor A şi B, de tip Hessenberg inferior normalizate.

Faptul că H_{AB} reprezintă realmente o generalizare a matricilor (2.59) rezultă din faptul că, de exemplu, pentru A şi B matrici de tip Frobenius, $P(s) = \det(Is - A)$ şi $Q(s) = (-1)^n \det(Is + B)$ şi $c = (-1)^{n-1}s_{-1}$ din (2.67), (2.68) se obţine $H_{AB} = H_R^{0n}$, [D4].

Particularizînd matricea B, şi anume $B = A$, în [D4] s-a demonstrat următorul rezultat.

Teorema 24 (Datta). Matricea A, de tip Hessenberg inferior normalizată, este hurwitziană dacă şi numai dacă matricea

$$S = WH_{AA} \tag{2.69}$$

este negativ definită, unde

$$W = [w_1\ w_2 \ldots w_n] \tag{2.70}$$

cu w_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, determinaţi cu (2.67).

Exemplul 2.8. Se consideră matricea de tip Hessenberg inferior normalizată

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine natura ei.

Utilizînd relaţiile (2.67), (2.68) obţinem:

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad w_2 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$w_1 = -\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix};\quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix},$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

Aşadar

$$H_{AA} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 4 & -2 & -8 \\ 10 & -8 & -24 \end{bmatrix}, \quad S = WH_{AA} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 4 & -6 & -12 \\ 10 & -12 & -28 \end{bmatrix}.$$

Condiţiile ca S să fie negativ definită sînt:

$$(-1)(-4) > 0,$$

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 4 & -6 & -12 \\ 10 & -12 & -28 \end{vmatrix} = -8 < 0,$$

ceea ce înseamnă că matricea considerată este hurwitziană.

Rezultatul formulat prin *teorema 24* este important în primul rînd pentru aplicaţii, în cazul sistemelor continue de dimensiuni mari, deoarece nu pretinde determinarea polinomului caracteristic sau folosirea transformării omografice (v. 2.2.2.). Relaţiile recurente (2.67), (2.68) nu ridică nici un fel de probleme din punctul de vedere al utilizării calculatorului numeric. De asemenea, determinarea faptului că matricea S este sau nu negativ definită este o chestiune, din punct de vedere numeric, complet rezolvată.

Aspectul aparent particular că *teorema 24* se referă numai la matrice de tip Hessenberg inferior normalizate nu constituie un dezavantaj, deoarece orice matrice *nederogatorică* (sau *ciclică*) poate fi redusă prin transformări elementare (uşor determinabile şi algoritmizabile pentru utilizarea calculatorului numeric, [D 1, 2] [G 2], [S 1], [W 1, 2]) la o matrice asemenea de tip Hessenberg normalizată (cu elemente „1" pe codiagonală). O matrice A, de ordinul n, este *nederogatorică* dacă şi numai dacă în şirul de polinoame (5.24) de la I.5.2.1 avem $\Delta_{n-1}(s) \equiv 1$, [G1], sau echivalent, este *ciclică* dacă şi numai dacă există un vector b, n-dimensional, astfel încît perechea (A, b) este complet controlabilă, [K1]. Matricile derogatorice sînt matrici cu valori proprii multiple în a căror formă canonică Jordan o aceeaşi valoare proprie apare în mai multe blocuri Jordan, aşa cum se exemplifică prin relaţia (5.19) de la I.5.2.1 sau la exemplul de la I.5.2.2. *b*. În aplicaţii astfel de matrici se întîlnesc numai rareori. Totuşi, chiar şi în cazul matricilor derogatorice se poate ajunge prin transformări elementare, [W 1], la matrici asemenea de tip *Hessenberg reduse* (cu unele elemente nule pe codiagonală), formate din submatrici *Hessenberg nereduse* (cu elemente nenule pe codiagonală). Evident, acestea din urmă sînt asemenea cu matrici Hessenberg normalizate, cărora li se poate aplica *teorema 24*.

3. Tehnici frecvențiale

Metoda frecvențială este prima metodă de analiză și de sinteză a sistemelor automate care s-a dezvoltat unitar și care s-a aplicat consecvent în perioada clasică a automaticii (anii '30—'50). Se poate afirma cu certitudine că marea majoritate a sistemelor automate de tip clasic existente astăzi în industrie sau în alte domenii au fost proiectate și realizate pe baza conceptelor și tehnicilor elaborate în cadrul metodei frecvențiale. Succesul aplicării acestei metode în proiectarea sistemelor automate liniare a determinat utilizarea ei, cu adaptările de rigoare, și pentru sistemele automate neliniare, obținîndu-se de asemenea rezultate remarcabile.

După o perioadă de penumbră, datorată dezvoltării metodei variabilelor de stare, metoda frecvențială revine în anii '80 cu vigoare în actualitate, dar la un nivel superior, și anume cu rezultate aplicabile sistemelor automate multivariabile. Explicația acestui fapt, nesurprinzător în dialectica dezvoltării științelor, constă în aceea că metoda frecvențială oferă soluții simple de proiectare pentru multe tipuri de sisteme automate utilizate în industrie. Aceste soluții asigură realizarea performanțelor impuse și proprietăți de robustețe, în condițiile în care partea automatizată are un model matematic imprecis sau incert între anumite limite.

Baza matematică pe care s-a dezvoltat metoda frecvențială este constituită de transformarea Laplace, transformarea Fourier și teoria funcțiilor de variabilă complexă, iar în cadrul acesteia, de principiul argumentului.

3.1. Principiul argumentului

3.1.1. Integrala pe contur a derivatei logaritmice

Fie

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

funcția de transfer a unui sistem dinamic liniar monovariabil, în care $P(s)$ și $Q(s)$ sînt două polinoame cu coeficienți reali, relativ prime între ele și cu grad $Q(s) = m$, grad $P(s) = n$.

1° Fie γ un contur închis în planul complex **C**, în interiorul căruia $G(s)$ are m_γ zerouri şi n_γ poli, considerîndu-se şi multiplicităţile lor.

Principiul argumentului, care permite evaluarea variaţiei totale a $\arg G(s)$, $s \in \gamma$, se deduce din următorul rezultat clasic din teoria funcţiilor de o variabilă complexă.

Teorema 1 (Cauchy). Funcţia $G(s)$, conform ipotezei 1°, satisface relaţia

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)}\,\mathrm{d}s = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma). \tag{3.2}$$

D. Fie z_i, de multiplicitate m_i, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, zerourile lui $G(s)$ în interiorul lui γ şi p_k, de multiplicitate n_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, polii lui $G(s)$ în interiorul lui γ. Conform ipotezei 1° au loc egalităţile

$$\sum_{i=1}^{\mu} m_i = m_\gamma, \quad \sum_{k=1}^{\nu} n_k = n_\gamma.$$

Pentru

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln G(s)], \tag{3.3}$$

numită şi *derivata logaritmică* a lui $G(s)$, atît z_i cît şi p_k sînt, după cum se va vedea imediat, singularităţi de tip pol simplu. Ca urmare, pentru evaluarea integralei pe contur din (3.2), se aplică teorema reziduurilor, [A 1,2], [S 2], şi se obţine

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)}\,\mathrm{d}s = 2\pi j\left[\sum_{i=1}^{\mu} \mathrm{Rez}_\gamma(z_i) + \sum_{k=1}^{\nu} \mathrm{Rez}_\gamma(p_k)\right]. \tag{3.4}$$

Pe de altă parte, pentru z_i putem scrie

$$G(s) = (s - z_i)^{m_i} G_z(s),$$

unde $G_z(s)$ este o fracţie care nu are pe z_i ca zerou.

În aceste condiţii se obţine

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{m_i}{s - z_i} + \frac{G_z'(z)}{G_z(s)},$$

ceea ce înseamnă că reziduul corespunzător lui z_i (pol simplu al funcţiei $G'(s)/G(s)$) este $\mathrm{Rez}_\gamma(z_i) = m_i$. În consecinţă

$$\sum_{i=1}^{\mu} \mathrm{Rez}_\gamma(z_i) = \sum_{i=1}^{\mu} m_i = m_\gamma. \tag{3.5}$$

De asemenea pentru p_k putem scrie

$$G(s) = \frac{1}{(s - p_k)^{n_k}} G_p(s),$$

unde $G_p(s)$ este o fracție care nu are pe p_k drept pol, ceea ce conduce la

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{-n_k}{s - p_k} + \frac{G'_p(s)}{G_p(s)}.$$

Reziduul corespunzător lui p_k (pol simplu al funcției $G'(s)/G(s)$) este $\mathrm{Rez}_\gamma(p_k) = -n_k$. Ca urmare

$$\sum_{k+1}^{\upsilon} \mathrm{Rez}_\gamma(p_k) = -\sum_{k=1}^{\upsilon} n_k = -n_\gamma. \tag{3.6}$$

Înlocuind acum (3.5) și (3.6) în (3.4) se obține (3.2). ■

2° Se presupune în plus că $G(s)$ are $\widetilde{m}_\gamma$ zerouri și $\widetilde{n}_\gamma$ poli, considerîndu-se și multiplicitățile lor, pe conturul γ.

Vom da în continuare fără demonstrație, un rezultat care ține seama și de această ipoteză.

Teorema 2 (Cauchy). Funcția $G(s)$, conform ipotezelor 1° și 2°, satisface relația

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)} \, ds = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j(\widetilde{m}_\gamma - \widetilde{n}_\gamma). \tag{3.7}$$

•

3.1.2. Variația totală a argumentului

Înlocuind (3.3) în (3.7) se obține

$$[\ln G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j\ (\widetilde{m}_\gamma - \widetilde{n}_\gamma). \tag{3.8}$$

$G(s)$, fiind o funcție de variabilă complexă, poate fi explicitată sub forma

$$G(s) = |G(s)|\, e^{j \arg G(s)}. \tag{3.9}$$

Înlocuind (3.9) în (3.8) și împărțind apoi prin j rezultă

$$[\arg G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi(m_\gamma - n_\gamma) + \pi(\widetilde{m}_\gamma - \widetilde{n}_\gamma), \tag{3.10}$$

deoarece $[\ln |G(s)|]_{s\in\gamma} = 0$.

Relația (3.10) este expresia analitică a *principiului argumentului*. La o alegere convenabilă a conturului γ relația (3.10) poate fi folosită pentru evaluarea *variației totale a argumentului* în funcție de numărul de zerouri și de poli ai lui $G(s)$ situați în semiplanul $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$. Un astfel de contur este *conturul Nyquist* γ_N — fig. II.24.

Fie $m_{\gamma_N} = m_+$ și $n_{\gamma_N} = n_+$ numărul de zerouri și respectiv de poli ai lui $G(s)$ în $\mathrm{Re}\, s > 0$. Fie de asemenea m_0 și n_0 numărul de zerouri finite și respectiv de poli finiți ai lui $G(s)$ pe $\mathrm{Re}\, s = 0$. Se știe că $G(s)$ mai are în punctul de la infinit fie un zerou de multiplicitate $|m - n|$ pentru $m < n$, fie un pol de aceeași multiplicitate pentru $m > n$. Întrucît $R \to \infty$, fig. II.24, rezultă că punctul de la infinit aparține conturului γ_N. Ca urmare $\tilde{m}_{\gamma_N} - \tilde{n}_{\gamma_N} = m_0 - n_0 - (m - n)$.

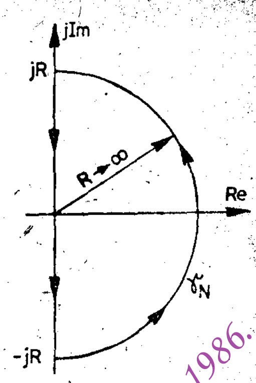


Fig. II.24. Conturul Nyquist.

În aceste circumstanțe din (3.10) se obține

$$\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi(n_+ - m_+) + \pi(n_0 - m_0) + \pi(m - n), \quad (3.11)$$

deoarece

$$\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=+\infty}^{\omega=-\infty} = -\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty}.$$

Întrucît

$$\arg G(j\omega))\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}, \quad (3.12)$$

din (3.11) se mai obține

$$\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi(n_+ - m_+) + \frac{\pi}{2}(n_0 - m_0) + \frac{\pi}{2}(m - n). \quad (3.13)$$

Precizăm că (3.12) este o consecință a proprietății $G(\bar{s}) = \bar{G}(s)$, $s \in \mathbf{C}$, (*proprietatea de reflexie* — valabilă numai pentru funcții $G(s)$ cu coeficienți reali) ceea ce, pentru $s = j\omega$, implică $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$, respectiv $\arg G(-j\omega) = -\arg G(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$.

3.1.3. Criteriul Cremer-Leonhard

Forma (3.13) a principiului argumentului poate fi aplicată imediat pentru obținerea unui rezultat de stabilitate asimptotică sau IMEM pentru sisteme continue în timp atunci cînd se cunoaște polinomul caracteristic sau polinomul polilor.

Fie $\Delta(s)$ un polinom cu coeficienți reali, cu grad $\Delta(s) = r$.

Teorema 3 (Cremer-Leonhard). Polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă

$$\arg \Delta(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} r. \tag{3.14}$$

D. Fie $\Delta(s)$ cu r_+ zerouri în Re $s > 0$ și r_0 zerouri pe Re $s = 0$. În aceste condiții, conform principiului argumentului, putem scrie

$$\arg \Delta(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = -\pi r_+ - \frac{\pi}{2} r_0 + \frac{\pi}{2} r. \tag{3.15}$$

Suficiența. Dacă (3.14) este adevărată atunci $r_+ = 0$ și $r_0 = 0$, ceea ce înseamnă că $\Delta(s)$ este hurwitzian.

Necesitatea. Dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian atunci $r_+ = 0$ și $r_0 = 0$. În aceste condiții din (3.15) rezultă (3.14). ∎

Un rezultat echivalent cu acesta și care face uz de hodograful $\Delta(j\omega)$ a fost enunțat prin *teorema 4* de la 1.1.1. *Teorema 3* are calitatea că este mai precisă și ca atare este mai eficientă în aplicații. Din acest punct de vedere poate fi mai util următorul enunț echivalent.

Teorema 4 (Cremer-Leonhard). Polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă hodograful $\Delta(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$, parcurge în sens pozitiv exact r cadrane.

Ca exemplu de aplicare a *teoremelor 3 și 4* se poate revedea *exemplul 1.7* de la 1.1.1.

3.1.4. Semnificația lui G(jω)

Se consideră sistemul cu funcția de transfer $G(s)$ de forma (3.1), descris de relația intrare-ieșire

$$Y(s) = G(s)\; U(s). \tag{3.16}$$

Mărimea de intrare este funcția sinusoidală

$$u(t) = \sin \omega_0 t,\; t \geqslant 0,$$

și ne interesează să determinăm componenta de regim permanent $y_f(t)$, $t \geqslant 0$, a lui $y(t)$, $t \geqslant 0$.

Se știe că

$$U(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \tag{3.17}$$

ceea ce, după înlocuirea în (3.16), conduce la

$$Y(s) = G(s)\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \tag{3.18}$$

Pentru simplificarea calculelor se presupune că $s = \pm j\omega_0$ nu este nici zerou şi nici pol al funcţiei $G(s)$.

Componenta de regim permanent $Y_f(s)$ se separă foarte uşor din $Y(s)$ deoarece, se ştie, ea este formată din fracţiile simple corespunzătoare polilor lui $U(s)$. Aceştia sînt $s_{1,2} = \pm j\omega_0$. Aşadar

$$Y_f(s) = \frac{A_1}{s - j\omega_0} + \frac{A_2}{s + j\omega_0}, \tag{3.19}$$

în care, conform teoremei dezvoltării (v. anexa A),

$$A_{1,2} = \frac{\omega_0(Q \pm j\omega_0)}{\frac{d}{ds}[P(s)(s^2 + \omega_0^2)]_{s=\pm j\omega_0}} = \pm\frac{1}{2j}G(\pm j\omega_0). \tag{3.20}$$

Întrucît

$$G(\pm j\omega_0) = R(\omega_0) \pm jI(\omega_0), \tag{3.21}$$

unde $R(\omega_0)$ şi $I(\omega_0)$ sînt partea reală şi respectiv imaginară a lui $G(j\omega_0)$, prin înlocuirea lui (3.21) în (3.20) şi apoi în (3.19), după calcule elementare, din (3.19) rezultă

$$Y_f(s) = R(\omega_0)\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + I(\omega_0)\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Funcţia original corespunzătoare este

$$y_f(t) = |G(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)), \tag{3.22}$$

în care

$$|G(j\omega_0)| = \sqrt{R^2(\omega_0) + I^2(\omega_0)}, \quad \arg G(j\omega_0) = \operatorname{arc\,tg}\frac{I(\omega_0)}{R(\omega_0)}.$$

Rezultatul (3.22) pune în evidenţă faptul că în regim permanent sinusoidal mărimea de ieşire a unui sistem dinamic liniar constant monovariabil este o funcţie sinusoidală de amplitudine egală cu modulul lui $G(j\omega_0)$ şi de defazaj, în raport cu intrarea, egal cu argumentul lui $G(j\omega_0)$. Acest fapt remarcabil justifică introducerea următoarei noţiuni.

Definiţia 1. Funcţia $G(j\omega)$ care defineşte complet regimul permanent sinusoidal pentru $\omega \in \mathbf{R}$ al sistemului dinamic liniar constant monovariabil cu funcţia de transfer G(s) se numeşte ***răspunsul la frecvenţă*** al respectivului sistem.

Răspunsul la frecvenţă se obţine relativ uşor, prin calcul sau experimental, şi se utilizează practic sub două forme grafice: *locul de transfer* şi *diagrama Bode*.

Locul de transfer este hodograful funcţiei $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$.

Diagrama Bode este o reprezentare carteziană a funcţiilor

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|, \ \omega \geq 0, \tag{3.23}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega), \ \omega \geq 0, \tag{3.24}$$

de regulă pentru o scară logaritmică în baza 10 a pulsaţiei ω. $A_{dB}(\omega)$ se numeşte *atenuarea* răspunsului la frecvenţă şi se măsoară în deciBell (dB) şi $\varphi(\omega)$ se numeşte *faza* răspunsului la frecvenţă şi se măsoară în grade (mai rar în radiani). Utilizarea diagramei Bode este preponderentă, deoarece, adeseori, *caracteristica atenuare-frecvenţă* (3.23) şi uneori şi caracteristica *fază-frecvenţă* (3.24) pot fi aproximate prin segmente de dreaptă. Totodată, diagrama Bode permite evidenţierea şi utilizarea mai simplă a corelaţiilor care există sau se doreşte să existe, pe anumite benzi de frecvenţă, între atenuarea şi faza răspunsului la frecvenţă.

3.2. Criteriul Nyquist

3.2.1. Utilizarea locului de transfer

Fie sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b*, în care

$$G(s) = G_R(s)G_F(s) \tag{3.25}$$

este funcţia de transfer a sistemului deschis, de forma (3.1), cu $m < n$. Funcţiile de transfer intrare-ieşire şi perturbaţie-ieşire au respectiv expresiile

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{F(s)}, \quad G_{0w}(s) = \frac{1}{F(s)}, \tag{3.26}$$

în care s-a notat

$$F(s) = 1 + G(s) = \frac{P(s) + Q(s)}{P(s)}. \tag{3.27}$$

Polii lui $G_0(s)$ și $G_{0w}(s)$ sînt de fapt zerourile lui $F(s)$, respectiv zerourile polinomului $P(s) + Q(s)$. În general $F(s)$ poate avea z_+ zerouri în $\operatorname{Re} s > 0$ și z_0 zerouri pe $\operatorname{Re} s = 0$. Polii lui $F(s)$ coincid cu polii lui $G(s)$, dintre care n_+ se află în $\operatorname{Re} s > 0$ și n_0 pe $\operatorname{Re} s = 0$. Punctul de la infinit nu este nici zerou și nici pol pentru $F(s)$ deoarece $F(s)$ este raportul a două polinoame de grad n. În aceste condiții *variația totală a argumentului* lui $F(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se determină cu formula (3.11) și are expresia

$$\arg F(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi(n_+ - z_+) + \pi(n_0 - z_0). \qquad (3.28)$$

Conform *teoremei 8* de la I.6.4.1 sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă toți polii lui $G_0(s)$ și $G_{0w}(s)$, respectiv toate zerourile lui $F(s)$ sînt situate în semiplanul $\operatorname{Re} s < 0$. În aceste circumstanțe putem enunța următorul rezultat.

Teorema 5 (Nyquist). Sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă $F(s)$, definit prin (3.27), satisface condiția

$$\arg F(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi n_+ + \pi n_0. \qquad (3.29)$$

D. *Suficiența.* Dacă (3.29) este adevărată atunci din (3.28) rezultă $z_+ = 0$ și $z_0 = 0$, ceea ce este suficient pentru stabilitatea IMEM a sistemului automat.

Necesitatea. Dacă sistemul automat este stabil IMEM atunci $z_+ = 0$ și $z_0 = 0$. În aceste condiții din (3.28) rezultă (3.29). ■

Din punct de vedere practic, este mai util și mai simplu de aplicat un enunț echivalent al *teoremei 5*, care se bazează pe următoarea observație. Întrucît între $F(s)$ și $G(s)$ există relația (3.27), este suficient să se reprezinte hodograful $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, celălalt hodograf, și anume $F(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, rezultînd automat față de o nouă origine, translată în punctul $(-1, j0)$, fig. II.25. Enunțul echivalent al *teoremei 5* este următorul.

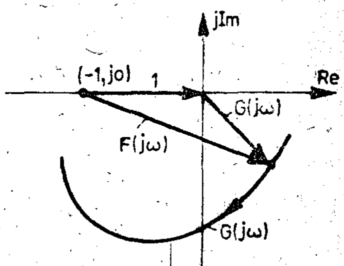


Fig. II.25. Determinarea lui $F(j\omega)$ din $G(j\omega)$.

Teorema 6 (Nyquist). Sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă locul de transfer al sistemului deschis (hodograful $G(j\omega)$) înconjoară punctul $(-1, j0)$ în sens pozitiv de un număr de $\left(n_+ + \frac{1}{2} n_0\right)$ ori atunci cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

S-a văzut că n_+ și n_0 sînt polii lui $G(s)$ în $\mathrm{Re}\, s > 0$ și respectiv pe $\mathrm{Re}\, s = 0$. Aceasta înseamnă că sistemul deschis, reprezentat de funcția de transfer $G(s)$, poate fi arbitrar instabil IMEM. Dacă are loc condiția (3.29) atunci prin introducerea reacției inverse conform fig. II.6, *b*, sistemul închis corespunzător este stabil IMEM. Această calitate deosebit de importantă a reacției a mai fost pusă în evidență la 1.1.6 și la 1.1.8.

Un caz frecvent întîlnit în aplicații este acela în care sistemul deschis, reprezentat de funcția de transfer $G(s)$, are cel mult doi poli în semiplanul $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ și anume în origine ($s = 0$), ceea ce înseamnă că $n_+ = 0$ și $n_0 \leqslant 2$. În astfel de cazuri se aplică o formă particulară a *teoremei 6*.

Teorema 7 (Nyquist). Sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b*, în care $G(s)$, definit prin (3.25), are cel mult doi poli în originea planului complex și restul de poli sînt toți în $\mathrm{Re}\, s < 0$, este stabil IMEM dacă și numai dacă punctul $(-1, j0)$ este situat la stînga în afara locului de transfer $G(j\omega)$ atunci cînd acesta este parcurs pentru ω luînd valori de la $-\infty$ la $+\infty$.

Atunci cînd hodograful $G(j\omega)$ are o formă complicată este dificil să se determine la prima vedere dacă punctul $(-1, j0)$ este la stînga sau la dreapta locului de transfer $G(j\omega)$. Avînd în vedere că hodograful $G(j\omega)$ este parcurs de la $\omega = -\infty$ la $\omega = +\infty$, deci în sens negativ pe conturul Nyquist — fig. II.24, rezultă că punctele situate la dreapta hodografului $G(j\omega)$, în sensul crescător al lui ω, sînt puncte interioare. Un procedeu expeditiv de determinare a poziției punctului $(-1, j0)$ față de hodrograful $G(j\omega)$ constă în hașurarea părții drepte a curbei $G(j\omega)$. Dacă punctul $(-1, j0)$ nu este într-o zonă hașurată atunci aceasta este în exteriorul hodografului $G(j\omega)$, respectiv la stînga sa atunci cînd $G(j\omega)$ este parcurs pentru ω crescător.

Exemplul 3.1. Se consideră sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* și

$$G(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{4s^2 + 10s + 5}{s^3 + 2s^2 + s + 1}.$$

Se cere să se studieze stabilitatea IMEM a acestui sistem.

Folosind criteriul Hurwitz (*teorema* 5 de la 1.1.2) se trage concluzia că polinomul $s^3 + 2s^2 + s + 1$ este hurwitzian. În aceste condiții vom aplica *teorema 7*.

Locul de transfer $G(j\omega)$ are forma din fig. II.26, în care porțiunea trasată cu linie întreruptă corespunde lui $\omega < 0$ și, datorită proprietății de reflexie a lui $G(s)$, este simetrică cu G (jω) pentru $\omega > 0$. Haşurînd la dreapta hodograful G (jω), $\omega \in \mathbf{R}$, se constată că punctul $(-1,\ \text{j}0)$ rămîne în afara şi la stînga lui. Conform *teoremei* 7 sistemul automat considerat este stabil IMEM.

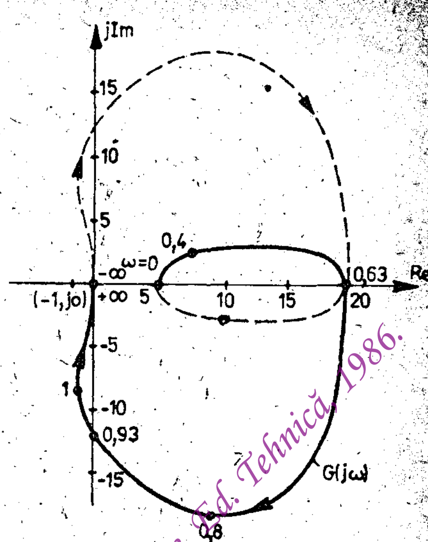


Fig. II.26. Locul de transfer al sistemului deschis la *exemplul 3.1.*

Exemplul 3.2. Se consideră sistemul automat din fig. II.6, *b* cu

$$G_R(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad G_F(s) = \frac{s+1}{s+2}.$$

Se cere să se verifice dacă sistemul este stabil IMEM pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = 2$.

Conform schemei din fig. II.6, *b* avem

$$G_\alpha(s) = \frac{s+1}{s^\alpha(s+2)} \quad \text{şi} \quad G_\alpha(\text{j}\omega) =$$

$$= \frac{\text{j}\omega + 1}{(\text{j}\omega)^\alpha(\text{j}\omega + 2)}$$

şi locurile de transfer corespunzătoare sînt reprezentate în fig. II.27, *a* şi *b*. Ambele hodografe, $G_1(\text{j}\omega)$ şi $G_2(\text{j}\omega)$, trec prin punctul de la infinit pentru $\omega = 0$. Examinînd poziţia punctului $(-1,\ \text{j}0)$ se constată că pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = 2$ sistemul considerat, conform *teoremei 7*, este stabil IMEM.

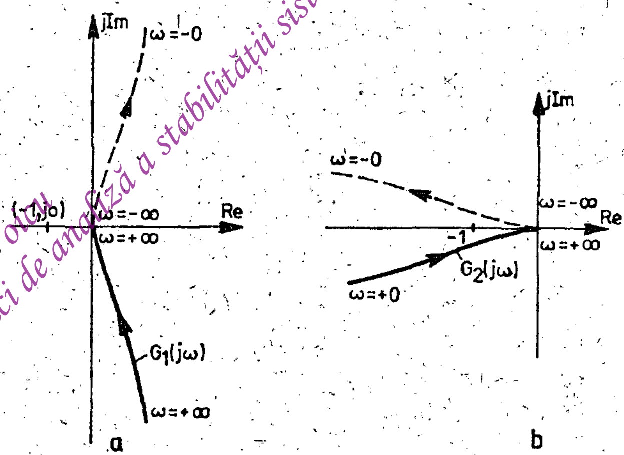


Fig. II.27. Locurile de transfer G_1 (jω) şi G_2 (jω) la *exemplul 3.2.*

Un caz limită intersant este acela în care hodograful $G(j\omega)$ trece prin punctul $(-1, j0)$. Dacă așa stau lucrurile înseamnă că există valori ale variabilei $s = j\omega$ pentru care

$$G(j\omega) = -1,$$

respectiv $G_0(s)$ are poli pe $\mathrm{Re}\, s = 0$. În atare circumstanțe sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b* nu este stabil IMEM.

Din cele arătate pînă aici rezultă că punctul $(-1, j0)$ ocupă o poziție privilegiată relativ la stabilitatea IMEM a sistemului automat. Din acest motiv punctul $(-1, j0)$ se mai numește și *punct critic*. Intuitiv, este evident că în cazul sistemelor automate stabile IMEM, cu cît locul de transfer $G(j\omega)$ este mai îndepărtat de punctul critic, cu atît sistemul respectiv are posibilități mai reduse de a deveni instabil IMEM la variația unora dintre parametrii săi.

Definiția 2. Pentru caracterizarea calității unui sistem automat liniar constant monovariabil se definește *stabilitatea relativă IMEM*, care se evaluează, conform fig. II.28, prin:

— *marginea de amplificare*

$$m = \frac{1}{|G(j\omega_0)|}, \tag{3.30}$$

în care ω_0 este determinat prin $\arg G(j\omega_0) = -180°$ și

— *marginea de fază*

$$\gamma = \arg G(j\omega_1) + 180°, \tag{3.31}$$

în care ω_1 este determinat prin $|G(j\omega_1)| = 1$, iar $\arg G(j\omega_1)$ este măsurat ca în fig. II.28 (și avînd, evident, o valoare negativă).

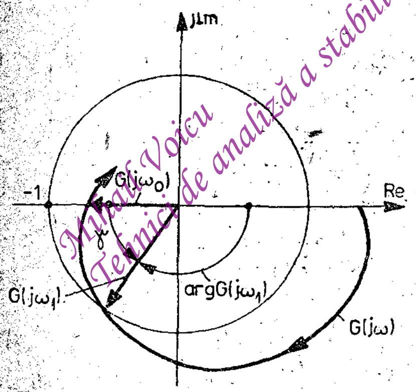


Fig. II.28. Definiția stabilității relative.

Spre deosebire de gradul de stabilitate IMEM, definit la I.6.4.2, care depinde numai de distribuția polilor lui $G_0(s)$ în planul complex, stabilitatea relativă IMEM depinde atît de distribuția polilor lui $G_0(s)$ (care coincid cu zerourile lui $F(s)$) cît și de cea a zerourilor lui $G_0(s)$ (care coincid cu zerourile lui $G(s)$).

Din acest punct de vedere stabilitatea relativă oferă o posibilitate, asemănătoare cu aceea asigurată de indicatorii performanțelor definiți pe baza răspunsului indicial (v. I.6.4.3), de apreciere a calităților unui sistem automat, de această dată însă în regim permanent sinusoidal. Această facilitate și faptul că stabilitatea IMEM a unui sistem închis poate fi analizată pe baza cunoașterii locului de transfer al sistemului deschis (obținut prin calcul sau pe cale experimentală) constituie avantajele esențiale pe care le asigură tehnicile frecvențiale față de tehnicile polinomiale sau de cele matriceale.

S-a arătat că între răspunsul indicial și răspunsul la frecvență al unui sistem automat există relații bine definite, [V 9]. În acest context valorile recomandate pentru marginea de amplificare și marginea de cîștig sînt $m \geqslant 3$ și respectiv $\gamma \geqslant 30°$.

Relațiile dintre indicatorii performanțelor definiți pe baza răspunsului indicial și anumiți parametri ai răspunsului la frecvență (printre care și stabilitatea relativă) au fost determinate pentru tipurile uzuale de funcții de transfer și au fost reproduse și în [V 9].

Satisfacerea valorilor recomandate ale stabilității relative se realizează, în faza de proiectare, prin alegerea regulatorului $G_R(s)$ cu structura și parametrii adecvați.

3.2.2. Aplicație: alegerea regulatorului unui sistem automat de urmărire

Se consideră sistemul automat de urmărire cu schema funcțional-tehnologică din fig. I.10 și schema bloc structurală din fig. I.11 (v. I.1.4.7).

Se cere să se determine parametrii k_0, k și T ai regulatorului, astfel încît sistemul automat să aibă o stabilitate relativă IMEM la valori admisibile.

Pentru a examina în detaliu efectul regulatorului

$$G_R(s) = -k_0\left(1 + \frac{k}{Ts+1}\right) \tag{3.32}$$

asupra stabilității relative a sistemului de urmărire vom considera următoarele două cazuri.

a) $k_0 = 1$ și $k = 0$ ($R_1 = R_2$ și $R_3 = 0$, v. relațiile (I.1.131)), ceea ce înseamnă că

$$G_R(s) = -1. \tag{3.33}$$

Funcția de transfer a sistemului deschis are în acest caz forma

$$G_a(s) = G_R(s)G_{SM}(s)k_2k_1 = \frac{k_1k_2}{T_1s(T_2s+1)}. \tag{3.34}$$

Pentru $k_1 = 0{,}05$, $T_1/k_2 = 0{,}5$, $T_2 = 0{,}05$ și $s = j\omega$ se obține

$$M_a(\omega) = |G_a(j\omega)| = \frac{2}{\omega\sqrt{\omega^2 + 400}} \tag{3.35}$$

$$\varphi_a(\omega) = \arg G_a(j\omega) = 270° - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{20}. \tag{3.36}$$

Locul de transfer $G_a(j\omega)$ este reprezentat în fig. II.29, *a*. Punctul $(-1, j0)$ este în exteriorul hodografului $G_a(j\omega)$. Conform *teoremei 7* sistemul automat este stabil IMEM.

În ceea ce privește stabilitatea relativă, se constată că $m = \infty$ oricare ar fi $k_0 > 0$. Pentru $k_0 > 1$ se poate realiza $\gamma = 30° - 50°$. În conformitate cu (3.31), (3.35) și (3.36) se obține

$$\begin{cases} k_0 M_a(\omega_1) = \dfrac{2k_0}{\omega_1\sqrt{\omega_1^2 + 400}} = 1 \\ \varphi_a(\omega_1) - 180° = 90° - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega_1}{20} = 30°. \end{cases}$$

După calcule elementare, din acest sistem rezultă $\omega_1 = 20\sqrt{3}$ și $k_0 = 400\sqrt{3}$.

Pentru a vedea cît de bună este această soluție, să observăm că ecuația polilor sistemului automat este

$$T_1 T_2 s^2 + T_1 s + k_0 k_1 k_2 = 0.$$

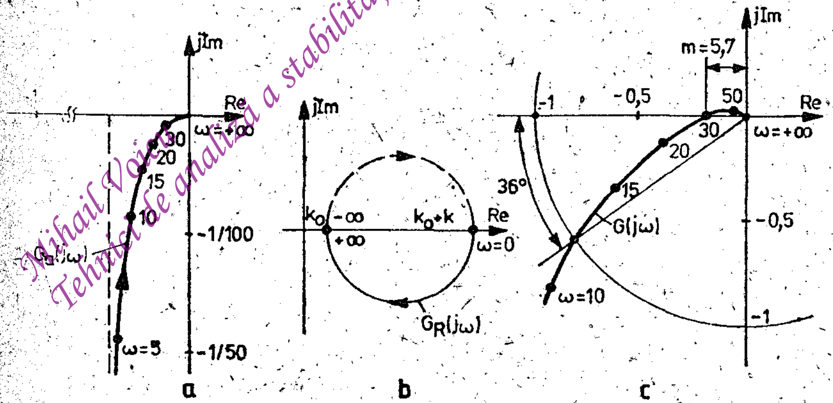


Fig. II.29. Locurile de transfer ale sistemului automat de urmărire:
a — al sistemului deschis pentru $k_0 = 1$, $k = 0$; *b* — al regulatorului (3.32); *c* — al sistemului deschis pentru $k_0 = 40$, $k = 3$, $T = 0{,}05$.

Pentru valorile numerice adoptate se obține pulsația naturală

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_0 k_1 k_2}{T_1 T_2}} = 37 \text{ rad/s}$$

și factorul de amortizare

$$\zeta = \frac{1}{2T_2\omega_n} = 0{,}27.$$

Conform fig. I.20 rezultă o suprareglare $\sigma\% = 40\%$ și un timp de stabilizare la 5% $t_s = 0{,}3$ s. Evident, aceste performanțe se obțin numai pentru zona de liniaritate a amplificatorului de curent continuu. Rezultatele indică în mod clar că utilizarea unui regulator de forma $G_R(s) = -k_0$ nu conduce la rezultate acceptabile.

b) Pentru $k > 0$ ($R_3 > 0$, v. relațiile (I.1.131)), funcția de transfer a regulatorului are forma (3.32) și locul de transfer $G_R(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, are imaginea din fig. II.29, *b* (s-a făcut abstracție de semnul „$-$" din (3.32) deoarece acesta este compensat de semnul „$-$" din $G_{SM}(s)$, v. relația (I.1.122)).

Locul de transfer al sistemului deschis

$$G(j\omega) = G_R(j\omega)G_{SM}(j\omega)k_2k_1 = G_R(j\omega)G_a(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R},$$

se obține prin compunerea locurilor $G_a(j\omega)$ și $G_R(j\omega)$, fig. II.29, *a* și *b*, conform relațiilor

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = M_R(\omega)M_a(\omega) \tag{3.37}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \varphi_R(\omega) + \varphi_a(\omega), \tag{3.38}$$

în care

$$M_R(\omega) = |G_R(\omega)|, \ \varphi_R(\omega) = \arg G_R(\omega). \tag{3.39}$$

Este ușor de observat că efectul introducerii regulatorului $G_R(s)$ constă într-o rotire, în domeniul frecvențelor medii, în sens negativ a locului $G_a(j\omega)$, ceea ce este favorabil realizării valorilor recomandate ale stabilității relative. Într-adevăr, pentru $k_0 = 40$, $k = 3$ și $T = 0{,}05$ s (la care se ajunge prin cîteva tatonări), locul de transfer al sistemului deschis are forma din fig. II.29, *c*.

Rezultatele care se obțin în acest caz sînt mult mai bune și anume $m = 5{,}7$ și $\gamma = 36°$. Reținem totuși faptul că ele sînt urmarea unor tatonări bazate pe modificările posibile ale locului de transfer al sistemului deschis, dar fără un suport director cu caracter cantitativ pentru realizarea respectivelor modificări. Vom vedea la 3.2.4 că utilizarea diagramei Bode permite o rezolvare expeditivă atît a alegerii tipului de regulator, cît și a determinării parametrilor săi.

3.2.3. Sisteme cu timp mort

Există situații, cum ar fi reglarea automată a temperaturii cuptoarelor industriale sau reglarea presiunii pe conducte de transport de fluid, în care partea fixată ($G_F(s)$ în fig. **II.6**, *b*) conține un element cu timp mort, caracterizat printr-un factor e^{-Ts}, $T > 0$. În astfel de cazuri funcția de transfer a sistemului deschis are forma

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} e^{-Ts}, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{3.40}$$

în care $P(s)$ și $Q(s)$ sînt polinoamele definite la (3.1). Aceasta înseamnă că numitorul funcției de transfer a sistemului închis are acum forma

$$F(s) = 1 + G(s) = \frac{P(s) + Q(s)e^{-Ts}}{P(s)}. \tag{3.41}$$

Spre deosebire de sistemele automate fără timp mort, numărătorul din (3.41) nu mai este un polinom, ci o funcție transcendentă. Această funcție are o infinitate de zerouri. Dintre acestea numai un număr finit sînt situate în Re $s \geqslant 0$. Într-adevăr, deoarece pentru Re $s \geqslant 0$

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = 0,$$

rezultă că zerourile lui $F(s)$ în Re $s \geqslant 0$ se află într-o anumită vecinătate a originii. Conform unui rezultat din teoria funcțiilor, $F(s)$ poate avea într-un domeniu finit cel mult un număr finit de zerouri. De asemenea $F(s)$ are în Re $s \geqslant 0$ cel mult un număr finit de poli (zerourile lui $P(s)$).

În aceste condiții este evident că lui $F(s)$ i se poate aplica principiul argumentului în scopul obținerii unor rezultate de stabilitate IMEM. Procedînd ca la 3.2.1, rezultatul care se obține este conform următorului enunț.

Teorema 8. Teoremele 5, 6 și 7 sînt valabile și în cazul în care $G(s)$ este de forma (3.40).

Exemplul 3.3. Se consideră un sistem automat cu

$$G(s) = \frac{k}{s} e^{-Ts}, \quad k > 0, \quad T > 0.$$

Se cere să se determine în planul parametrilor (k, T) domeniul de stabilitate **IMEM** a sistemului.

Avem

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} e^{-jT\omega} = -\frac{k}{\omega} (\sin T\omega + j \cos T\omega).$$

Conform *teoremei 8* condiția de stabilitate IMEM este

$$\min_{\omega} \operatorname{Re} G(j\omega) = \min_{\omega}\left(-\frac{k}{\omega}\sin T\omega\right) > -1$$

pentru ω determinați de

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = -\frac{k}{\omega}\cos T\omega = 0, \quad \omega > 0.$$

Din ultima ecuație rezultă $T\omega_i = (2i + 1)\pi/2$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, ceea ce conduce la

$$\min_{i}\left(-\frac{2kT}{(2i+1)\pi}\right) > -1.$$

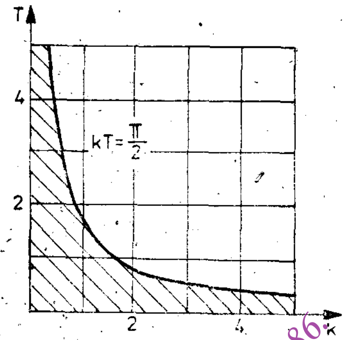


Fig. II.30. Domeniul parametric de stabilitate IMEM la *exemplul 3.3.*

Soluția acestei inecuații este evident $kT < \pi/2$, iar domeniul corespunzător de stabilitate IMEM are imaginea din fig. II.30.

3.2.4. Utilizarea diagramei Bode

Forma cea mai generală, și totodată cea mai simplă ca exprimare, a criteriului Nyquist este *teorema 6*, cu extinderea corespunzătoare de la *teorema 8*. După cum s-a arătat la 3.1.4, diagrama Bode poate fi aproximată, de regulă, prin segmente de dreaptă. Vom arăta în continuare că utilizarea diagramei Bode este foarte avantajoasă atît în analiza stabilității IMEM, cît și, mai ales, în proiectarea sistemelor automate stabile IMEM.

În cele ce urmează vom avea în vedere sisteme automate a căror funcție de transfer în circuit deschis este de forma

$$G(s) = \frac{k}{s^{\alpha}} \frac{b_m s^m + \ldots + 1}{a_n s^n + \ldots + 1} e^{-Ts}, \tag{3.42}$$

în care $k > 0$, $\alpha = 0, 1, 2$, $m < n + \alpha$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $T \geqslant 0$ și polinoamele $b_m s^m + \ldots + 1$ și $a_n s^n + \ldots + 1$ sînt relativ prime între ele.

Întrucît în majoritatea situațiilor care intervin în aplicații ipotezele *teoremei 7*, cu extinderea de la *teorema 8*, sînt îndeplinite, ne vom ocupa de formularea unui rezultat de stabilitate IMEM în cazul în care $G(s)$ nu are nici un pol în $\operatorname{Re} s > 0$ (adică polinomul $a_n s^n + \ldots + 1$ este hurwitzian).

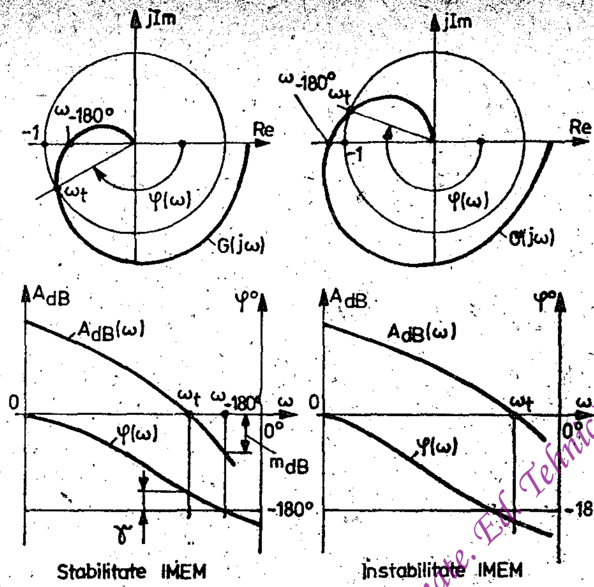


Fig. II.31. Analiza stabilității IMEM cu ajutorul diagramei Bode.

Cele două situații posibile — stabilitate și instabilitate IMEM — sînt ilustrate în fig. II.31. Pulsația ω_t, la care locul de transfer $G(j\omega)$ taie cercul de rază unitate, respectiv la care atenuarea $A_{dB}(\omega)$ taie axa de 0_{dB} se numește *pulsația de tăiere* a sistemului deschis. În conformitate cu *teorema 7*, cu extinderea corespunzătoare de la *teorema 8*, putem enunța fără demonstrație următorul rezultat.

Teorema 9. Sistemul automat cu structura din fig. II.6, *b*, în care $G(s)$, definit prin (3.25), este de forma (3.42) și nu are nici un pol în Re $s > 0$, este stabil IMEM dacă și numai dacă la frecvența de tăiere ω_t caracteristica fază-frecvență se află deasupra liniei corespunzătoare lui $-180°$.

Determinarea stabilității relative cu ajutorul diagramei Bode este foarte simplă și ea constă în a măsura $A_{dB}(\omega_{-180°})$, în care $\omega_{-180°}$ este definit prin $\varphi(\omega_{-180°}) = -180°$, și $\varphi(\omega_t)$. Marginea de amplificare exprimată în dB este

$$m_{dB} = |A_{dB}(\omega_{-180°})|, \tag{3.43}$$

iar marginea de fază se determină cu

$$\gamma = \varphi(\omega_t) - (-180°). \tag{3.44}$$

Valorile recomandate sînt $m_{dB} = 10 \div 20$ dB și $\gamma = 30° \div 50°$.

Exemplul 3.4. Se consideră sistemul automat cu

$$G(s) = \frac{k}{s\,(0{,}05\,s + 1)\,(0{,}2\,s + 1)}, \quad k > 0.$$

Să se determine valorile lui k pentru care sistemul automat corespunzător este stabil IMEM.

Întrucît k este necunoscut vom trasa caracteristica atenuare-frecvență $A_{dB}(\omega)$ pentru $k = 1$. Conform definiției (3.23) avem

$$A_{dB}(\omega) = -20\ \lg\omega - 20\ \lg\sqrt{(0{,}05\omega)^2 + 1} - 20\ \lg\sqrt{(0{,}2\omega)^2 + 1}.$$

Se observă că $A_{dB}(\omega)$ poate fi aproximată după cum urmează

$$A_{dB}(\omega) = \begin{cases} -20\ \lg\omega & 0 < \omega < 5, \\ -20\ \lg\omega - 20\ \lg(0{,}2\omega) & 5 \leqslant \omega < 20, \\ -20\ \lg\omega - 20\ \lg(0{,}2\omega) - 20\ \lg(0{,}05\omega), & 20 \leqslant \omega < +\infty. \end{cases}$$

Aceasta, pentru o scară logaritmică a pulsațiilor, reprezintă o linie frîntă formată din trei segmente de dreaptă. Punctele de frîngere sînt situate la $\omega_1 = 1/0{,}2 = 5$ și $\omega_2 = 1/0{,}05 = 20$, care se numesc *pulsații de frîngere*. Caracteristica $A_{dB}(\omega)$ aproximativă are forma din fig. II.32 (linia frîntă). Caracteristica $A_{dB}(\omega)$ exactă (curba trasată cu linie subțire) diferă de cea aproximativă pentru $\omega \in [3,30]$, dar diferențele nu depășesc 3 dB.

Caracteristica $\varphi(\omega)$, conform definiției (3.24), are expresia

$$\varphi(\omega) = -90° - \mathrm{arctg}\,(0{,}2\omega) - \mathrm{arctg}\,(0{,}05\omega)$$

și este trasată cu linie întreruptă în fig. II.32.

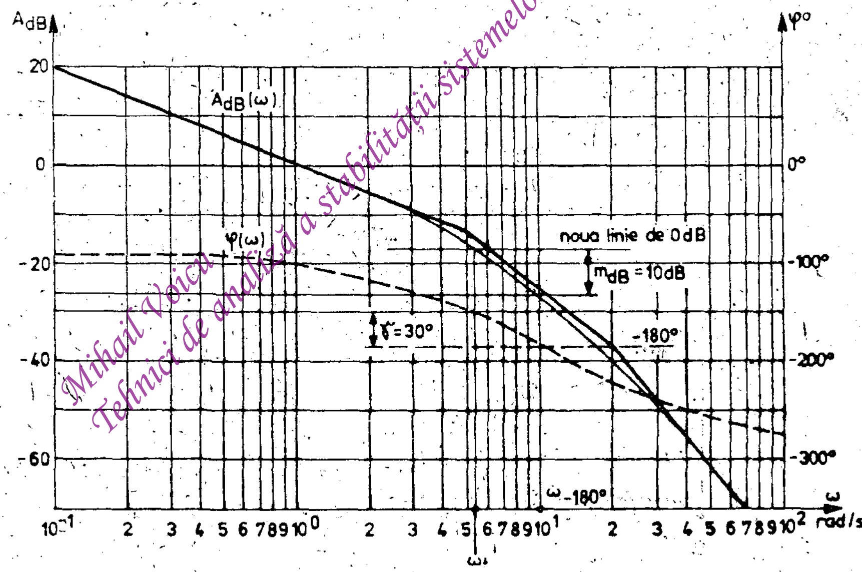


Fig. II.32. Diagrama Bode la *exemplul 3.4.*

Pentru a-l determina pe k să observăm că dacă $k \neq 1$ atunci linia de 0 dB va ocupa în fig. II.32 o altă poziție și anume $-20 \lg k$. Pentru a asigura stabilitatea IMEM a sistemului închis, conform *teoremei 9*, noua linie de 0 dB nu poate coborî mai jos de nivelul limită $L_{dB} = -27{,}5$ dB. Așadar, $k_{dB} = 20 \lg k < 27{,}5$ dB, ceea ce înseamnă $0 < k < 12{,}37$. Pentru a obține o margine de amplificare de 10 dB, noua linie de 0 dB se coboară numai până la $-17{,}5$ dB, ceea ce înseamnă $k_{dB} = 17{,}5$ dB, respectiv $k = 7{,}5$. În acest caz $\omega_t = 5{,}25$ rad/s și $\gamma = 30°$.

3.2.5. Aproximarea funcției de transfer a sistemului deschis

Utilizarea descrierii intrare-ieșire, în speță a funcției de transfer, spre deosebire de descrierea intrare-stare-ieșire, permite, pe baza răspunsului la frecvență, aproximarea sistemelor prin funcții de transfer de ordin redus, care pot fi manipulate, mai ales în proiectare, mult mai ușor. De exemplu un sistem cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(0{,}5\, s + 1)(0{,}19\, s + 1)\,(0{,}167\, s + 1)}{(0{,}4\, s + 1)(0{,}294\, s + 1)\,(0{,}133\, s + 1)}$$

are o caracteristică $A_{dB}(\omega) = 20 \lg G(j\omega) \approx 0$ și poate fi aproximat prin funcția de transfer $G(s) = 1$. În descrierea intrare-stare-ieșire (sistemul este de ordinul trei) posibilitatea unei atare aproximări nu este ușor de pus în evidență.

S-au elaborat numeroase procedee de aproximare a sistemelor prin modele matematice de ordin redus, [L2], [R1], care pot fi utilizate și pentru analiza stabilității sistemelor automate.

Vom expune în continuare un procedeu de analiză a stabilității IMEM a sistemelor automate pentru care se știe că răspunsul indicial al sistemului deschis este aperiodic și cu timp mort, fig. II.33, *a*. Aproxi-

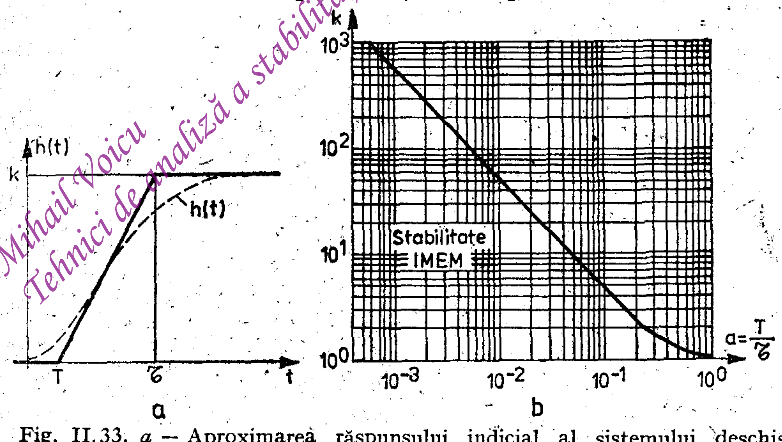


Fig. II.33. *a* — Aproximarea răspunsului indicial al sistemului deschis; *b* — Domeniul parametric de stabilitate IMEM.

marea constă în înlocuirea curbei $h(t)$ cu linia frîntă trasată cu linie continuă. Punctele ei de frîngere definesc timpul mort T, constanta de timp totală τ şi factorul de amplificare k. Conform fig. II.33, *a* putem scrie

$$h(t) \simeq \begin{cases} 0, & t < T, \\ \dfrac{k}{\tau - T}(t - T), & T \leqslant t < \tau, \\ k, & \tau \leqslant t, \end{cases} \tag{3.45}$$

în care

$$\frac{k}{\tau - T} = \max_{t}\left\{\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right\}. \tag{3.46}$$

Aplicînd transformarea Laplace în (3.45) se obţine

$$H(s) \approx \frac{k}{(\tau - T)s^2}\left(\mathrm{e}^{-Ts} - \mathrm{e}^{-\tau s}\right). \tag{3.47}$$

Funcţia de transfer a sistemului deschis este

$$G(s) = s\,H(s) \approx \frac{k}{(\tau - T)s}\left(\mathrm{e}^{-Ts} - \mathrm{e}^{-\tau s}\right). \tag{3.48}$$

Pentru $s = \mathrm{j}\omega$, înlocuind $e^{x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$, după calcule elementare se obţin

$$u(\omega) = \operatorname{Re} G(\mathrm{j}\omega) \approx \frac{2k}{(\tau - T)\omega}\sin\frac{\tau - T}{2}\,\omega\,\cos\frac{\tau + T}{2}\,\omega, \tag{3.49}$$

$$v(\omega) = \operatorname{Im} G(\mathrm{j}\omega) \approx -\frac{2k}{(\tau - T)\omega}\sin\frac{\tau - T}{2}\,\omega\,\sin\frac{\tau + T}{2}\,\omega. \tag{3.50}$$

Condiţia de stabilitate IMEM a sistemului automat este ca prima intersecţie a locului de transfer $G(\mathrm{j}\omega)$ cu semiaxa reală să aibă loc la dreapta punctului $(-1,\ \mathrm{j}0)$. Aceasta este echivalent cu

$$\min_{\omega} u(\omega) > -1 \tag{3.51}$$

pentru ω determinat de

$$v(\omega) = 0, \quad \omega > 0. \tag{3.52}$$

Din (3.50) şi (3.52), ţinînd seama de (3.51), se obţine

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau + T}$$

şi apoi

$$\min_{\omega} u(\omega) = -\frac{k(\tau + T)}{\pi(\tau - T)} \sin \pi \frac{\tau - T}{\tau + T} \tag{3.53}$$

Înlocuind (3.53) în (3.51) şi introducînd notaţia $a = \dfrac{T}{\tau}$ se obţine condiţia de stabilitate IMEM (Küpfmüller)

$$\frac{1}{k} > \frac{1 + a}{\pi(1-a)} \sin \pi \frac{1 - a}{1 + a}, \tag{3.54}$$

care permite şi determinarea domeniului parametric de stabilitate IMEM a sistemului automat — fig. II.33, *b*.

3.3. Corecţia sistemelor automate

3.3.1. Condiţii impuse sistemului automat

Expresia „corecţia unui sistem automat" este tradiţional consacrată în cadrul metodei frecvenţiale şi are acelaşi sens cu expresia „stabilizarea unui sistem automat" întrebuinţată deja în cadrul acestui capitol (v. 1.1.8).

Pentru realizarea efectivă a corecţiei unui sistem automat este necesară formularea condiţiilor de bază pe care acesta trebuie să le satisfacă.

1° Sistemul automat trebuie să fie stabil IMEM atît în raport cu mărimea prescrisă, cît şi cu perturbaţia.

2° Sistemul automat trebuie să realizeze o anumită exactitate în regim staţionar.

Aceasta înseamnă că în regim staţionar abaterea

$$x = u - y \tag{3.55}$$

trebuie să fie nulă sau satisfăcător de mică.

Relația dintre mărimea prescrisă și abatere, conform fig. II.6, *b*, în transformate Laplace, are forma

$$X(s) = \frac{1}{1 + G(s)} U(s), \tag{3.56}$$

în care $G(s)$, definit prin (3.25), are forma (3.42).

Dacă $u(t) = \sigma(t)$, respectiv $U(s) = \mathfrak{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$, atunci, aplicînd teorema valorii finale (v. anexa A), abaterea staționară are expresia

$$x(+\infty) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \frac{1}{1 + G(0)} = \begin{cases} \frac{1}{1+k}, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha = 1, 2. \end{cases} \tag{3.57}$$

Se trage concluzia că o abatere staționară satisfăcător de mică, atît în raport cu mărimea prescrisă cît și cu perturbația, se obține dacă $G(s)$ are poli în origine (elemente integratoare în regulator sau în partea fixată a sistemului automat) sau dacă factorul de amplificare în circuit deschis este suficient de mare.

O problemă nouă care se ridică acum este aceea că, într-o anumită măsură, condițiile 1° și 2° sînt contradictorii deoarece introducerea unui element integrator în circuitul deschis, sau creșterea factorului de amplificare k imprimă sistemului închis o tendință spre instabilitate. Explicația acestui fapt constă în aceea că prin creșterea factorului de amplificare locul de transfer $G(j\omega)$ ajunge să înconjoare punctul $(-1, j0)$, iar prin introducerea unui pol în origine, datorită efectului de rotație cu $-90°$ introdus de acesta, este posibil de asemenea ca locul de transfer $G(j\omega)$ să înconjoare punctul $(-1, j0)$.

Oricum, soluția adoptată pentru satisfacerea condiției 2° nu trebuie să neglijeze condiția 1°. Cu alte cuvinte stabilitatea IMEM a sistemului automat este esențială și, mai mult, este necesară asigurarea unei anumite rezerve de stabilitate IMEM. Se poate astfel formula următoarea condiție.

3° Răspunsul indicial în raport cu mărimea prescrisă trebuie să fie suficient de amortizat.

Pentru satisfacerea acestei condiții se ține seama de valorile recomandate ale marginii de amplitudine și marginii de fază — relațiile (3.43), (3.44). În ipotezele admise pentru $G(s)$ (v. relația (3.42)), se poate arăta că dacă la frecvența de tăiere ω_t panta caracteristicii $A_{dB}(\omega)$, pe un domeniu suficient de larg de pulsații, este cel mult -20 dB/decadă atunci, pentru o valoare admisibilă a marginii de fază, rezultă și o valoare admisibilă a marginii de amplitudine (v. *exemplul 3.4*).

În atare condiții se poate folosi ca măsură a stabilității relative, respectiv a amortizării răspunsului indicial, numai marginea de fază γ. Experiența acumulată pînă în prezent arată că un răspuns indicial în raport cu mărimea prescrisă cu supdareglare acceptabilă și suficient de bine amortizat se obține pentru $\gamma = 50° \div 80°$. Pentru ca răspunsul indicial în raport cu perturbația să fie acceptabil trebuie ca $\gamma > 30°$.

Satisfacerea condițiilor 1°—3° nu este suficientă pentru realizarea performanțelor impuse sistemului automat. La fel de importantă ca și precedentele este și următoarea condiție.

4° Sistemul automat trebuie să răspundă suficient de rapid atît la variația mărimii prescrise, cît și la variația perturbației.

În mod logic, un sistem automat are un răspuns rapid numai dacă sistemul deschis corespunzător are și el această proprietate.

În ipotezele admise pentru $G(s)$ (precizate la relația (3.42) și, în continuare), sistemul deschis se comportă ca un filtru trece-jos. Pentru a vedea de care parametru frecvențial depinde rapiditatea sistemului automat vom aproxima răspunsul la frecvență $G(j\omega)$ cu acela al unui *filtru ideal trece-jos*. Un astfel de filtru se definește prin

$$G_i(j\omega) = M_i(\omega)e^{-j\varphi_i(\omega)}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{3.58}$$

în care

$$M_i(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| \leqslant \omega_t, \\ 0, & |\omega| > \omega_t, \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\varphi_i(\omega) = -T\omega, \quad \omega \in \mathbf{R}, \tag{3.60}$$

și ω_t este pulsația de tăiere, iar $T \geqslant 0$ este timpul mort al filtrului ideal.

Răspunsul indicial al filtrului se calculează după cum urmează (v. *definiția 4* și relația (6.70) de la I.6.4.2)

$$h_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(\tau, 0)\,\sigma(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} g_i(\tau, 0)\,d\tau, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3.61}$$

Răspunsul la impuls $g_i(t, 0)$ se determină cu ajutorul transformatei inverse Fourier

$$g_i(t, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_i(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega = \frac{M_0}{2\pi}\int_{-\omega_t}^{\omega_t} e^{j\omega(t-T)}d\omega =$$

$$= \frac{M_0}{\pi}\int_0^{\omega_t} \cos\omega(t-T)\,d\omega = \frac{M_0}{\pi}\,\frac{\sin(t-T)\,\omega_t}{t-T}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3.62}$$

Rapiditatea răspunsului filtrului ideal trece-jos se poate aprecia prin panta maximă a lui $h(t)$, adică prin

$$\max_{t} h_i'(t) = \max_{t} g_i(t) = \frac{1}{\pi} M_0\, \omega_t. \tag{3.63}$$

Se trage concluzia că răspunsul indicial al filtrului ideal trece-jos este cu atît mai rapid cu cît pulsația sa de tăiere este mai mare și cu cît factorul de amplificare este mai mare. Această relație între rapiditatea răspunsului pe de o parte și pulsația de tăiere și factorul de amplificare pe de altă parte rămîne valabilă, calitativ, și pentru filtrele reale trece-jos.

De regulă pulsația de tăiere ω_t a sistemului deschis poate fi crescută prin creșterea factorului său de amplificare k. Acest lucru se explică prin aceea că o creștere a lui k determină întotdeauna o ridicare a caracteristicii atenuare-frecvență a sistemului deschis în raport cu nivelul de 0 dB.

Este evident acum că condițiile 3° și 4° sînt într-o anumită măsură contradictorii. S-a văzut că ω_t poate fi crescut prin creșterea factorului de amplificare al sistemului deschis. Acesta însă atrage după sine reducerea marginii de fază, respectiv reducerea amortizării răspunsului indicial al sistemului automat.

3.3.2. Corecția în domeniul frecvențelor

În conformitate cu cele arătate pînă aici realizarea corecției sistemelor automate constă în parcurgerea următorilor pași.

1° Determinarea schemei bloc structurale cu toți parametrii părții fixate.

2° Determinarea diagramei Bode a părții fixate.

3° Determinarea regulatorului adecvat care asigură satisfacerea condițiilor 1°—4° de la 3.3.1.

4° Simularea (analogică sau numerică) a sistemului automat în scopul verificării și îmbunătățirii soluției adoptate. Acest pas este necesar îndeosebi atunci cînd sistemului automat i se impun condiții cantitative privitoare la suprareglare, timpul de răspuns sau precizia în regim staționar.

Ne vom referi în continuare la pasul 3° în care are loc propriu-zis corecția sistemului automat.

Utilizarea diagramei Bode în scopul corecției unui sistem automat constă în aplicarea următoarelor procedee

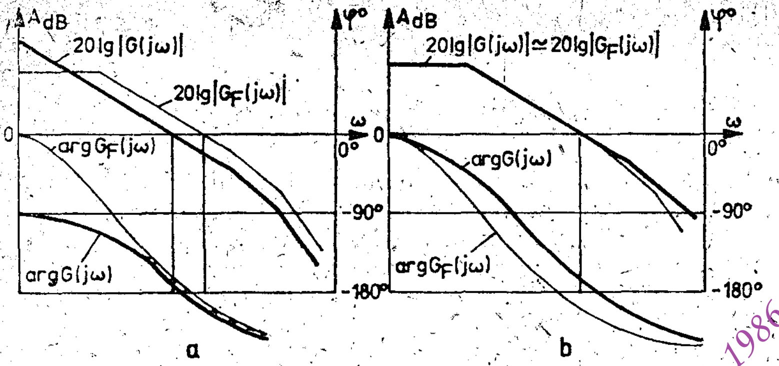


Fig. II.34. *a* — Corecția prin coborîrea caracteristicii $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$; *b* — Corecția prin ridicarea caracteristicii $\varphi(\omega)$.

1° Coborîrea caracteristicii $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$ — fig. II.34, *a*.

Prin aceasta pulsația de tăiere se deplasează spre stînga, ceea ce duce la creșterea marginii de fază. Este posibil ca totodată sistemul automat să devină prea lent.

2° Ridicarea caracteristicii $\varphi(\omega)$ — fig. II.34, *b*.

Prin aceasta este posibilă creșterea marginii de fază cu menținerea aproximativ constantă a pulsației de tăiere.

3° Combinarea procedeelor 1° și 2°.

Vom arăta în continuare că utilizînd:

— un regulator PI cu funcția de transfer

$$G_R(s) = k_r \frac{1 + \tau_1 s}{s}, \quad k_r > 0, \ \tau_1 > 0, \tag{3.64}$$

— un regulator PD real, cu funcția de transfer

$$G_R(s) = k_r \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_0 s}, \quad k_r > 0, \ \tau_2 \gg \tau_0 > 0, \tag{3.65}$$

— un regulator PID real, cu funcția de transfer

$$G_R(s) = k_r \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s(1 + \tau_0 s)}, \quad k_r > 0, \ \tau_1 \geqslant \tau_2 \gg \tau_0 > 0, \tag{3.66}$$

se aplică procedeele 1°—3°.

Diagrama Bode a regulatorului PI este reprezentată în fig. II.35, *a*. În mod obișnuit τ_1 se ia egal cu cea mai mare constantă de timp T_1 a părții fixate. Se elimină astfel prin simplificare factorul $T_1 s + 1$ de

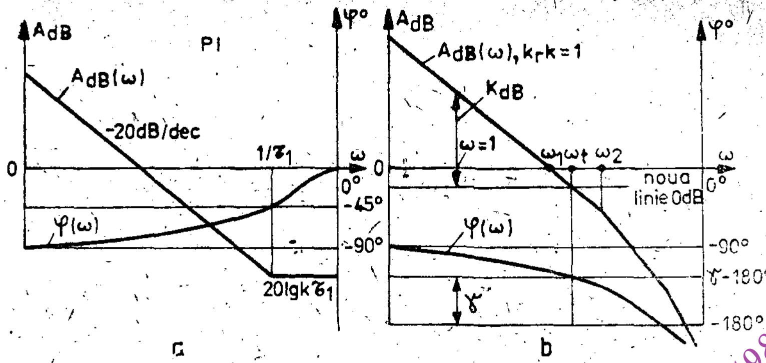


Fig. II.35. *a* — Diagrama Bode a regulatorului PI; *b* — Corecția cu regulatorul PI.

la numitorul lui $G_F(s)$. Acest lucru este avantajos deoarece factorul $T_1 s + 1$ produce o scădere a fazei cu pînă la 90°. Eliminarea lui este echivalentă cu o ridicare a caracteristicii fază-frecvență. Ea este cu atît mai eficientă cu cît T_1 este mai mare și are o influență favorabilă în zona pulsației de tăiere. În cazul în care $G_F(s)$ are mai multe constante de timp mari, de valori apropiate, se adoptă $\tau_1 > T_1$. Astfel scăderea rapidă a fazei datorită factorilor $(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$... de la numitorul lui $G_F(s)$ este mai bine compensată prin factorul $\tau_1 s + 1$ de la numărătorul lui $G_R(s)$.

După ce s-a ales τ_1 se trasează pentru sistemul deschis caracteristica $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$, pentru $k_r k_f = 1$, și caracteristica $\varphi(\omega)$, fig. II.35, *b*. Se trasează o orizontală la valoarea $\gamma - 180°$, unde γ este marginea de fază impusă, și se determină pulsația de tăiere ω_t, la care s-a produs intersecția dintre respectiva orizontală și caracteristica $\varphi(\omega)$. ω_t este pulsația de tăiere a sistemului deschis, iar pentru determinarea lui k_r nu rămîne decît să se coboare linia de 0 dB astfel încît aceasta să intersecteze caracteristica $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$ exact la pulsația de tăiere ω_t — fig. II.35, *b*. Caracteristica $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$ are o porțiune, la frecvențe joase, cu panta -20 dB/decadă, determinată de factorul $k_r k_f / s$ din funcția de transfer a sistemului deschis. Pentru $\omega = 1$ se determină K_{dB} pe caracteristica $A_{\mathrm{dB}}(\omega)$, fig. 35, *b*, și apoi se calculează

$$\lg k_r = \frac{1}{20} K_{\mathrm{dB}} - \lg k_f. \tag{3:67}$$

Diagrama Bode a regulatorului PID ideal ($\tau_0 = 0$) este reprezentată în fig. II.36, *a* (trasată cu linie subțire). Acest tip de regulator se deo-

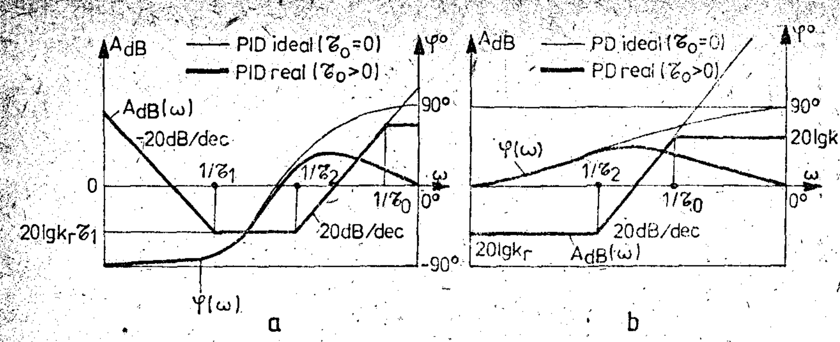


Fig. II.36. Diagrama Bode a regulatoarelor PID (*a*) și PD (*b*).

sebește de regulatorul PI prin prezența a încă unui factor $(1 + \tau_2 s)$ în funcția sa de transfer. Prin acesta este posibilă o ridicare suplimentară a caracteristicii $\varphi(\omega)$. Aceasta înseamnă că pentru aceeași margine de fază, respectiv aceeași amortizare, este posibilă o plasare mult la dreapta a pulsației de tăiere, comparativ cu ceea ce este posibil cu un regulator PI. De asemenea este posibil ca la o menținere neschimbată a pulsației de tăiere să se crească marginea de fază, ceea ce înseamnă că la o aceeași rapiditate se poate obține o amortizare mai bună decît în cazul regulatorului PI.

Diagrama Bode a regulatorului PID real este reprezentată în aceeași fig. II.36, *a* (cu linie groasă). În mod obișnuit se adoptă $\tau_1 = T_1$ și $\tau_2 = T_2$, unde T_1 și T_2 sînt constantele de timp cele mai mari ale părții fixate. În continuare se procedează ca și în cazul regulatorului PI, adică se trasează caracteristicile $A_{dB}(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ ale sistemului deschis, pentru $k_r k_f = 1$. În funcție de marginea de fază γ impusă se determină pulsația de tăiere ω_t și apoi k_r. Constanta de timp τ_0, introdusă în mod sistematic de regulatorul real, are un efect nefavorabil asupra performanțelor sistemului. Pentru ca efectul ei să fie cît mai redus, valoarea lui τ_0 trebuie să fie cît mai mică posibil (evident există o limită inferioară determinată de principiul de funcționare și de tehnologia de realizare a regulatorului).

Diagrama Bode a regulatorului PD (real și ideal) este reprezentată în fig. II.36, *b*. Se adoptă $\tau_2 = T_1$, unde T_1 este cea mai mare constantă de timp a părții fixate și k_r se alege astfel încît să se realizeze marginea de fază impusă.

Exemplul 3.5. Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig. II.6, *b*, în care

$$G_F(s) = \frac{0,1}{(25s + 1)(6s + 1)(1,2s + 1)}.$$

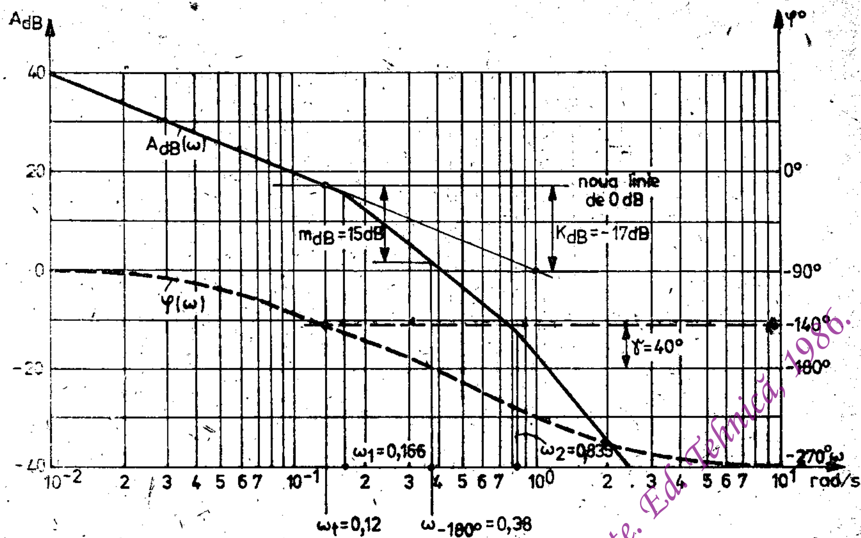


Fig. II.37. Corecția cu regulatorul PI la *exemplul 3.5.*

Se cere să se determine parametrii unui regulator PI și apoi ai unui regulator PID astfel încît stabilitatea relativă să fie $\gamma = 40°$ și $m_{dB} \geqslant 10$ dB.

Funcția de transfer a regulatorului PI are expresia (3.64). Se adoptă $\tau_1 = 25$. În acest fel funcția de transfer a sistemului deschis este

$$G(s) = \frac{k}{s\,(6s+1)(1{,}2s+1)},\quad k = 0{,}1\,k_r.$$

Pentru $k = 1$ diagrama Bode are forma din fig. II. 37. Se observă că sistemul automat este instabil. Așadar pentru a realiza stabilitatea IMEM va trebui să ridicăm linia de 0 dB. Pentru $\gamma = 40°$ rezultă $\omega_t = 0{,}12$ rad/s. Noua linie de 0 dB este mai sus cu 17 dB față de cea veche. Conform relației (3.67) rezultă lg $k_r = 0{,}15$, respectiv $k_r = 1{,}4$ și $m_{dB} = 15$ dB.

Funcția de transfer a regulatorului PID are expresia (3.66). Se adoptă $\tau_1 = 25$ și $\tau_2 = 6$. În aceste condiții funcția de transfer a sistemului deschis este

$$G(s) = \frac{k}{s\,(1{,}2s+1)},\quad k = 0{,}1\,k_r.$$

Diagrama Bode, pentru $k = 1$, este reprezentată în fig. II.38.

Pentru $\gamma = 40°$ rezultă $\omega_t = 1$ rad/s. Noua linie de 0 dB este mai jos cu 3 dB față de cea veche. Conform relației (3.67) rezultă lg $k_r = 1{,}15$, respectiv $k_r = 14$ și $m_{dB} = +\infty$.

Este evident că pentru o aceeași margine de fază regulatorul PID asigură o rapiditate mai mare ($\omega_t = 1$ rad/s) a sistemului automat decît regulatorul PI($\omega_t = 0{,}12$ rad/s).

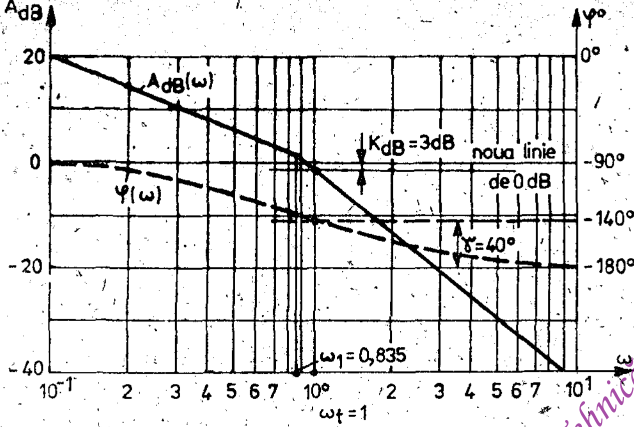


Fig. II.38. Corecția cu regulatorul PID la *exemplul* 3.5.

3.3.3. Reglarea în cascadă

Introducerea unei reacții negative suplimentare este unul din cele mai puternice mijloace pentru realizarea stabilizării unui sistem automat, mai ales în cazul în care partea fixată a sistemului are o funcție de transfer de ordin ridicat.

Structura de bază a unui astfel de sistem este reprezentată în fig. II.39. Corecția sistemului se realizează în felul următor. Regulatorul $G_{R1}(s)$ se alege astfel încît circuitul închis interior să poată fi aproximat printr-o funcție de transfer de ordinul 1. În general acest lucru este posibil utilizînd un regulator PID. În aceste condiții pentru circuitul închis principal alegerea regulatorului $G_{R2}(s)$ se face între tipurile P sau PI; componenta D în regulatorul circuitului principal este mai puțin uzuală, datorită faptului că o atare componentă face sistemul sensibil la perturbații aleatoare. Pentru ambele regulatoare alegerea parametrilor se realizează prin procedeele de corecție în domeniul frecvențelor sau cu ajutorul metodei locului rădăcinilor. Prin faptul că partea fixată a sistemului a fost împărțită în două și că folosind două regulatoare

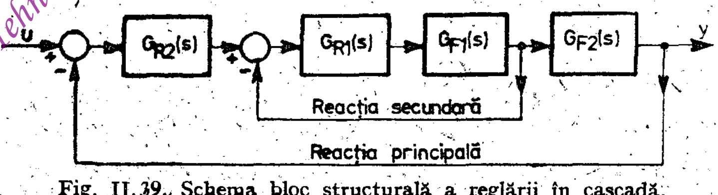


Fig. II.39. Schema bloc structurală a reglării în cascadă.

adecvate este posibilă compensarea a mai mult de două constante de timp din partea fixată, reglarea în cascadă poate asigura o stabilizare mult mai bună în comparație cu utilizarea unei singure reacții inverse.

3.4. Sisteme automate discrete în timp

Pentru a vedea în ce măsură răspunsul la frecvență este utilizabil pentru studiul stabilității sistemelor automate discrete în timp, este necesară o adaptare corespunzătoare a modului de evaluare a variației totale a argumentului.

3.4.1. Criteriul Nyquist pentru sisteme discrete

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig. II.19, *b*, descris de ecuațiile (1.117)—(1.120) și (1.123).

Fie funcția de transfer a sistemului deschis de forma

$$G(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{3.68}$$

în care $P(z)$ și $Q(z)$ sînt două polinoame relativ prime între ele cu grad $Q = m <$ grad $P = n$.

Se știe că stabilitatea IMEM a sistemului automat discret în timp depinde de distribuția în raport cu cercul de rază unitate a polilor lui $G_0(z)$ și $G_{0w}(z)$, respectiv a zerourilor funcției

$$F(z) = 1 + G(z). \tag{3.69}$$

În general $F(z)$ poate avea z_1 zerouri pe cercul de rază unitate și z_2 zerouri în afara acestui cerc. Polii lui $F(z)$ coincid cu polii lui $G(z)$; n_1 dintre aceștia se află pe cercul de rază unitate și n_2 în afara respectivului cerc. În aceste circumstanțe, folosind principiul argumentului (v. 3.1.2) pentru cazul cînd conturul γ este cercul de rază unitate (sensul de parcurgere este negativ pentru ca domeniul $|z| > 1$ să constituie interiorul conturului) se poate scrie

$$[\arg F(z)]_{z\in\gamma} = 2\pi(z_2 - n_2) + \pi(z_1 - n_1). \tag{3.70}$$

Întrucît cercul γ este descris de ecuația

$$z = e^{j\theta}, \quad -\pi < \theta \leqslant \pi, \tag{3.71}$$

din (3.70) se obține

$$\arg F(z) \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = -2\pi(z_2 - n_2) - \pi(z_1 - n_1). \tag{3.72}$$

Schimbarea de semn din (3.72) se explică prin aceea că s-a schimbat sensul de parcurgere a cercului γ (în (3.70) cercul era parcurs de la π la $-\pi$, adică în sens negativ, în timp ce în (3.72) el este parcurs de la $-\pi$ la π, respectiv în sens pozitiv).

Conform *teoremei 16* de la I.6, sistemul automat cu structura din fig. II.19, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă toți polii lui $G_0(z)$ și $G_{0w}(z)$, respectiv toate zerourile lui $F(z)$ sînt situate în interiorul cercului $|z| < 1$. Ca și în cazul sistemelor automate continue în timp putem enunța următoarele rezultate.

Teorema 10. Sistemul automat cu structura din fig. II.19, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă $F(z)$, definit prin (1.120) și (3.69), satisface condiția

$$\arg F(e^{j\theta}) \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = 2\pi n_2 + \pi n_1. \tag{3.73}$$

D. *Suficiența.* Dacă (3.73) este adevărată atunci din (3.72) rezultă $z_2 = 0$ și $z_1 = 0$, ceea ce este suficient pentru stabilitatea IMEM.

Necesitatea. Dacă sistemul automat este stabil IMEM atunci $z_2 = 0$ și $z_1 = 0$. În aceste condiții din (3.72) rezultă (3.73). ■

Relația dintre $F(z)$ și $G(z)$ conduce în mod natural la următorul enunț echivalent al *teoremei 10*.

Teorema 11. Sistemul automat cu structura din fig. II.19, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă hodograful $G(e^{j\theta})$ al sistemului deschis înconjoară punctul $(-1, j0)$ în sens pozitiv de un număr de $\left(n_2 + \frac{1}{2} n_1\right)$ ori atunci cînd θ variază de la $-\pi$ la π.

În aplicații se preferă o altă formă a *teoremei 11* care se bazează pe introducerea variabilei frecvențiale ω prin $\theta = T\omega$, unde T este perioada de eșantionare, și pe definirea funcției

$$G^*(j\omega) = G(z)\big|_{z=e^{jT\omega}}, \quad -\frac{\pi}{T} < \omega \leqslant \frac{\pi}{T}. \tag{3.74}$$

Teorema 12. Sistemul automat cu structura din fig. II.19, *b* este stabil IMEM dacă și numai dacă hodograful $G^*(j\omega)$ al sistemului deschis înconjoară punctul $(-1, j0)$ în sens pozitiv de un număr de $\left(n_2 + \frac{1}{2} n_1\right)$ ori atunci cînd ω variază de la $-\pi/T$ la π/T.

Comparînd *teoremele 6 și 12* se observă că ele sînt în esență asemănătoare. Singura deosebire se referă la intervalul de variație al pulsației ω. În cazul de față intervalul de valori ale lui ω este finit deoarece $G^*(j\omega)$ este o funcție periodică de perioadă $2\pi/T$, fapt ușor de verificat cu ajutorul definiției (3.74).

Se trage concluzia că aplicarea criteriului Nyquist, atît sub forma locului de transfer cît și sub aceea a diagramei Bode, rămîne principial aceeași ca și la sistemele automate continue. Mai mult, noțiunea de stabilitate relativă se definește în același fel și procedeele de corecție cu ajutorul diagramei Bode rămîn principial neschimbate.

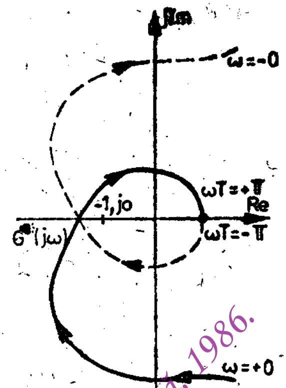


Fig. II.40. Hodograful $G^*(j\omega)$ la *exemplul 3.6.*

Exemplul 3.6. Se consideră sistemul automat discret în timp cu

$$G(z) = \frac{1,5\,(z-0,8)}{z(z-1)(z-0,6)}.$$

Se cere să se analizeze dacă sistemul automat este stabil IMEM.

Pentru $z = e^{jT\omega} = \cos T\omega + j\sin T\omega$ rezultă

$$G^*(j\omega) = \frac{1,5\,(\cos T\omega - 0,8 + j\sin T\omega)}{\cos 3T\omega - 1,6\cos 2T\omega + 0,6\cos T\omega + j\,(\sin 3T\omega - 1,6\sin 2T\omega + 0,6\sin T\omega)},$$

din care se obțin

$$M^*(\omega) = 1,5\sqrt{\frac{(\cos T\omega - 0,8)^2 + \sin^2 T\omega}{(\cos 3T\omega - 1,6\cos 2T\omega + 0,6\cos T\omega)^2 + (\sin 3T\omega - 1,6\sin 2T\omega + 0,6\sin T\omega)^2}} =$$

$$= 1,5\sqrt{\frac{1,64 - 1,6\cos T\omega}{3,92 - 5,12\cos T\omega + 1,2\cos 2T\omega}},$$

$$\varphi^*(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin T\omega}{\cos T\omega - 0,8} - \operatorname{arctg}\frac{\sin 3T\omega - 1,6\sin 2T\omega + 0,6\sin T\omega}{\cos 3T\omega - 1,6\cos 2T\omega + 0,6\cos T\omega}.$$

Hodograful $G^*(j\omega)$ are forma din fig. II.40. Se știe că $G(z)$ are un pol pe cercul de rază unitate. Așadar $n_1 = 1$ și $n_2 = 0$. Conform relației (3.73) variația totală a argumentului $\varphi^*(\omega)$ față de punctul $(-1, j0)$ trebuie să fie π. Conform fig. II.40 această variație este -3π, ceea ce înseamnă că sistemul automat considerat este instabil IMEM.

Capitolul III

Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate neliniare

Majoritatea lucrărilor din domeniul sistemelor automate au ca obiect de studiu sistemele automate liniare. Acest fapt ar putea sugera ideea falsă că sistemele automate neliniare constituie cazuri speciale, abateri de la cazul general liniar. Realitatea fizico-tehnică contrazice categoric o astfel de prezumție. Sistemele automate reale sînt de regulă neliniare, variante în timp și, în multe cazuri, cu parametrii distribuiți în spațiu.

Sistemele automate liniare reprezintă așadar cazul particular la care se ajunge prin idealizări, simplificări și aproximații ale fenomenelor reale. Este posibil ca rezultatele care se obțin în astfel de condiții să fie satisfăcătoare, în sensul unei bune concordanțe între teorie și experiment.

Există însă numeroase situații în care obținerea unui model matematic liniar presupune aproximații inacceptabile, atît principial cît și ca urmare a unor neconcordanțe flagrante între teorie și experiment. Pentru astfel de sisteme a fost necesară elaborarea unor metode noi, în care s-a ținut seama în primul rînd de caracterul neliniar al modelelor matematice. Metode de o asemenea factură s-au formulat și dezvoltat relativ independent în diverse domenii ale științei, pornindu-se de la idei radical diferite. Din acest motiv teoria sistemelor automate neliniare se prezintă ca un conglomerat de metode mai mult sau mai puțin adaptate între ele, fiecare avînd o anumită sferă de aplicabilitate. Singurul lor element unificator este acela că toate, într-un fel sau altul, au ca scop și *analiza stabilității* sistemelor automate neliniare.

Elementele neliniare care pot fi puse în evidență în cadrul sistemelor automate se împart în două categorii:

— *esențiale* sau deliberat introduse;

— *neesențiale* sau accidentale.

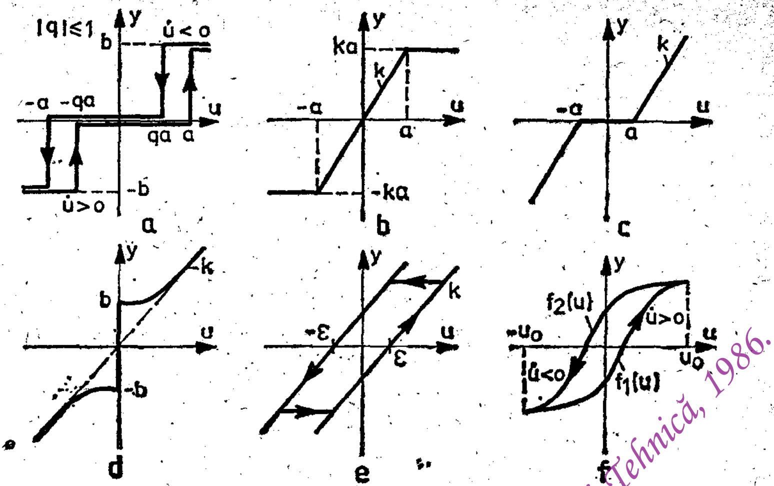


Fig. III.1. Neliniarităţi:
a — releu; *b* — saturaţie; *c* — zonă de insensibilitate; *d* — frecare uscată; *e* — joc în angrenaje; *f* — histerezis.

O neliniaritate esenţială este un element indispensabil pentru realizarea unei anumite relaţii intrare-ieşire. Ca exemple de neliniarităţi esenţiale se pot cita elementele de tip releu, fig. III.1, *a*, frecvent utilizate ca regulatoare în cadrul sistemelor automate.

Neliniarităţile neesenţiale nu sînt intenţionat introduse, au un caracter natural şi în general sînt nedorite. Într-o primă aproximaţie liniarizarea lor nu trebuie să conducă la neconcordanţe prea mari între teorie şi experiment. Ca exemple de neliniarităţi neesenţiale se pot aminti: saturaţia, zona de insensibilitate, jocul în angrenaje, frecarea uscată şi histerezisul mecanic, termic sau magnetic — fig. III.1, *b—f*.

În mod obişnuit se admite că sistemele neliniare satisfac *ipoteza de separabilitate*. Această ipoteză se referă la faptul că respectivul sistem poate fi discretizat structural într-un subsistem liniar şi un subsistem neliniar fără memorie (univalent — fig. III.1, *b—d*).

Analiza şi sinteza sistemelor automate neliniare se realizează prin numeroase procedee particulare, care în parte se sprijină pe ipoteza de separabilitate şi care pot fi grupate în următoarele metode:

— metoda liniarizării
— metoda funcţiei de descriere
— metoda planului stărilor
— metoda liniarizării pe porţiuni
— metoda directă Liapunov

— metode analitice
— metode numerice.

Trebuie remarcat faptul că majoritatea metodelor se sprijină pe idei și concepte din teoria sistemelor automate liniare. De exemplu metoda liniarizării, aplicată deja la II.1.1.9, permite utilizarea tehnicilor de analiză a stabilității specifice sistemelor automate liniare. Evident, rezultatele obținute sînt valabile numai pentru o vecinătate a punctului de funcționare pentru care s-a făcut liniarizarea.

Pentru analiza stabilității sistemelor automate neliniare monovariabile, semnificative s-au dovedit metoda funcției de descriere, metoda planului stărilor și în mod deosebit metoda directă Liapunov. Toate trei fac obiectul prezentului capitol. Pentru o informare completă și asupra celorlalte metode recomandăm consultarea lucrărilor [B 6, 7].

1. Tehnici bazate pe funcția de descriere

Metoda funcției de descriere este în fond o metodă de liniarizare, și anume în domeniul frecvențelor. Această metodă este aplicabilă unei clase largi de neliniarități, dar se aplică în special în cazul neliniarităților descrise de funcții discontinue, pentru care liniarizarea bazată pe formula lui Taylor este inoperantă.

1.1. Metoda celor două locuri

1.1.1. Definiția funcției de descriere

Ipotezele în care vom defini funcția de descriere a unui element neliniar cu o intrare și o ieșire sînt următoarele:

1° relația intrare-ieșire este descrisă de

$$y = f(u), \tag{1.1}$$

unde f este o funcție continuă și monotonă pe porțiuni, univalentă sau polivalentă, avînd cel mult discontinuități de prima speță (condițiile lui Dirichlet);

2° neliniaritatea (1.1) este simetrică față de originea planului u, y;

3° dacă u este periodică în timp atunci y este de asemenea periodică, de aceeași perioadă cu u;

4° în structura sistemului automat neliniar monovariabil elementul neliniar precede un subsistem liniar cu o caracteristică atenuare-frecvență de tipul filtru trece-jos, cu o pantă mai mare sau egală cu 40 dB/decadă în zona pulsației de tăiere.

Aceste ipoteze sînt satisfăcute în majoritatea cazurilor care intervin în aplicații. Dacă se renunță la ipotezele 2° și 3° atunci se iau în considerare și neliniarități nesimetrice, [F3], și neliniarități care produc subarmonici [G3]. În principiu partea liniară poate fi atît continuă, cît și discretă în timp. În al doilea caz metoda funcției de descriere devine relativ laborioasă și din acest motiv este mai puțin utilizată în aplicații. În cele ce urmează ne vom referi numai la cazul sistemelor cu parte liniară continuă în timp.

Fie

$$u(t) = A \sin \omega t, \quad t \in \mathbf{R}; \quad A \geqslant 0, \quad \omega \geqslant 0. \tag{1.2}$$

În ipotezele 1°—3° $y(t)$ poate fi exprimat prin următoarea *serie Fourier*

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\,\omega t + B_n \cos n\omega t), \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{1.3}$$

în care

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(A \sin \omega t) \sin n\omega t \; \mathrm{d}\,(\omega t), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(A \sin \omega t) \cos n\omega t \; \mathrm{d}(\omega t), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

sînt *coeficienții Fourier* ai ieșirii $y(t)$.

În ipoteza 4° și pentru ω situat în zona pulsației de tăiere a părții liniare, armonicile superioare din (1.3) au un efect neglijabil în cadrul sistemului automat. În aceste condiții (1.3) poate fi aproximată prin

$$y(t) \approx y_1(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{1.6}$$

unde $y_1(t)$ este fundamentala lui $y(t)$.

Pentru stabilirea unui formalism asemănător cu cel utilizat la metoda frecvențială (v. II.3) vom transpune relațiile (1.2) și (1.6) în complex. Putem scrie

$$u(t) = \operatorname{Im} \; U(A, j\omega) = \operatorname{Im} A e^{j\omega t}, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{1.7}$$

$$y_1(t) = \operatorname{Im} Y_1(A, j\omega) = \operatorname{Im} \sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)} \; e^{j \operatorname{arctg} \frac{B_1(A)}{A_1(A)}} e^{j\omega t}, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{1.8}$$

Definiția 1. Se numește *funcția de descriere* a elementului neliniar (1.1), sub ipotezele 1°—4°, raportul

$$N(A) = \frac{Y_1(A, \mathrm{j}\omega)}{U(A, \mathrm{j}\omega)}, \qquad A \in \mathbf{R}_+. \tag{1.9}$$

Ținînd seama de (1.7) și (1.8) funcția de descriere are expresia

$$N(A) = \frac{1}{A}[A_1(A) + \mathrm{j}B_1(A)] = \frac{1}{A}\sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j\,arctg}\frac{B_1(A)}{A_1(A)}}, \qquad A \in \mathbf{R}_+. \tag{1.10}$$

În aplicații se utilizează și *funcția de descriere invers negativă*

$$N_i(A) = -\frac{1}{N(A)}, \qquad A \in \mathbf{R}_+. \tag{1.11}$$

Hodograful $N_i(A)$, $A \in \mathbf{R}_+$, se numește *locul de descriere invers negativ* al elementului neliniar (1.1).

Notînd cu

$$N_R(A) = \operatorname{Re} N(A), \quad N_I(A) = \operatorname{Im} N(A), \tag{1.12}$$

din (1.6), ținînd seama de (1.2) și (1.10), rezultă

$$y(t) \approx N_R(A)u(t) + \omega N_I(A)\int_0^t u(t)\mathrm{d}t + AN_I(A). \tag{1.13}$$

Prezența integralei în relația intrare-ieșire (1.13) pune în evidență faptul că elementul neliniar are o „memorie“, simbolizată de partea imaginară $N_I(A)$ a funcției de descriere. Acest fenomen apare numai în cazul neliniarităților polivalente, după cum se va vedea din rezultatul următor.

Teorema 1. Fie o neliniaritate bivalentă definită prin (fig. III.1, *f.*)

$$f(u) = \begin{cases} f_1(u), \text{ pentru } \dot{u} > 0, \\ f_2(u), \text{ pentru } \dot{u} < 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

astfel încît

$$f_1(u) \leqslant f_2(u), \text{ pentru } |u| < u_0, \tag{1.15}$$

$$f_1(u) = f_2(u), \text{ pentru } |u| \geqslant u_0. \tag{1.16}$$

Atunci

$$N_I(A) = -\frac{S}{\pi A^2}, \quad A \geqslant u_0, \tag{1.17}$$

unde S este aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f_1(u)$ şi $f_2(u)$.

D. În conformitate cu relaţiile (1.15), (1.10) şi (1.12) se poate calcula $N_I(A)$ după cum urmează

$$N_I(A) = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\pi A^2}\left[\int_0^{\pi/2} f(A \sin \omega t) A \cos \omega t \, d(\omega t) + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(A \sin \omega t) A \cos \omega t \, d(\omega t) + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(A \sin \omega t) A \cos \omega t \, d(\omega t)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi A^2}\int_{-A}^{A} [f_2(u) - f_1(u)] \, du = -\frac{S}{\pi A^2}. \qquad \blacksquare$$

Exemplul 1.1. Graficul neliniarităţii de tip releu, în care s-au introdus unele notaţii care permit şi studiul unor cazuri particulare, este reprezentat în fig. III. 1, *a*. Cazurile particulare posibile sînt următoarele:

a) releu bipoziţional pentru $q = 1$ şi $a = 0$;

b) releu bipoziţional cu histerezis pentru $q = -1$ şi $a > 0$;

c) releu tripoziţional pentru $q = 1$ şi $a > 0$;

d) releu tripoziţional cu histerezis pentru $|q| < 1$ şi $a > 0$.

Se cere să se determine funcţia de descriere şi locul de descriere invers negativ al acestei neliniarităţi.

În conformitate cu (1.4), (1.10), (1.12) putem scrie

$$N_R(A) = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} y(t) \sin\omega t \, d(\omega t) = \frac{2b}{\pi A}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{2b}{\pi A}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Cu

$$\sin\alpha_1 = \frac{a}{A}, \qquad \cos\alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}},$$

$$\sin\alpha_2 = q\frac{a}{A}, \qquad \cos\alpha_2 = \sqrt{1 - q^2\frac{a^2}{A^2}},$$

rezultă că partea reală a funcţiei de descriere are forma

$$N_R(A) = \frac{2b}{\pi A}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} + \sqrt{1 - q^2\frac{a^2}{A^2}}\right), \qquad A \geqslant a.$$

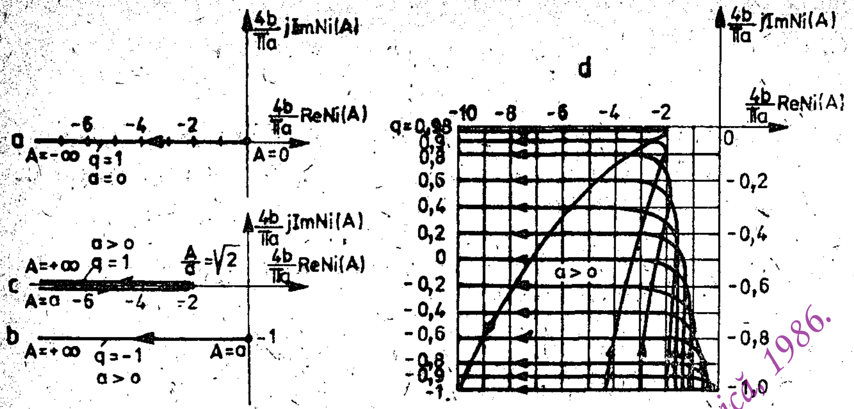


Fig. III.2. Locul de descriere invers negativ al neliniarității de tip releu *(exemplul 1.1)*: *a* — releu bipozițional; *b* — releu bipozițional cu histerezis; *c* — releu tripozițional; *d* — releu tripozițional cu histerezis.

Pentru partea imaginară a funcției de descriere, conform relației (1.17), rezultă

$$N_I(A) = -\frac{2ab}{\pi A^2}(1-q), \quad A \geqslant a.$$

Pentru particularizările considerate mai sus se obțin următoarele expresii:

a) $$N(A) = \frac{4b}{\pi A}, \quad N_i(A) = -\frac{\pi}{4b}A, \quad A > 0;$$

b) $$N(A) = \frac{4ab}{\pi A^2}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}-\mathrm{j}\right), \quad N_i(A) = -\frac{\pi a}{4b}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}+\mathrm{j}\right), \quad A \geqslant a;$$

c) $$N(A) = \frac{4ab}{\pi A^2}\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}, \quad N_i(A) = -\frac{\pi A^2}{4ab}\frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}}, \quad A > a;$$

d) $$N(A) = \frac{2ab}{\pi A^2}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}+\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-q^2}-\mathrm{j}(1-q)\right),$$

$$N_i(A) = -\frac{\pi A^2}{4ab}\,\frac{\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-q^2}+\mathrm{j}(1-q)}{\frac{A^2}{a^2}-q^2+\sqrt{\left(\frac{A^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{A^2}{a^2}-q^2\right)}}, \quad A \geqslant a.$$

Locurile de descriere invers negative sînt reprezentate în fig. III.2.

1.1.2. Calculul aproximativ al funcției de descriere

Dacă neliniaritatea (1.1) este univalentă atunci, sub ipoteza 2°, ea este o funcție impară. Ca atare coeficientul A_1 din (1.10) se poate calcula și cu formula

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(A \sin \omega t) \sin \omega t \, \mathrm{d}(\omega t). \tag{1.18}$$

Făcînd substituțiile $x = \sin \omega t$ și $g(x) = xf(A\,x)$, din (1.18) se obține, [T1],

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left[g(1) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(-\frac{1}{2}\right) + g(-1)\right],$$

ceea ce înseamnă

$$A_1 \approx \frac{2}{3}\left[f(A) + f\left(\frac{A}{2}\right)\right]. \tag{1.19}$$

Întrucît în cazul neliniarităților univalente $N_I(A) = 0$ (v. *teorema 1*), din (1.10) și (1.19) rezultă

$$N(A) = N_R(A) \approx \frac{2}{3A}\left[f(A) + f\left(\frac{A}{2}\right)\right]. \tag{1.20}$$

Expresia (1.20), pe lîngă simplitate, oferă posibilitatea determinării unei neliniarități $f(u)$ atunci cînd se cunoaște funcția de descriere $N(A)$. Într-adevăr, presupunînd că amplitudinea intrării u ia succesiv valorile $A, \frac{1}{2}A, \frac{1}{2^2}A, \ldots, \frac{1}{2^n}A, \ldots$, din (1.20) se obține următorul șir de egalități

$$\frac{3}{2}AN(A) = f(A) + f\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$-\frac{3}{2^2}AN\left(\frac{A}{2}\right) = -f\left(\frac{A}{2}\right) - f\left(\frac{A}{2^2}\right),$$

$$\frac{3}{2^3}AN\left(\frac{A}{2^2}\right) = f\left(\frac{A}{2^2}\right) + f\left(\frac{A}{2^3}\right),$$

....

$$(-1)^n\frac{3}{2^{n+1}}AN\left(\frac{A}{2^n}\right) = (-1)^n f\left(\frac{A}{2^n}\right) + (-1)^n f\left(\frac{A}{2^{n+1}}\right),$$

....

Sumînd relațiile de mai sus membru cu membru se obține

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3A}{2^{n+1}} N\left(\frac{A}{2^n}\right), \tag{1.21}$$

deoarece, pe lîngă o serie de reduceri de termeni, are loc și $f\left(\frac{A}{2^{n+1}}\right) \to 0$ pentru $n \to +\infty$ (f este funcție impară).

În aplicații sînt suficienți primii cîțiva termeni pentru a determina o neliniaritate f pe baza cunoașterii funcției sale de descriere (după cum se va arăta la *exemplul 1.3*).

Procedeul de calcul aproximativ al funcției de descriere prezentat mai sus a fost extins și pentru neliniarități polivalente (uzual bivalente) și asimetrice, [C3].

1.1.3. Structura unui sistem automat neliniar

Analogiile dintre noțiunile de răspuns la frecvență și de funcție de descriere permit tratarea sistemelor automate neliniare monovariabile în maniera cunoscută de la sistemele automate liniare. Ca și acolo, sistemele automate neliniare pot fi descompuse structural în subsisteme. Unele sînt liniare, iar altele sînt neliniare. În situații în care subsistemele neliniare pot fi reduse la o singură neliniaritate, *schema bloc structurală tipică* a unui sistem automat neliniar are forma din fig. III.3, *a*.

Pentru cele ce urmează vom presupune că partea liniară, pe lîngă ipoteza 4° de la 1.1.1, mai satisface următoarele ipoteze:

1° are cel mult un pol pe axa imaginară și anume $s = 0$, iar restul polilor sînt toți în semiplanul Re $s < 0$;

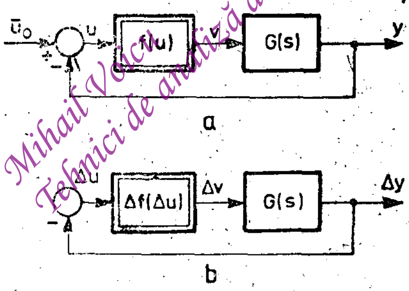


Fig. III.3. Schema bloc structurală tipică (*a*) și standard (*b*) a unui sistem automat cu o singură neliniaritate.

2° părțile de stare necontrolabilă și/sau neobservabilă sînt asimptotic stabile;

3° conține eventual și un element cu timp mort.

Dacă $\bar{u}_0 =$ const. atunci evoluția sistemului, conform fig. III.3, *a*, are loc în jurul unui *punct de funcționare* caracterizat prin ecuațiile

$$\begin{cases} y_0 = G(p)\, v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \bar{u}_0 - y_0. \end{cases} \tag{1.22}$$

în care $G(s)$ este funcția de transfer a părții liniare a sistemului și $p = \frac{d}{dt}$ este operatorul de derivare introdus formal prin înlocuirea variabilei s în $G(s)$. Pentru micile abateri Δu, Δv și Δy ale mărimilor u, v și y în jurul valorilor u_0, v_0 și y_0 putem scrie ecuațiile

$$\begin{cases} y_0 + \Delta y = G(p)\,(v_0 + \Delta v) \\ v_0 + \Delta v = f(u_0 + \Delta u) \\ u_0 + \Delta u = \bar{u}_0 - y_0 - \Delta y. \end{cases} \tag{1.23}$$

Ținînd seama de (1.22), ecuațiile (1.23) devin

$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\,\Delta v \\ \Delta v = \Delta f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y, \end{cases} \tag{1.24}$$

unde s-a notat

$$\Delta f(\Delta u) = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0). \tag{1.25}$$

Pe baza ecuațiilor (1.24) schema bloc din fig. III.3, *a* poate fi adusă la forma reprezentată în fig. III.3, *b*, numită *forma standard* asociată punctului de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$.

1.1.4. Oscilații întreținute

Se remarcă imediat că sistemul automat din fig. III.3, *b*, descris de ecuațiile (1.24), se caracterizează prin starea de echilibru $\Delta y = 0$ (respectiv $\Delta y = 0$ este soluția ecuațiilor (1.24)).

Vom presupune că pentru punctul de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ aceasta este singura stare de echilibru posibilă.

În afara acestei soluții este posibil ca ecuațiile (1.24) să admită și *soluții periodice*, respectiv *oscilații întreținute* în jurul punctului de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$, după cum se va vedea din rezultatul următor.

Teorema 2. Sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* și în ipotezele 1°—4° de la 1.1.1 și 1°—3° de la 1.1.3, este sediul unor oscilații întreținute dacă și numai dacă

$$N(A)\,G(j\omega) + 1 = 0, \quad A > 0, \quad \omega > 0. \tag{1.26}$$

D. *Necesitatea.* Dacă sistemul automat, respectiv ecuațiile (1.24) admit o soluție periodică, atunci, datorită efectului de filtru trece-jos al părții liniare, la intrarea elementului neliniar preponderentă este fundamentala

$$\Delta u_1(t) = A \sin \omega t, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1.27}$$

În aceste condiții, trecînd la mărimi complexe, din ecuațiile (1.24) la nivelul fundamentalelor, rezultă

$$\begin{cases} \Delta Y_1(A, \mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega)\, \Delta V_1(A, \mathrm{j}\omega) \\ \Delta V_1(A, \mathrm{j}\omega) = N(A)\, \Delta U_1(A, \mathrm{j}\omega) \\ \Delta U_1(A, \mathrm{j}\omega) = -\Delta Y_1(A, \mathrm{j}\omega). \end{cases}$$

Eliminînd $\Delta V_1(A, \mathrm{j}\omega)$ și $\Delta Y_1(A, \mathrm{j}\omega)$ între ecuațiile de mai sus se obține

$$[N(A)\, G(\mathrm{j}\omega) + 1]\, \Delta U_1(A, \mathrm{j}\omega) = 0. \tag{1.28}$$

Întrucît $\Delta U_1(A, \mathrm{j}\omega) \neq 0$, din (1.28) rezultă (2.26).

Suficiența. Dacă are loc (1.26) atunci există cel puțin o pereche $A > 0$, $\omega > 0$ care definește fundamentala (1.27) a mărimii Δu, ceea ce înseamnă că sistemul automat neliniar este sediul unor oscilații întreținute. ■

Ecuația (1.26), care, prin analogie cu cazul liniar, este *ecuația caracteristică* a sistemului automat neliniar, se numește *ecuația balanței armonice*. Această ecuație, în general complexă, este echivalentă cu ecuațiile reale

$$\begin{cases} N_R(A) = -\operatorname{Re} G^{-1}(\mathrm{j}\omega) \\ N_I(A) = -\operatorname{Im} G^{-1}(\mathrm{j}\omega). \end{cases} \tag{1.29}$$

În cazul neliniarității univalente funcția de descriere este reală, astfel că ecuațiile (1.29) au forma particulară

$$\begin{cases} N(A) = -\operatorname{Re} G^{-1}(\mathrm{j}\omega) \\ \operatorname{Im} G^{-1}(\mathrm{j}\omega) = 0 \qquad (\text{sau } \operatorname{Im} G(\mathrm{j}\omega) = 0), \end{cases} \tag{1.30}$$

situație în care din a doua ecuație se calculează pulsațiile oscilațiilor întreținute (așadar determinate numai de partea liniară a sistemului automat), iar din prima ecuație se calculează amplitudinile corespunzătoare ale fundamentalelor.

Dacă $N(A)$ și $G(j\omega)$ au expresii complicate este dificil de găsit pe cale analitică soluțiile ecuațiilor (1.29). În astfel de cazuri se utilizează procedee grafice.

Pentru rezolvarea pe cale grafică a ecuației (1.26) aceasta se scrie sub forma

$$G(j\omega) = N_i(A), \tag{1.31}$$

unde $N_i(A)$ este funcția de *descriere invers negativă* a neliniarității $\Delta f(\Delta u)$. Se reprezintă în același plan hodografele $G(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$ și $N_i(A)$, $A \geqslant 0$; punctele lor de intersecție corespund oscilațiilor întreținute ale sistemului automat neliniar — fig. III.4. Această metodă, foarte utilă pentru obținerea unei imagini globale asupra existenței soluțiilor periodice, este cunoscută sub numele de *metoda celor două locuri*.

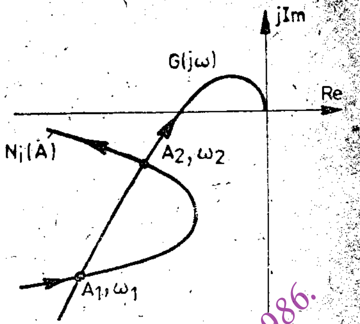


Fig. III.4. Metoda celor două locuri.

Exemplul 1.2. Se consideră sistemul automat cu structura din fig. III.3, *b*, în care $\Delta f(\Delta u) = b \operatorname{sgn} \Delta u$ (releu bipozițional) și $G(s) = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)^{-1}$, cu $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ și $a_3 \geqslant 0$.

Se cere să se studieze existența soluțiilor periodice și în caz afirmativ să se determine pulsațiile și amplitudinile fundamentalelor.

Funcția de descriere a neliniarității de tip releu bipozițional a fost determinată la *exemplul 1.1.* (a) și locul de descriere invers negativ a fost reprezentat în fig. III.2, *a*. Aplicînd metoda celor două locuri — fig. III.5, rezultă că există o singură oscilație întreținută, oricare ar fi parametrii releului și oricare ar fi parametrii părții liniare. În virtutea ecuațiilor (1.30) putem scrie

$$\frac{4b}{\pi A} = -\mathrm{Re}\,(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3),$$

$$\mathrm{Im}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) = 0,$$

din care rezultă $\omega_1 = \sqrt{a_2}$ și $A_1 = \dfrac{4b}{\pi\,(a_1 a_2 - a_3)}$.

Din condiția $A_1 > 0$ rezultă $a_1 a_2 - a_3 > 0$; aceasta înseamnă că dacă $a_3 > 0$ atunci partea liniară trebuie să fie stabilă IMEM (conform *teoremei 5* de la II. 1.1.2). Fundamentala oscilației întreținute este

$$\Delta u_1(t) = \frac{4b}{\pi\,(a_1 a_2 - a_3)} \sin \sqrt{a_2}\,t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

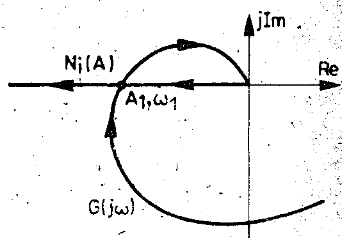


Fig. III.5. Aplicarea metodei celor două locuri la *exemplul 1.2.*

Exemplul 1.3. Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* în care $G(s) = 0{,}4\ (s^3 + s^2 + s)^{-1}$.

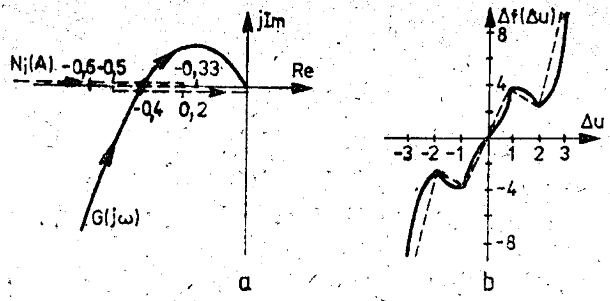


Fig. III.6. Aplicarea metodei celor două locuri (*a*) și graficul neliniarității (*b*) la *exemplul 1.3.*

Se cere să se determine neliniaritatea univalentă $\Delta f(\Delta u)$ astfel încît sistemul automat să admită trei oscilații întreținute.

Întrucît neliniaritatea este univalentă, locul de descriere invers negativ se va situa pe semiaxa reală negativă a planului celor două locuri. În același plan, locul de transfer $G(j\omega) = 0{,}4(-j\omega^3 - \omega^2 + j\omega)^{-1}$, fig. III.6, *a*, intersectează semiaxa reală negativă în punctul $(-0{,}4,\ j\,0)$ corespunzător pulsației $\omega_1 = 1$. În aceste condiții forma posibilă a locului de descriere invers negativ este cea trasată cu linie întreruptă în fig. III.6, *a*, corespunzător tabelului

A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	4	5	10	∞
$N_i(A)$	$-\infty$	$-0{,}66$	$-0{,}33$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}25$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0
$N(A)$	0	1,5	3	2,5	2	3	4	5	10	∞

Se asigură astfel trei soluții periodice, toate de aceeași pulsație $\omega_1 = 1$, dar de amplitudini (pe fundamentală) $A_1 = 0{,}83$, $A_2 = 1{,}5$ și $A_3 = 2{,}5$.

Utilizînd formula (1.21) cu numai primii patru termeni se obține pentru neliniaritatea căutată următorul tabel de corespondență

A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	10	∞
$\Delta f(A)$	0	0,825	3,6	3,3	2,34	5,58	9,8	21,4	31,6	117	∞

căruia îi corespunde graficul din fig. III.6, *b* (trasat cu linie continuă). Pentru realizarea ei practică se poate recurge la aproximarea printr-o linie poligonlă (trasată cu linie întreruptă).

1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute

Caracterizarea oscilațiilor întreținute din punctul de vedere al stabilității lor necesită un studiu mai aprofundat în sensul nuanțărilor posibile, corespunzătoare celor prin care se poate caracteriza un punct de echilibru.

1.2.1. Oscilații limită

Vom presupune că în sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* s-a instalat un regim de oscilații întreținute și că, într-un mod oarecare, este posibilă perturbarea de scurtă durată a amplitudinii lor, în sensul creșterii sau în sensul scăderii. În funcție de evoluția în timp a soluțiilor, ulterioară perturbării, se disting următoarele trei cazuri.

Definiția 2. Oscilația limită se numește *limită stabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atît în sensul creșterii, cît și al scăderii amplitudinii ei, cu creșterea timpului soluția revine la forma precedentă perturbării.

Definiția 3. Oscilația întreținută se numește *limită instabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atît în sensul creșterii cît și al scăderii amplitudinii ei, cu creșterea timpului soluția nu mai revine la forma precedentă perturbării.

Definiția 4. Oscilația întreținută se numește *limită semistabilă*, sau concret *stabilă (instabilă) la stînga* și respectiv *instabilă (stabilă) la dreapta*, dacă după perturbarea de scurtă durată, în sensul scăderii și respectiv al creșterii amplitudinii ei, cu creșterea timpului, soluția revine (nu revine) și respectiv nu revine (revine) la forma precedentă perturbării.

1.2.2. Regula lui Loeb

O oscilație întreținută, oricare ar fi natura ei, se caracterizează prin existența unei perechi $A_0 > 0$, $\omega_0 > 0$, soluție a ecuației balanței armonice (1.26). O perturbare a ei la $t = 0$ are ca efect variația amplitudinii de la A_0 la $A_0 + \Delta A$ și a pulsației de la ω_0 la $\omega_0 + \Delta\omega$. Apare astfel o nouă oscilație care nu mai este riguros periodică, deoarece este afectată de o amortizare ζ pozitivă sau negativă. Expresia acestei oscilații, la nivelul fundamentalei, este

$$\Delta y_1(t) = \operatorname{Im} (A_0 + \Delta A)\, e^{-\zeta t}\, e^{j(\omega_0 + \Delta\omega)t}, \qquad t \in \mathbf{R}_+. \tag{1.32}$$

Conform *definițiilor 2 și 3* și relației (1.32), oscilația întreținută este limită stabilă dacă

$$\Delta A \zeta > 0 \tag{1.33}$$

și este limită instabilă dacă

$$\Delta A \zeta < 0. \tag{1.34}$$

Pentru a converti condițiile (1.33) și (1.34) în niște condiții utilizabile practic pornim de la faptul că înainte de perturbare era satisfăcută ecuația (1.26), adică

$$N(A_0)\, G(j\omega_0) + 1 = 0, \tag{1.35}$$

și că după perturbare, pentru $|\Delta A|$, $|\Delta\omega|$ și $|\zeta|$ suficient de mici, are loc

$$N(A_0 + \Delta A)\, G[j(\omega_0 + \Delta\omega + j\zeta)] + 1 = 0, \tag{1.36}$$

respectiv

$$X(A_0 + \Delta A,\ \omega_0 + \Delta\omega + j\varphi) + jY(A_0 + \Delta A,\ \omega_0 + \Delta\omega + j\zeta) = 0, \tag{1.37}$$

unde

$$\begin{cases} X(A, \omega) = -N_{iR}(A) + G_R(\omega) \\ Y(A, \omega) = -N_{iI}(A) + G_I(\omega), \end{cases} \tag{1.38}$$

cu

$$N_{iR}(A) = \operatorname{Re} N_i(A), \qquad N_{iI}(A) = \operatorname{Im} N_i(A), \tag{1.39}$$

$$G_R(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \qquad G_I(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega). \tag{1.40}$$

În ipoteza că funcțiile $X(A, \omega)$ și $Y(A, \omega)$ sînt derivabile într-o vecinătate a punctului (A_0, ω_0) se poate aplica în (1.37) formula creșterilor finite, ceea ce conduce la

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_1} \Delta A + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{\omega_1} (\Delta\omega + j\zeta) + j\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_1} \Delta A + \\ + j\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{\omega_1} (\Delta\omega + j\zeta) = 0, \tag{1.41}$$

unde s-a ținut seama de faptul că ecuației (1.35), cu notațiile (1.38)—(1.40), îi corespunde ecuația

$$X(A_0, \omega_0) + jY(A_0, \omega_0) = 0$$

și $A_1 = A_0 + \alpha\Delta A$, $\omega_1 = \omega_0 + \beta(\Delta\omega + j\zeta)$ cu $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Efectuînd calculele în (1.41), anulînd părțile reală și imaginară și apoi eliminînd $\Delta\omega$ între aceste ecuații se obține

$$S_1 \Delta A = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{\omega_1}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{\omega_1}^2\right] \zeta, \tag{1.42}$$

unde

$$S_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_1} \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{\omega_1} - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{\omega_1} \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_1}. \tag{1.43}$$

Conform condițiilor (1.33), (1.34) și relației (1.42) oscilația întreținută este limită stabilă dacă $S_1 > 0$ și limită instabilă dacă $S_1 < 0$. Această afirmație rămîne valabilă și pentru $\Delta A \to 0$, $\Delta\omega \to 0$, $\zeta \to 0$ și respectiv $S_1 \to S_0$, unde, cu notațiile (1.38)—(1.40).

$$S_0 = \left(\frac{\mathrm{d}G_R}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} \left(\frac{\mathrm{d}N_{iI}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0} - \left(\frac{\mathrm{d}G_I}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} \left(\frac{\mathrm{d}N_{iR}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0}, \tag{1.44}$$

ceea ce ne permite să formulăm următorul enunț.

Regula 1 (Loeb). Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0), soluție a ecuației (1.26), este:
— limită stabilă dacă $S_0 > 0$;
— limită instabilă dacă $S_0 < 0$;
— limită semistabilă dacă $S_0 = 0$.

Aplicarea acestei reguli presupune desigur calculul expresiei (1.44). O posibilitate de evitare a calculului celor patru derivate din (1.44) se bazează pe observația că produsul vectorial al vectorilor

$$\bar{v}_G = \left(\frac{\mathrm{d}G_R}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} \bar{\mathrm{i}} + \left(\frac{\mathrm{d}G_I}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} \bar{\mathrm{j}},$$

$$\bar{v}_N = \left(\frac{\mathrm{d}N_{iR}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0} \bar{\mathrm{i}} + \left(\frac{\mathrm{d}N_{iI}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0} \bar{\mathrm{j}},$$

ținînd seama de (1.44), este

$$\bar{v}_G \times \bar{v}_N = |\bar{v}_G| \cdot |\bar{v}_N| \sin(\bar{v}_G, \bar{v}_N)\, \bar{\mathrm{k}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathrm{i}} & \bar{\mathrm{j}} & \bar{\mathrm{k}} \\ \left(\frac{\mathrm{d}G_R}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} & \left(\frac{\mathrm{d}G_I}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} & 0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}N_{iR}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0} & \left(\frac{\mathrm{d}N_{iR}}{\mathrm{d}A}\right)_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = S_0 \bar{k},$$

unde $\bar{\mathrm{i}}$, $\bar{\mathrm{j}}$, $\bar{\mathrm{k}}$ sînt versorii spațiului euclidian tridimensional.

Avînd în vedere că $\bar{v}_G$ și $\bar{v}_N$ sînt vectorii tangenți la hodograful $G(\mathrm{j}\omega)$ și respeciv la hodograful $N_i(A)$ în punctul lor de intersecție, caracterizat de perechea (A_0, ω_0), și că sensul pozitiv al vectorului produs vectorial se obține atunci cînd unghiul dintre $\bar{v}_G$ și $\bar{v}_N$ este cuprins între 0

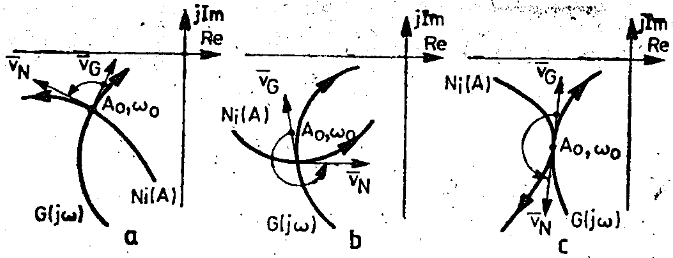


Fig. III.7. Natura oscilațiilor întreținute:
a — limită stabilă; *b* — limită instabilă; *c* — limită semistabilă.

și π (măsurat în sens pozitiv), *regula 1* poate fi reformulată după cum urmează.

Regula 2 (Loeb). Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0), soluție a ecuației (1.26), este:

— limită stabilă, dacă pornind din punctul de intersecție al celor două locuri pe hodograful $G(j\omega)$ pentru ω crescător, hodograful $N_i(A)$ pentru A crescător rămîne la stînga — fig. III.7, *a*;

— limită instabilă, dacă pornind din punctul de intersecție al celor două locuri pe hodograful $G(j\omega)$ pentru ω crescător, hodograful $N_i(A)$ pentru A crescător rămîne la dreapta — fig. III.7, *b*;

— limită semistabilă, dacă în punctul de intersecție al celor două locuri hodografele $G(j\omega)$ și $N_i(A)$ sînt tangente — fig. III.7, *c*.

Evident, *regula 2* poate fi folosită fără nici un fel de calcule, cu condiția ca să se fi trasat hodografele $G(j\omega)$ și $N_i(A)$ și constă numai în evaluarea poziției relative a celor două locuri în zonele punctelor lor de intersecție.

Exemplul 1.4. Se consideră sistemul automat de la *exemplul 1.3*.
Se cere să se determine natura celor trei oscilații întreținute.
Conform fig. III.6, *a* și *regulii 2* numai oscilația caracterizată prin $\omega_1 = 1$ și $A_1 = 1{,}5$ este limită stabilă în timp ce celelalte două sînt limită instabile. Aceste constatări permit și o caracterizare mai detaliată a proprietăților sistemului. De exemplu dacă funcționarea sistemului are loc la oscilația limită stabilă, orice perturbare a acesteia, cu $0{,}83 < A < 2{,}5$, este urmată de revenirea la oscilația limită stabilă. Dacă $A < 0{,}83$ atunci pentru $t \to \infty$, $A \to 0$. Dacă $A > 2{,}5$ atunci pe tru $t \to \infty$, $A \to \infty$.

Din cele puse în evidență la *exemplul 1.4* se trage concluzia că dacă cele două locuri au mai multe puncte de intersecție, nici unul dintre ele nefiind de tangență, atunci, în mod logic, natura oscilațiilor întreținute, de exemplu, în ordinea crescătoare a amplitudinilor, este cea redată în fig. III.8, *a*, *b*. Dacă există și puncte de tangență ale celor două locuri atunci oscilațiile semistabile sînt stabile la dreapta, dacă se situează

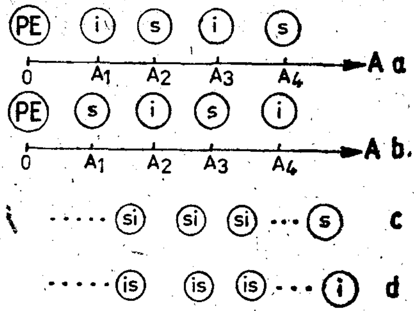


Fig. III.8. Succesiunea oscilațiilor limită: *s* — stabile; *i* — instabile; *si* — stabile la stînga și instabile la dreapta; *is* — instabile la stînga și stabile la dreapta; *PE* — punctul de echilibru.

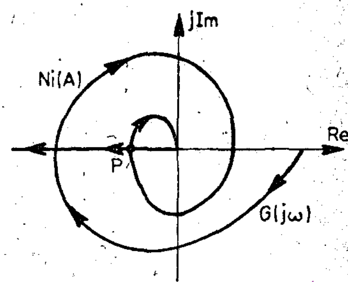


Fig. III.9. „Defecțiunea“ regulii lui Loeb.

la stînga unei oscilații instabile, fig. III.8, *c* și instabile la dreapta, dacă se situează la stînga unei oscilații stabile, fig. III. 8, *d*.

Oscilațiile limită stabile, numite și *autooscilații*, sînt fenomene neliniare tipice. Ele nu au corespondent în cazul sistemelor automate liniare și nu pot fi, principial, produse decît cu ajutorul sistemelor automate neliniare.

Aplicarea *regulilor 1 și 2* pentru determinarea naturii oscilațiilor trebuie să se facă cu circumspecție, deoarece ele pot da rezultate eronate în cazul punctelor de intersecție ale celor două locuri situate în interiorul spiralei locului de transfer $G(j\omega)$. Un exemplu concludent în acest sens este acela pentru care neliniaritatea este un releu bipozițional și partea liniară, stabilă IMEM, este de forma

$$G(s) = (s^7 + a_1 s^6 + a_2 s^5 + \ldots + a_7)^{-1}.$$

Folosind metoda celor două locuri, avînd în vedere și fig. III.2, *a*, se obține imaginea din fig. III.9. Așadar sînt posibile două oscilații întreținute și, conform *regulii 2*, ambele sînt oscilații limită stabile, ceea ce nu este plauzibil. În realitate, așa cum arată rezultatele obținute prin simulare, oscilația corespunzătoare punctului P din fig. III.9 este limită semistabilă (stabilă la stînga și instabilă la dreapta).

Cu acest prilej mai facem observația că dacă ipoteza 4° de la 1.1.1 nu este satisfăcută sau în sistem apar oscilații întreținute de pulsații mult mai mici ca pulsația de tăiere a părții liniare atunci rezultatele care se obțin cu ajutorul ecuației balanței armonice (1.26) sînt afectate de erori importante.

1.3. Stabilitatea asimptotică a sistemelor automate neliniare

1.3.1. Criteriul Kochenburger

Desigur că existenţa unor oscilaţii întreţinute într-un sistem automat neliniar denotă faptul că respectivul sistem nu este global asimptotic stabil în punctul de funcţionare considerat. Metoda celor două locuri, prin analogie cu cazul liniar, permite o extensie naturală a criteriului Nyquist şi pentru cazul sistemelor automate neliniare.

Teorema 3 (Kochenburger). Sistemul automat neliniar cu structura din fig. III. 3, *b* şi în ipotezele 1°—4° de la 1.1.1 şi 1°—3° de la 1.1.3 are soluţia $\Delta y = 0$, corespunzătoare punctului de funcţionare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$, global asimptotic stabilă dacă şi numai dacă la parcurgerea locului de transfer $G(j\omega)$, în sensul crescător al lui ω, locul de descriere invers negativ $N_i(A)$ rămîne la stînga şi complet în afara sa.

Rolul punctului critic $(-1, j0)$ este jucat aici de locul de descriere invers negativ $N_i(A)$. Din acest motiv $N_i(A)$ se mai numeşte şi *locul critic* al sistemului automat neliniar.

Spre desoebire de criteriul Nyquist, în cazul de faţă nu se poate afirma nimic despre stabilitatea IMEM a sistemului automat deoarece $\bar{u}_0 =$ $=$ constant şi sistemul se află într-o stare de echilibru. Reamintim că stabilitatea IMEM presupune că mărimea de intrare este orice funcţie de timp, mărginită în normă.

Evident, în legătură cu stabilitatea asimptotică a sistemului automat neliniar se poate afirma următorul rezultat.

Teorema 4. Sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* şi în ipotezele 1°—4° de la 1.1.1 şi 1°—3° de la 1.1.3 este asimptotic stabil dacă şi numai dacă pentru orice punct de funcţionare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ soluţia $\Delta y = 0$ este global asimptotic stabilă.

1.3.2. Aplicaţie: stabilitatea asimptotică a unui sistem automat de urmărire

Pentru sistemul automat de urmărire de la I.1.4.7 s-a ales la III.3.2.2 un regulator, în ipoteza că toate elementele sistemului automat sînt liniare, astfel încît acesta să fie stabil IMEM cu o anumită stabilitate relativă. Ne propunem să verificăm dacă neliniaritatea de tip joc în angrenaje — fig. III.1, *e*, care caracterizează reductorul *Rm*, influențează stabilitatea asimptotică a sistemului automat de urmărire..

Funcția de descriere a neliniarității de tip joc în angrenaje, cu notațiile din fig. III.1, *e*, are expresia, [B 6],

$$N(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2\varepsilon}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2\varepsilon}{A}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{A} - \frac{\varepsilon^2}{A^2}} + \right.$$

$$\left. + j4\left(\frac{\varepsilon^2}{A^2} - \frac{\varepsilon}{A}\right)\right]. \tag{1.45}$$

Hodografele $N_i(A)$, $A \geqslant 0$, și $G(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$ (pentru aplicarea metodei celor două locuri) au formele din fig. III.10. Întrucît raportul de transmisie k_2 al reductorului *Rm* a fost inclus în funcția de transfer a sistemului deschis $G(s)$ se consideră $k = 1$, ceea ce corespunde situației în care locul critic $N_i(A)$ trece prin punctul $(-1, j0)$. În acest caz, conform *teoremelor 3 și 4* sistemul automat de urmărire este asimptotic stabil. Dacă raportul de transmisie crește și anume de k ori atunci locul critic $N_i(A)$ se deplasează omotetic spre dreapta, ajungîndu-se pentru $k = 2$, la un punct de tangență între locul critic $N_i(A)$ (trasat cu linie punct în fig. III.10) și locul de transfer $G(j\omega)$. De aici se trage concluzia că sistemul automat de urmărire este asimptotic stabil pentru $0 < k < 2$. Pentru $k \geqslant 2$ în sistem apar oscilații întreținute de pulsații și ampli-

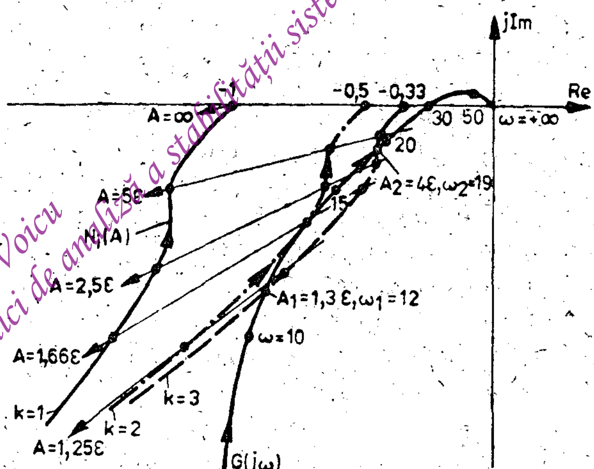


Fig. III.10. Cele două locuri în cazul unui sistem automat de urmărire cu neliniaritate de tip joc.

tudini (pe fundamentală) bine definite. De exemplu pentru $k = 3$ apar oscilațiile întreținute $1{,}3\varepsilon \sin 12\,t$ și $4\varepsilon \sin 19t$. Prima este limită instabilă, în timp ce a doua este limită stabilă.

1.3.3. Criteriul Bilharz

Ecuația balanței armonice (1.26) mai poate fi utilizată pentru studiul stabilității asimptotice pe baza localizării rădăcinilor ei în planul complex.

Ținînd seama că

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{1.46}$$

unde $P(s)$ și $Q(s)$ sînt două polinoame relativ prime între ele, ecuația (1.26), în care s-a înlocuit $j\omega = s$, are aceleași rădăcini ca și polinomul

$$\Delta(s, A) = P(s) + N(A)\,Q(s). \tag{1.47}$$

Teorema 5. Sistemul automat neliniar cu structura din fig. III. 3, *b* și în ipotezele 1°—4° de la 1.1.1 și 1°, 2° de la 1.1.3 are soluția $\Delta y = 0$, corespunzătoare punctului de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$, global asimptotic stabilă dacă și numai dacă polinomul (1.47) este hurwitzian pentru orice $A > 0$.

Teorema 6. Sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* și în ipotezele 1°—4° de la 1.1.1 și 1°, 2° de la 1.1.3 este asimptotic stabil dacă și numai dacă pentru orice punct de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ polinomul (1.47) este hurwitzian pentru orice $A > 0$.

În cazul neliniarităților multivalente $N(A)$ este o funcție complexă ceea ce înseamnă că polinomul (1.47) are în general coeficienți complecși. Pentru aplicarea tehnicilor polinomiale clasice (criteriile Hurwitz, Routh etc.) au fost necesare extinderi adecvate. Vom enunța în continuare, fără a da o demonstrație, o generalizare a criteriului Hurwitz (v. *teorema 5* de la II.1.1.2), [B.8].

Fie

$$\Delta(s) = s^n + (a_{R1} + ja_{I1})\,s^{n-1} + (a_{R2} + ja_{I2})\,s^{n-2} + \ldots + (a_{Rn} + ja_{In}), \tag{1.48}$$

în care a_{Ri}, a_{Ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt numere reale, și matricea Bilharz de ordinul $2n$ asociată polinomului $\Delta(s)$,

$$B_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & -a_{R6} & -a_{I7} & \ldots \\ 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & a_{I6} & -a_{R7} & \ldots \\ 0 & 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & -a_{R6} & \ldots \\ 0 & 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & a_{I6} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

în care $a_{Ri} = a_{Ii} = 0$ pentru $i > n$.

Teorema 7 (Bilharz). **Polinomul** (1.48) este hurwitzian dacă și numai dacă

$$\det B_{2k} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.50}$$

O extindere asemănătoare s-a dat și metodei locului rădăcinilor (v. II. 1.1.7). Utilizarea ei, ca și a celorlalte tehnici polinomiale, este totuși limitată datorită complicațiilor de calcul pe care le introduce dependența rădăcinilor ecuației (1.2) de amplitudinea A.

Exemplul 1.5. Se consideră sistemul automat de urmărire cu structura din fig. III. 3, *b* în care neliniaritatea este un releu cu caracteristica din fig. III. 1, *a* și partea liniară (amplificatorul și servomotorul) este descrisă de funcția de transfer $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

Se cere să se determine parametrii releului pentru care sistemul automat de urmărire este asimptotic stabil.

Funcția de descriere a fost determinată la *exemplul 1.1* (d). În conformitate cu (1.47)

$$\Delta(s, A) = s^2 + s + \alpha - j\beta,$$

unde

$$\alpha = \frac{2ab}{\pi A^2}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2} - 1} + \sqrt{\frac{A^2}{a^2} - q^2}\right), \quad \beta = \frac{2ab(1-q)}{\pi A^2}, \quad A \geqslant a.$$

Matricea Bilharz corespunzătoare polinomului $\Delta(s, A)$ are forma

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

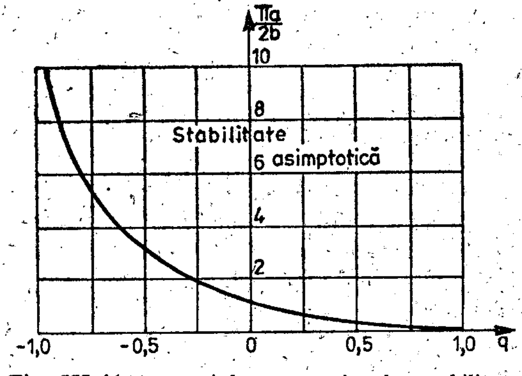


Fig. III. 11. Domeniul parametric de stabilitate asimptotică la *exemplul 1.5.*

și conform condiției (1.50) rezultă $B_2 = 1 > 0$ și $B_4 = \alpha - \beta^2 > 0$. Cu notațiile utilizate, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\sqrt{\frac{A^2}{a^2} - 1} + \sqrt{\frac{A^2}{a^2} - q^2} > \frac{2\,ab}{\pi A^2}\,(1-q)^2,$$

care trebuie să fie satisfăcută pentru orice $A \geqslant a$.

Întrucît expresia

$$A^2\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2} - 1} + \sqrt{\frac{A^2}{a^2} - q^2}\right)$$

este monoton crescătoare pentru $A \geqslant a$, rezultă că ultima inegalitate are loc pentru orice $A \geqslant a$ dacă și numai dacă ea are loc pentru $A = a$. Aceasta conduce la rezultatul

$$a > \frac{2b}{\pi}(1-q)\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}, \qquad |q| < 1.$$

Domeniul corespunzător de stabilitate asimptotică este reprezentat în fig. III. 11.

1.3.4. Stabilitatea asimptotică în mic

Conform ecuațiilor (1.24) un sistem automat neliniar cu structura din fig. III.3, *b* se caracterizează prin starea de echilbru $\Delta y = 0$, corespunzătoare punctului de funcționare $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$. S-a văzut la 1.3.1 și la 1.3.3 în ce condiții această stare de echilibru este global asimptotic stabilă.

În situația în care în sistem există oscilații limită, în funcție de natura celei mai apropiate de starea de echilibru $\Delta y = 0$, respectiv a celei de amplitudinea ($A_1 > 0$) cea mai mică, soluția $\Delta y = 0$ poate fi caracterizată după cum urmează:

a) soluția $\Delta y = 0$ este instabilă dacă și numai dacă oscilația de amplitudinea A_1 este stabilă sau stabilă la stînga (semistabilă), fig. III.8, *b*, *c*.;

b) soluția $\Delta y = 0$ este *asimptotic stabilă în mic* și anume pentru $0 \leqslant A < A_1$ dacă și numai dacă soluția de amplitudine A_1 este instabilă sau instabilă la stînga (semistabilă), fig. III. 8, *a*, *d*.

În ambele cazuri amplitudinea A_1 se poate determina prin metoda celor două locuri, iar natura oscilației întreținute se poate determina cu regula lui Loeb. În cazul b) acest lucru este echivalent cu determinarea domeniului $|\Delta y| < A_1$ pentru care soluția $\Delta y = 0$ este asimptotic stabilă. Astfel, pentru sistemul de la *exemplul 1.2* soluția $\Delta y = 0$ este instabilă deoarece singura oscilație întreținută este limită stabilă, fig. III.5. În schimb sistemul de la *exemplul 1.3* are soluția $\Delta y = 0$ asimptotic stabilă în mic și anume pentru $|\Delta y| < 0{,}83$, deoarece oscilația de amplitudinea cea mai mică $A_1 = 0{,}83$ este limită instabilă, fig. III.6, *a*. Și în cazul sistemului de urmărire de la 1.3.2, pentru $k = 3$ soluția $\Delta y = 0$ este asimptotic stabilă pentru $|\Delta y| < 1{,}3\varepsilon$, deoarece oscilația întreținută de amplitudine $A_1 = 1{,}3\varepsilon$ este limită instabilă, fig. III.10.

1.4. Problema stabilizării

1.4.1. Posibilități de stabilizare

În cazul sistemelor automate neliniare monovariabile există, principial, două căi pentru realizarea stabilizării:

a) introducerea în mod deliberat a unei neliniarități;

b) introducerea unor elemente de corecție liniare.

Ambele posibilități sînt ilustrate prin schema bloc structurală din fig. III.12, în care $N_c(A)$ este funcția de descriere a elementului corector neliniar și $G_{c1}(j\omega)$, $G_{c2}(j\omega)$ sînt răspunsurile la frecvență ale elementelor de corecție liniare. Conform acestei scheme ecuația balanței armonice are forma

$$G_{c1}(j\omega)\, G_{c2}(j\omega)\, N_c(A) + G_{c1}(j\omega)\, G(j\omega)\, N(A) + 1 = 0. \tag{1.51}$$

Dacă se adoptă

$$N_c(A) = N(A) \tag{1.52}$$

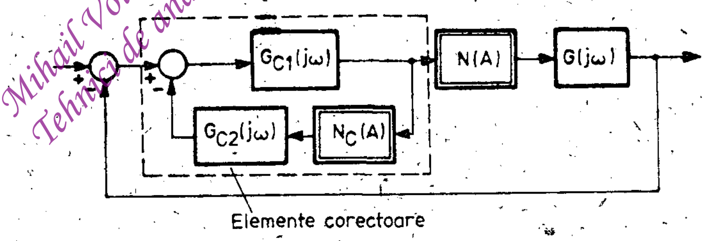


Fig. III.12. Posibilități de realizare a stabilizării unui sistem automat neliniar.

atunci din (1.51) rezultă

$$G_{c1}(j\omega)\,[G_{c2}(j\omega) + G(j\omega)]\,N(A) + 1 = 0, \tag{1.53}$$

ceea ce permite alegerea adecvată a elementelor de corecţie liniare.

Dacă se adoptă

$$G_{c2}(j\omega) = G(j\omega) \tag{1.54}$$

atunci din (1.51) se obţine

$$G_{c1}(j\omega)\,G_{c2}(j\omega)\,[N_c(A) + N(A)] + 1 = 0, \tag{1.55}$$

ceea ce permite alegerea unei neliniarităţi adecvate pentru realizarea performanţelor impuse.

În sfîrşit, dacă se adoptă

$$N_c(A) = 1 - N(A), \quad G_{c2}(j\omega) = G(j\omega) \tag{1.56}$$

din (1.51) rezultă

$$G_{c1}(j\omega)\,G_{c2}(j\omega) + 1 = 0, \tag{1.57}$$

ceea ce este echivalent cu o compensare a neliniarităţii $N(A)$ şi transformarea sistemului într-un sistem automat liniar.

1.4.2. Utilizarea diagramei Bode

Avînd în vedere aspectul frecvenţial al metodei funcţiei de descriere, orientarea spre utilizarea diagramei Bode atît pentru analiza stabilităţii cît şi pentru rezolvarea problemei stabilizării a fost pe deplin naturală.

Pentru mai multă flexibilitate în manipularea diagramei Bode funcţia de descriere se pune sub forma

$$N(A) = k_n N_n(\alpha), \quad \alpha = \frac{A}{a}, \tag{1.58}$$

unde k_n este un coeficient de normare, a este un parametru al neliniarităţii, α este amplitudinea normată şi $N_n(\alpha)$ este funcţia de descriere normată.

Înlocuind (1.58) în (1.26) se obţine

$$N_n(A)\,G_n(j\omega) + 1 = 0, \tag{1.59}$$

unde

$$G_n(j\omega) = k_n G(j\omega) \tag{1.60}$$

este răspunsul la frecvenţă normat al părţii liniare a sistemului automat.

În mod evident ecuația (1.59) este echivalentă cu

$$20 \lg |G_n(j\omega)| = -20 \lg |N_n(A)|, \tag{1.61}$$

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)\pi - \arg N_n(A), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{1.62}$$

Dacă neliniaritatea este univalentă atunci $\arg N_n(A) = 0$ și ecuația (1.62) devine

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{1.63}$$

Determinarea oscilațiilor întreținute constă în următoarele. Din diagrama Bode a părții liniare se obțin pulsațiile ω_k pentru care $\arg G_n(j\omega)$ ia valorile $-\pi$, -3π, ..., și apoi se măsoară atenuările corespunzătoare $20 \lg |G_n(j\omega_k)|$. În continuare urmează să se verifice dacă există valori ω_k pentru care are loc (1.61), unde $\omega = \omega_k$. Pentru aceasta se reprezintă grafic funcția

$$f(\alpha) = -20 \lg |N_n(\alpha)| \tag{1.64}$$

și se determină valorile ω_k pentru care

$$f(\omega_k) = 20 \lg |G_n(j\omega_k)|. \tag{1.65}$$

Pentru realizarea corecției în domeniul frecvențelor se procedează ca și în cazul sistemelor automate liniare (v. paragraful următor).

În cazul neliniarităților polivalente (uzual bivalente) utilizarea diagramei Bode nu facilitează în nici un fel rezolvarea sistemului de ecuații (1.61), (1.62). O alternativă este aceea care constă în trasarea în același sistem de axe rectangulare a graficelor funcțiilor $20 \lg |G_n(j\omega)|$ funcție de $\arg G_n(j\omega)$ și $-20 \lg N_n(A)$ funcție de $\arg |N_n(A)|$ (diagrama Nichols) și determinarea oscilațiilor întreținute pe baza punctelor de intersecție ale celor două grafice.

1.4.3. Aplicație: stabilizarea unui sistem automat de reglare a temperaturii

Se consideră sistemul automat de reglare a temperaturii cu schema bloc structurală din fig. III.12, în care

$$G(s) = \frac{0{,}128\ e^{-5s}}{s(10\,s+1)(5\,s+1)}$$

și $N(A)$ este un regulator neliniar cu saturație (neliniaritate accidentală), a cărui funcție de descriere, cu notațiile din fig. III.1, *b*, este, [B6],

$$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}\right), \quad A \geqslant a. \tag{1.66}$$

Introducînd $\alpha = \dfrac{A}{a}$ și coeficientul de normare $k_n = k = 2{,}5$, conform relației (1.64) avem

$$f(\alpha) = -20 \lg \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}\right), \quad \alpha \geqslant 1, \tag{1.67}$$

al cărei grafic este reprezentat în fig. III.13, *a*.

Răspunsul la frecvență normat are expresia

$$G_n(j\omega) = \frac{0{,}32\ e^{-5j\omega}}{j\omega(10\,j\omega + 1)\,(5j\omega + 1)} \tag{1.68}$$

și diagrama Bode corespunzătoare este reprezentată în fig. III.13, *b*.

Ne propunem să analizăm stabilitatea sistemului și dacă este necesar să realizăm o corecție cu elementul liniar $G_{c1}(s)$ ($N_c(A) = 0$ sau $G_{c2}(s) = 0$).

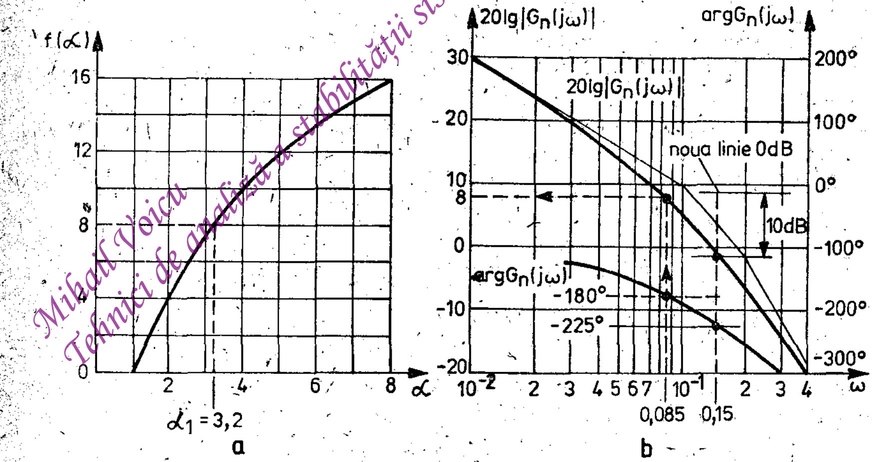


Fig. III.13. *a* — Funcția $f(\alpha)$, relația (1.67), a neliniarității de tip saturație (fig. III.1,*b*); *b* — Diagrama Bode a părții liniare, relația (1.68).

Din fig. III.13, *b* rezultă $\omega_1 = 0{,}085$ şi $20 \lg |G_n(j\omega_1)| = 8$. Din fig. III.13, *a*, pentru $f(\alpha_1) = 8$, rezultă $\alpha_1 = 3{,}2$, ceea ce înseamnă $A_1 = 3{,}2\ a$. Aşadar sistemul este sediul oscilaţiei limită stabile $3{,}2\ a \times \times \sin 0{,}085\ t$. Ca urmare starea de echilibru $\Delta y = 0$ este instabilă.

Pentru stabilizarea sistemului există două posibilităţi.

a) Coborîrea caracteristicii $20 \lg G_n(j\omega)$ sau echivalent ridicarea liniei de 0 dB. De exemplu prin ridicarea noii linii de 0 dB deasupra nivelului de 8 dB vom avea $20 \lg |G_n(j\omega_1)| < 0$ şi cum $f(\alpha) > 0$, apariţia oscilaţiilor întreţinute nu mai este posibilă.

b) Ridicarea caracteristicii $\arg G_n(j\omega)$ în domeniul frecvenţelor medii (zona pulsaţiei de tăiere a părţii liniare) astfel încît ω_1 să se deplaseze spre dreapta, într-un domeniu în care $20 \lg G_n(j\omega) < 0$. În cazul de faţă acest lucru poate fi realizat cu ajutorul unui element PD care la frecvenţe medii realizează o ridicare a caracteristicii $\arg G_n(j\omega)$ cu aproximativ 45° (v. fig. II.36, *b*). De exemplu pentru un element de corecţie cu funcţia de transfer $G_{c1}(s) = k_r(7s + 1)$ se obţine $\omega_1 = 0{,}15$ (la intersecţia cu orizontala de $-225°$, fig. III.13, *b*), căreia, pentru $k_r \leqslant 0{,}7$ îi corespunde $20 \lg |G_n(j\omega)| < 0$. O valoare $k_r \leqslant 0{,}7$ este echivalentă cu o ridicare a liniei de 0 dB. De exemplu pentru ridicarea acesteia cu 10 dB trebuie să aibă loc

$$20 \lg k_r \sqrt{(7\ \omega_1)^2 + 1} = 20 \lg k_r + 20 \lg \sqrt{2} = -10,$$

de unde rezultă $k_r = 0{,}224$.

2. Metoda planului stărilor

Un sistem dinamic se numeşte *autonom* dacă el este invariant în timp şi liber.

În conformitate cu noţiunile introduse la I.3 şi I.4 un sistem dinamic autonom este descris de o ecuaţie diferenţială de forma

$$\dot{x} = f(x), \ t \in \mathbf{R}, \ x \in \mathbf{R}^n. \tag{2.1}$$

Soluţiile unui sistem dinamic autonom au proprietatea de invarianţă în raport cu translaţiile temporale. Dacă $x(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (2.1) cu domeniul $I \subseteq \mathbf{R}$ şi codomeniul $X_I = x(I) \subseteq \mathbf{R}^n$ atunci $x(t + \tau)$, pentru orice $\tau \in \mathbf{R}$, este de asemenea soluţie cu acelaşi codomeniu dar cu domeniul $\{t \in \mathbf{R};\ t + \tau \in I\}$. Această afirmaţie este adevărată în virtutea faptului că

$$\dot{x}(t + \tau) = f[x(t + \tau)], \quad t + \tau \in I, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Dacă pentru fiecare punct din $\mathbf{R} \times X_I$ există o soluţie unică atunci toate soluţiile pe $\mathbf{R} \times X_I$ se obţin prin translarea în timp a uneia dintre respectivele soluţii. În aceste condiţii mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este divizată în submulţimi şi în fiecare submulţime toate soluţiile se obţin prin translarea în timp a unei soluţii din respectiva submulţime. Soluţiile care aparţin unei submulţimi $\mathbf{R} \times X_I$ formează o familie care are proprietatea că este complet caracterizată de o soluţie oarecare care face parte din ea.

Exemplul 2.1. Fie sistemul dinamic autonom

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Să se determine submulţimile $\mathbf{R} \times X_I$ ale sistemului şi comportarea familiilor de soluţii în vecinătatea punctelor de echilibru. Separînd variabilele în ecuaţia de mai sus, după integrare, se obţine

$$\left| \frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} \right| = Ce^t, \quad C = \text{const.}$$

Din studiul semnului funcţiei din membrul stîng rezultă că sistemul are trei submulţimi de divizare $\mathbf{R} \times X_{Ii}$, $i = 1,2,3$, cu $X_{I1} = (-\infty, -1)$, $X_{I2} = (-1, 1)$ şi $X_{I3} = (1, +\infty)$.

Punctele de echilibru ale sistemului sînt $x = -1$ şi $x = 1$. Avînd în vedere graficul funcţiei $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, respectiv variaţia semnului ei pentru $x \in \mathbf{R}$, fig. III. 14, rezultă că familiile de soluţii reprezentate pe dreapta de stare (sistemul este de ordinul unu), au imaginea şi sensurile de evoluţie în timp conform fig. III. 14, jos.

Din exemplul de mai sus se trage concluzia că între natura punctului de echilibru şi sensurile traiectoriilor de stare în vecinătatea sa există o relaţie directă.

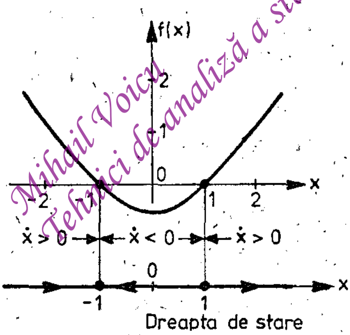


Fig. III. 14. Traiectoriile de stare la *exemplul 2.1.*

În cazul sistemului de la *exemplul 2.1* punctul de echilibru $x = -1$ este asimptotic stabil şi, avînd în vedere că traiectoriile de stare (familiile de soluţii) converg către acest punct, se numeşte *punct de atracţie* sau *atractor*. Punctul de echilibru $x = 1$ este instabil şi, din motive evidente din fig. III.14, *b*, se numeşte *punct de repulsie* sau *repulsor*.

Cele expuse pînă aici, cu referire şi la sistemul de la *exemplul 2.1*, pun în evidenţă ideile de bază ale *metodei planului stărilor*, care are calitatea că poate aduce informaţii preţioase privitoare la proprietățile interne ale sistemului și în special privitoare la stabilitatea punctelor de echilibru. Întrucît aplicarea efectivă se bazează pe reprezentări grafice (ca în fig. III.14, *b*) utilizarea metodei planului stărilor este naturală și comodă în primul rînd în cazul sistemelor dinamice autonome de ordinul unu și doi. Ea se poate aplica și sistemelor de ordin superior, dar de regulă în combinație cu alte metode, [F3].

2.1. Sisteme dinamice autonome de ordinul doi

2.1.1. Portretul de stare

Fie sistemul dinamic autonom de ordinul doi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), & t \in \mathbf{R}, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pentru $f_1(x_1, x_2) \neq 0$ din cele două ecuații (2.2) se obține

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = f(x_1, x_2), \tag{2.3}$$

în care $f(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)/f_1(x_1, x_2)$, ceea ce este echivalent cu eliminarea timpului între ecuațiile (2.2).

În ipoteza că $f(x_1, x_2)$ este continuă și lipschitziană (v. I.2.2), ecuația (2.3) admite o soluție unică

$$x_2 = x_{20} + \int_{x_{10}}^{x_1} f(x, x_2)\mathrm{d}x, \quad (x_{10}, x_{20}) \in \mathbf{R}^2, \tag{2.4}$$

care satisface condițiile inițiale $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, $t_0 \in \mathbf{R}$.

Din punctul de vedere al analizei stabilității sistemului (2.2), care în cazul de față se bazează pe reprezentarea grafică a soluției (2.4) pentru diverse condiții inițiale (x_{10}, x_{20}), este necesar să se parcurgă următorii trei pași.

1° Se determină punctele de echilibru $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, soluții ale sistemului de ecuații

$$\begin{cases} f_1(a_1, a_2) = 0 \\ f_2(a_1, a_2) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

2° Se trasează în planul (x_1, x_2) traiectoriile de stare (2.4) corespunzătoare celor mai reprezentative puncte (x_{10}, x_{20}) (în raport cu punctele de echilibru) şi se marchează prin săgeţi sensul lor de parcurgere pentru t crescător.

3° Se stabileşte natura fiecărui punct de echilibru în funcţie de sensurile de parcurgere a traiectoriilor din vecinătatea sa.

Definiţia 1. Imaginea grafică obţinută conform punctelor 1° şi 2° se numeşte *portretul de stare* al sistemului (2.2).

Realizarea pasului 2°, care de regulă este mai dificilă, este posibilă urmînd trei căi principale.

a) Integrarea ecuaţiilor (2.2) sau a ecuaţiei (2.3), finalizate cu obţinerea unei soluţii explicitate analitic.

b) Integrarea ecuaţiilor (2.2.) sau a ecuaţiei (2.3) prin metode grafo-analitice.

c) Integrarea ecuaţiilor (2.2) sau a ecuaţiei (2.3) prin metode numerice.

Exemplul 2.2. Fie sistemul dinamic autonom

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2 \end{cases}$$

Să se determine portretul de stare al sistemului.

Din sistemul de ecuaţii algebrice

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1^2 = 0 \\ -x_2 + x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

rezultă că sistemul are două stări de echilibru şi anume (0,0) şi (2,0).

Făcînd raportul celor două ecuaţii diferenţiale, aşa cum s-a procedat la (2,3), se obţine

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_1x_2}{2x_1 - x_1^2}, \quad x_1 \neq 0, \quad x_1 \neq 2.$$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

După calcule elementare se obţine ecuaţia

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 - x_1} - \frac{1}{x_1}\right) dx_1$$

a cărei soluţie este

$$x_2^2 = \frac{A}{|x_1(2 - x_1)|}, \quad x_1 \neq 0, \quad x_1 \neq 2, \; A = \text{const.}$$

În plus, pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = 2$ din care cea de a doua ecuație a sistemului se obține

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ |x_2| = Be^{-t} \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ |x_2| = Ce^{t} \end{cases}$$

$$B, C = \text{const.}$$

Portretul de stare, conform soluțiilor determinate are imaginea din fig. III.15. Sensurile de parcurgere a traiectoriilor rezultă din semnele funcțiilor $f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$ pentru $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, respectiv din semnele derivatelor $\dot{x}_1$ și $\dot{x}_2$. Pe această bază se pot stabili intervalele de monotonie ale variabilelor $x_1(t)$ și $x_2(t)$. De exemplu pentru $x_2 > 0$ și $x_1 \in \mathbf{R}$ avem următoarea situație:

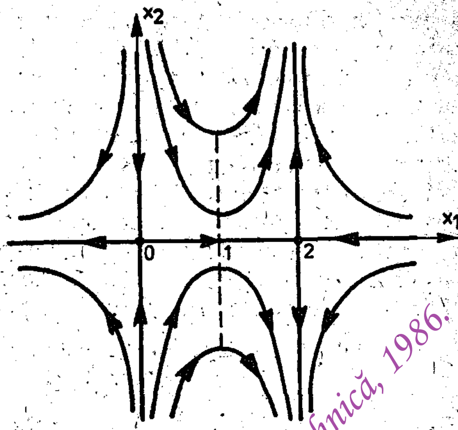


Fig. III.15. Portretul de stare la *exemplul 2.2.*

$x_1 \in$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$\dot{x}_1, \dot{x}_2$	$\dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$	$\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$	$\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$	$\dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0$
x_1, x_2	$x_1 \downarrow, x_2 \downarrow$	$x_1 \uparrow, x_2 \downarrow$	$x_1 \uparrow, x_2 \uparrow$	$x_1 \downarrow, x_2 \uparrow$

Pentru $x_2 < 0$ și $x_1 \in \mathbf{R}$ se schimbă în mod corespunzător numai semnele lui $\dot{x}_2$.

În cazul în care obținerea soluției analitice a ecuațiilor (2.2) sau a ecuației (2.3) nu este posibilă se folosesc metode grafo-analitice sau metode numerice. O expunere exhaustivă asupra acestor metode a fost dată în [B6]. Ne vom opri în continuare pe scurt la una dintre metodele grafo-analitice, larg utilizată în aplicații.

2.1.2. Metoda izoclinelor

În conformitate cu (2.3) raportul $m = \dfrac{dx_2}{dx_1}$ este panta traiectoriei de stare în punctul $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Pentru $m = \text{const.}$ ecuația implicită

$$f(x_1, x_2) = m$$

este ecuația unei curbe numită, avînd în vedere semnificația lui m, *curbă izoclină.*

Pentru diferite valori $m \in \mathbf{R}$ se reprezintă în planul (x_1, x_2) o *familie de curbe izocline* ale sistemului (2.2). Fiecare curbă izoclină se distinge prin panta m a traiectoriilor de stare care este aceeaşi, în punctele care îi aparţin, pentru toate traiectoriile de stare care o intersectează. Pentru a evidenţia acest lucru şi a-l folosi apoi pentru construcţia portretului de stare, pe fiecare curbă izoclină se trasează din loc în loc, mici segmente orientate (corespunzător semnelor funcţiilor $f_1(x_1, x_2)$ şi $f_2(x_1, x_2)$) de pantă m. Pentru orice punct iniţial, diferit de punctele de echilibru, traiectoria corespunzătoare se trasează astfel ca în punctele ei de intersecţie cu curbele izocline panta să coincidă, la fiecare intersecţie, cu panta segmentelor orientate ale respectivei curbe izocline.

Exemplul 2.3. Se consideră sistemul dinamic autonom

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2). \end{cases}$$

Se cere să se construiască portretul de stare prin metoda izoclinelor

Punctul de echilibru este (0,0).

Ecuaţia familiei de curbe izocline este

$$\frac{x_2(2x_1 - x_2)}{x_1^2} = m, \quad x_1 \neq 0,$$

din care rezultă

$$x_2 = x_1[1 \pm \sqrt{1 - m}], \quad m \leqslant 1.$$

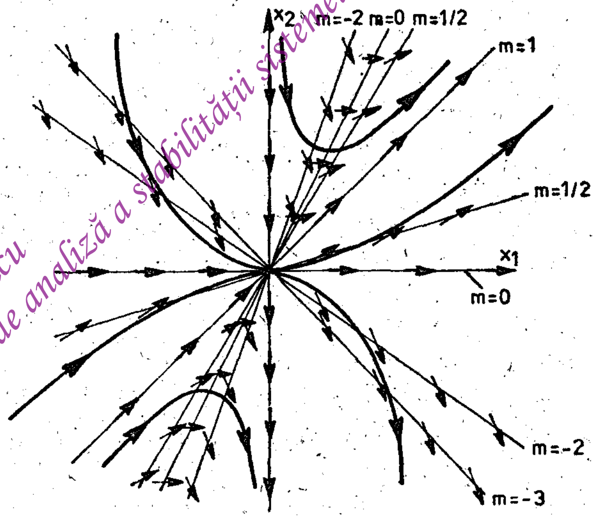


Fig. III.16. Portretul de stare la *exemplul 2.3* (metoda izoclinelor).

Dînd valori lui m se obține următoarea familie de curbe izocline:

$$m = 0 \qquad x_2 = 0 \ \text{ și } \ x_2 = 2x_1$$

$$m = 0{,}5 \qquad x_2 = (1 \pm 1/\sqrt{2})\, x_1$$

$$m = 1 \qquad x_2 = x_1$$

$$m = -2 \qquad x_2 = (1 \pm \sqrt{3})\, x_1$$

$$m = -3 \qquad x_2 = -x_1 \ \text{ și } \ x_2 = 3x_1,$$

care se reprezintă în planul (x_1, x_2), fiecare distingîndu-se prin segmentele orientate de pantă m. Orientarea se determină foarte simplu deoarece $\dot{x}_1 = x_1^2 > 0$ pentru orice $x_1 \neq 0$. Portretul de stare care se obține este reprezentat în fig. III.16.

2.1.3. Cazul sistemelor liniare

Examinînd portretele de stare din fig. III.15 și III.16 se trage concluzia că punctele de echilibru ale respectivelor sisteme nu sînt nici atractori și nici repulsori. Pentru caracterizarea lor este necesară o nuanțare topologică suplimentară. Vom face acest lucru cu ajutorul sistemelor liniare autonome de ordinul doi, pentru care s-a realizat la I.5.2 o analiză detaliată a stabilității.

Fie un sistem dinamic liniar autonom de ordinul doi descris de ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \tag{2.6}$$

în care $a_{11}, \ldots, a_{22}$, numere reale, sînt elementele matricii A.

S-a arătat la I.5.2.1, că dacă V este matricea modală a matricii A atunci prin relația $J = V^{-1}AV$ ea este asemenea cu una din matricile canonice

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ pentru } \lambda_1 \neq \lambda_2, \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \text{ pentru } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \tag{2.8}$$

unde λ_1, λ_2 sînt valorile proprii ale matricii A.

Definiția 2. Sistemul (2.6) se numește *simplu* dacă $\det A \neq 0$. Dacă $\det A = 0$ atunci el se numește *nesimplu*.

În cazul în care sistemul (2.6) este simplu el admite un singur punct de echilibru și anume $(0, 0)$. Se știe că natura acestui punct de echilibru depinde de localizarea în planul complex a valorilor proprii λ_1 şi λ_2. Din acest punct de vedere se disting mai multe cazuri.

a) **Sistem simplu, valori proprii reale şi distincte.** În acest caz sistemul (2.6) este echivalent cu forma sa canonică diagonală

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2. \tag{2.9}$$

Variabilele y_1, y_2 se mai numesc *variabile proprii* şi axele Oy_1 şi Oy_2 se numesc *axele proprii* ale sistemului. De exemplu pentru

$$V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2.10}$$

ecuaţiile axelor Ox_1, Ox_2 au expresiile

$$\begin{cases} ay_1 + by_2 = 0 & (Ox_2) \\ cy_1 + dy_2 = 0 & (Ox_1) \end{cases}$$

ceea ce ne permite să le figurăm în sistemul rectangular de axe Oy_1, Oy_2.

Făcînd raportul celor două ecuaţii din (2.9) se obţine

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1},$$

care prin integrare ne furnizează soluţia

$$y_2 = C_1 (y_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad C_1 = \text{const.} \tag{2.11}$$

a.1) Dacă $\lambda_{1,2} < 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$. Traiectoriile de stare converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. III.17, *a*. Sistemul este asimptotic stabil şi se spune că punctul de echilibru este *nod atractor* (sau *nod stabil*).

a.2) Dacă $\lambda_{1,2} > 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$, fig. III.17, *b*. Sistemul este instabil şi se spune că punctul de echilibru este *nod repulsor* (sau *nod instabil*).

a.3) Dacă $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 < 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to 0$. Ca şi în cazurile a.1) şi a.2) axele Oy_1 şi Oy_2 sînt şi ele traiectorii. Spre deosebire de cazurile precedente axele Oy_1 şi Oy_2 sînt singurele traiectorii care trec prin punctul de echilibru. Datorită acestei situaţii speciale traiectoriile reprezentate de axele proprii se numesc *separatoare* (una este stabilă — Oy_2 şi cealaltă este instabilă — Oy_1).

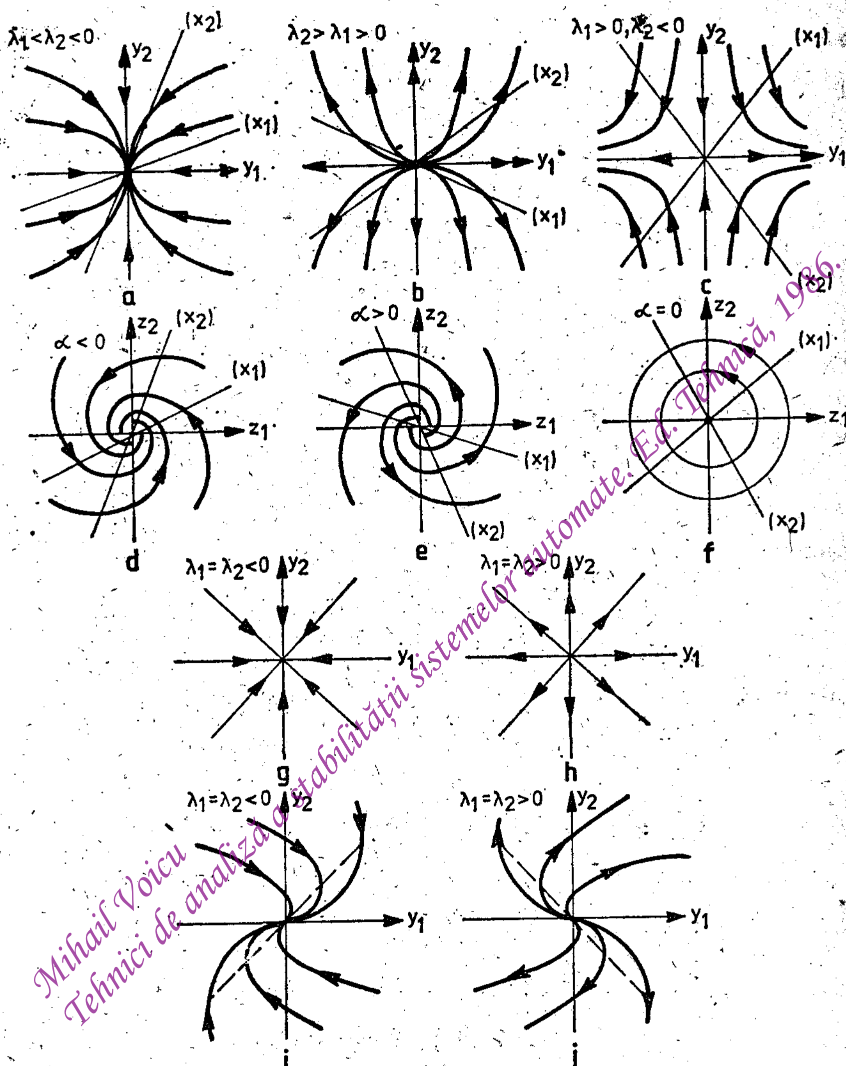


Fig. III.17. Natura punctului de echilibru al sistemului liniar de ordinul doi simplu: *a* — nod atractor; *b* — nod repulsor; *c* — şa; *d* — focar atractor; *e* — focar repulsor; *f* — centru; *g, i* — nod atractor; *h, j* — nod repulsor.

Celelalte traiectorii au separatoarele ca asimptote, fig. III.17, *c*. Sistemul este instabil și se spune, avînd în vedere forma traiectoriilor de stare în vecinătatea originii, că punctul de echilibru este *șa*.

b) **Sistem simplu, valori proprii complex conjugate.** Fie $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$ și $\beta > 0$. În acest caz variabilele proprii y_1, y_2 sînt complex conjugate. Folosind transformarea

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

sistemul (2.9) se aduce la următoarea formă

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2. \tag{2.12}$$

Ecuațiile axelor Ox_1 și Ox_2, ținînd seama și de (2.10), au expresiile

$$\begin{cases} z_1 \operatorname{Re} a - z_2 \operatorname{Im} a = 0 & (Ox_2) \\ z_1 \operatorname{Re} c - z_2 \operatorname{Im} c = 0 & (Ox_1). \end{cases}$$

Făcînd raportul ecuațiilor scalare din (2.12) se obține

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha z_1 - \beta z_2}, \tag{2.13}$$

care se integrează prin introducerea coordonatelor polare

$$\begin{cases} z_1 = r \cos \theta \\ z_2 = r \sin \theta. \end{cases} \tag{2.14}$$

După calcule relativ simple din (2.13) și (2.14) rezultă

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r,$$

a cărei soluție este

$$r = C_2 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta}, \quad C_2 = \text{const.} \tag{2.15}$$

b.1) Dacă $\alpha < 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $r \to 0$. Traiectoriile de stare converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. III.17, *d*. Sistemul este asimptotic stabil și se spune că punctul de echilibru este *focar atractor* (sau *focar stabil*).

b.2) Dacă $\alpha > 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $r \to \infty$, fig. III.17, *e*. Sistemul este instabil şi se spune că punctul de echilibru este *focar repulsor* (sau *focar instabil*).

b.3) Dacă $\alpha = 0$ atunci $r = C_2$ pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$, respectiv pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Sistemul este simplu stabil, variabilele y_1, y_2 sînt funcţii periodice sinusoidale de perioadă $2\pi/\beta$ şi traiectoriile de stare sînt curbe închise (cercuri), fig. III.17, *f*. Se spune că punctul de echilibru este *centru*.

c) **Sistem simplu, valori proprii reale şi egale.** În acest caz matricea A a sistemului este asemenea cu matricea J care poate avea formele (2.8). Dacă matricea J este diagonală atunci, în conformitate cu (2.11), în care $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$, traiectoriile de stare sînt descrise de ecuaţia

$$y_2 = C_1 y_1. \tag{2.16}$$

c.1) Dacă $\lambda_0 < 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$, fig. III.17, *g*. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru este *nod atractor* (sau *nod stabil*).

c.2) Dacă $\lambda_0 > 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$, fig. III.17, *h*. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru este *nod repulsor* (sau *nod instabil*).

Dacă matricea J este de tip Jordan atunci forma canonică a sistemului (2.6) este

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2. \tag{2.17}$$

Integrînd acest sistem se obţine

$$\begin{cases} y_1(t) = (C_3 + C_4 t)\, e^{\lambda_0 t} \\ y_2(t) = C_4 e^{\lambda_0 t} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad C_3, C_4 \text{ — constante.}$$

Eliminînd t între aceste ecuaţii se obţine

$$y_1 = \left(C_5 + \frac{1}{\lambda_0} \ln|y_2|\right) y_2, \quad C_5 = \frac{C_3}{C_4} - \frac{1}{\lambda_0} \ln |C_4|. \tag{2.18}$$

c.3) Dacă $\lambda_0 < 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$, fig. III.17, *i*. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru este *nod atractor* (sau *nod stabil*).

c.4) Dacă $\lambda_0 > 0$ atunci pentru $t \to \infty$ avem $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$, fig. III.17, *j*. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru este *nod repulsor* (sau *nod instabil*).

d) **Sistem nesimplu, valori proprii reale**

Sistemul (2.7) are în acest caz cel puţin o valoare proprie nulă. Ca urmare sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

în afară de soluţia banală $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, admite şi soluţii nebanale.

d.1) Dacă rang $A = 1$, respectiv $\lambda_1 \neq 0$ şi $\lambda_2 = 0$, atunci sistemul (2.19) admite o simplă infinitate de soluţii nebanale. În acest caz există o infinitate de puncte de echilibru, toate situate pe dreapta $y_1 = 0$.

d.2) Dacă rang $A = 0$, respectiv $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, atunci sistemul (2.19) admite o dublă infinitate de soluţii nebanale. În acest caz toate punctele din planul stărilor sînt puncte de echilibru.

Din cele expuse pînă aici rezultă că în cazul unui sistem dinamic liniar de ordinul doi simplu, punctul de echilibru (0, 0) poate fi de următoarele patru tipuri calitative principale: *atractor* (sistem asimptotic stabil), *centru* (sistem simplu stabil), *repulsor* şi *şa* (sistem instabil). În mod corespunzător toate tipurile de portrete de stare se reduc de asemenea la patru tipuri principale, aflate într-o strînsă corelaţie cu cele patru tipuri calitative principale de puncte de echilibru. Vom vedea în cele ce urmează că această *topologie* este semnificativă şi pentru sistemele dinamice neliniare autonome de ordinul doi.

2.2. Sisteme dinamice neliniare de ordinul doi

2.2.1. Portret de stare local şi global

Fie $x_0 \in \mathbf{R}^2$ şi $r > 0$. Mulţimea definită prin discul

$$V = \{ x \in \mathbf{R}^2; \quad \| x - x_0 \| < r \}$$

se numeşte o *vecinătate* a punctului x_0.

O parte a portretului de stare a unui sistem cuprins într-o vecinătate V a lui x_0 se numeşte *restricţia* la V a portretului de stare.

În cazul sistemelor dinamice neliniare de ordinul doi se utilizează frecvent restricţii ale *portretului de stare global*. O astfel de restricţie, care poate fi oricît de mică, se numeşte *portret de stare local* în x_0.

Definiţia 3. Două sisteme dinamice de ordinul doi se numesc *calitativ echivalente* dacă între portretele lor de stare există o bijecţie continuă care conservă sensurile de parcurgere a traiectoriilor de stare.

Fie o restricție a portretului de stare la vecinătatea V a originii în cazul sistemului liniar simplu (2.6). Există o vecinătate $V' \subseteq V$ astfel încît restricția portretului de stare la vecinătatea V' a originii este calitativ echivalentă cu portretul de stare global al aceluiași sistem. Această *echivalență calitativă* justifică de fapt afirmația că tipul calitativ al portretului de stare este determinat de tipul calitativ al punctului de echilibru, afirmație care a fost concluzia la care s-a ajuns la sfîrșitul paragrafului precedent.

Sistemele dinamice neliniare de ordinul doi pot avea mai mult de un punct de echilibru. În astfel de cazuri portretele de stare locale nu determină întotdeauna portretul de stare global.

2.2.2. Liniarizarea în jurul unui punct de echilibru

Fie $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ un punct de echilibru al sistemului (2.2). Folosind formula lui Taylor și ținînd seama și de (2.5), funcțiile $f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$, în ipoteza că sînt derivabile, pot fi exprimate după cum urmează

$$f_i(x_1, x_2) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{a_1, a_2}(x_1 - a_1) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_{a_1, a_2}(x_2 - a_2) + R_i(x_1, x_2),$$

$$i = 1, 2, \qquad (2.20)$$

unde resturile $R_i(x_1, x_2)$ satisfac condițiile

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} R_i(x_1, x_2) = 0, \quad i = 1, 2,$$

cu $r = [(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^{1/2}$.

Introducînd coordonatele locale

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - a_1 \\ y_2 = x_2 - a_2 \end{cases}$$

și înlocuind (2.20) în (2.2) se obține

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + R_1(y_1 + a_1, y_2 + a_2) \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + R_2(y_1 + a_1, y_2 + a_2), \end{cases} \qquad (2.21)$$

în care

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{a_1,\, a_2}, \quad i, j = 1, 2,$$

şi cu care se formează matricea A.

Sistemul

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

se numeşte *partea liniară* a sistemului (2.21).

Definiţia 4. Punctul de echilibru $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ al sistemului (2.21) se numeşte *simplu* dacă partea sa liniară (2.22) este un sistem simplu, respectiv dacă $\det A \neq 0$. Dacă $\det A = 0$ punctul de echilibru se numeşte *nesimplu.*

Teorema 1 (a liniarizării). Fie sistemul (2.2) cu punctul de echilibru simplu (0,0). Atunci într-o vecinătate a originii portretul de stare este calitativ echivalent cu portretul de stare al părţii sale liniare, cu condiţia ca pentru partea liniară punctul de echilibru să nu fie centru.

Acest rezultat, a cărui demonstraţie este dată în [H3], este deosebit de important pentru că stă la baza analizei stabilităţii sistemelor dinamice neliniare cu ajutorul părţilor lor liniare, cu excepţia cazului cînd acesta din urmă are originea punct de echilibru de tip centru.

Tipurile de puncte de echilibru pentru care *teorema 1* este adevărată şi anume atractor, repulsor şi şa se numesc puncte de echilibru *hiperbolice*. Echivalenţa calitativă în cazul punctelor de echilibru hiperbolice între un sistem dinamic neliniar şi partea sa liniară ne permite să extindem topologia punctelor de echilibru introduse la 2.1.3 în cazul sistemelor dinamice liniare simple (nod, focar etc.), şi pentru sistemele dinamice neliniare. Această proprietate a punctelor de echilibru hiperbolice decurge din caracterul special al bijecţiei din *definiţia 3,* în sensul că pentru vecinătăţi suficient de mici ale punctului de echilibru respectiva bijecţie este foarte apropiată de aplicaţia identică.

Exemplul 2.4. Se consideră sistemele

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Să se construiască portretele de stare locale și să se compare cu portretele corespunzătoare ale părților lor liniare.

Punctul de echilibru al ambelor sisteme este (0,0).

Folosind coordonatele polare $x_1 = r = \cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ cele două sisteme se aduc la formele

$$\begin{cases} \dot r = r^3 \\ \dot\theta = 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dot r = -r^3 \\ \dot\theta = 1. \end{cases}$$

Portretele de stare corespunzătoare sînt reprezentate în fig. III. 18, *a* și *b* și, evident, ele nu sînt calitativ echivalente.

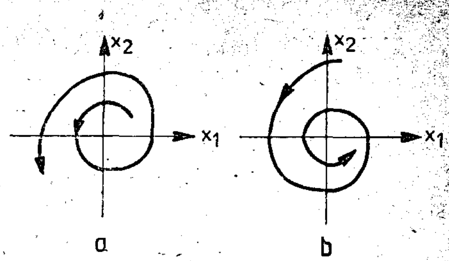


Fig. III. 18. Portretul de stare la *exemplul 2.4*:

a — focar repulsor; *b* — focar atractor.

Utilizînd formula lui Taylor se constată că ambele sisteme au aceeași parte liniară

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_2 \\ \dot x_2 = x_1. \end{cases}$$

Punctul de echilibru al părții liniare este centru, fig. III. 17, *f*, adică situația exceptată de *teorema 1*. În acest caz pe baza părții liniare nu se pot face nici un fel de afirmații privitor la tipul punctului de echilibru al sistemului dinamic neliniar corespunzător.

Din punctul de vedere al stabilității, pe baza *teoremei 1* se pot face următoarele afirmații.

Teorema 2. Punctul de echilibru $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ al sistemului (2.21) este asimptotic stabil dacă și numai dacă partea sa liniară (2.22) este asimptotic stabilă.

Teorema 3. Punctul de echilibru $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ al sistemului (2.21) este instabil dacă și numai dacă partea sa liniară (2.22) este instabilă.

În cazul în care (0, 0) este un centru al părții liniare, *teorema 1* nu permite să facem vreo afirmație despre natura punctului de echilibru al sistemului (2.21). În acest caz se folosește noțiunea de *indice de stabilitate*, [A5], care se calculează după cum urmează:

1° Pentru sistemul (2.21), cu originea punct de echilibru de tip centru, se determină matricea

$$P = V\begin{bmatrix} \mathrm{j} & 1 \\ -\mathrm{j} & 1 \end{bmatrix},$$

în care V este matricea modală a sistemului (2.22), prin care se realizează transformarea (v. și 2.1.3. *b*)

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{j}\beta & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{j} & 1 \\ -\mathrm{j} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \ \beta > 0.$$

A este matricea sistemului (2.22) și are valorile proprii $\pm \mathrm{j}\beta$.

2° Se transformă sistemul (2.21) folosind schimbarea de variabile de stare.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

şi se obţine

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Z_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = Z_2(z_1, z_2). \end{cases}$$

3° Se calculează indicele de stabilitate

$$I = \beta(Z^1_{111} + Z^1_{122} + Z^2_{112} + Z^2_{222}) + Z^1_{11}Z^2_{11} - Z^1_{11}Z^1_{12} + $$
$$+ Z^2_{11}Z^2_{12} + Z^2_{22}Z^2_{12} - Z^1_{22}Z^1_{12} - Z^1_{22}Z^2_{22},$$

în care

$$Z^i_{jk} = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_j \partial z_k}(0, 0), \; Z^i_{jkm} = \frac{\partial^3 Z_i}{\partial z_j \partial z_k \partial z_m}(0, 0),$$
$$i, j, k, m = 1, 2.$$

Teorema 4. Dacă punctul de echilibru (0, 0) al sistemului (2.22) este centru şi $I < 0$ atunci punctul de echilibru (0, 0) al sistemului (2.21) este asimptotic stabil.

Întrucît rezultatele enunţate prin *teoremele 2, 3 şi 4* se bazează pe partea liniară a unui sistem dinamic neliniar, stabilitatea asimptotică sau instabilitatea punctului de echilibru sînt valabile pentru o anumită vecinătate a sa. Determinarea acestei vecinătăţi sau a unei părţi a ei este posibilă prin trasarea efectivă a portretului de stare global.

Avînd în vedere că polinomul caracteristic al sistemului (2.22) are forma

$$\Delta(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2,$$

în care $\alpha_1 = -(a_{11} + a_{22})$ şi $\alpha_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, şi că natura zerourilor lui $\Delta(s)$ depinde de discriminantul $\alpha_1^2 - 4\alpha_2$ şi de semnele coeficienţilor α_1, α_2, este posibilă o clasificare a tipurilor de puncte de echilibru ale sistemului (2.22) şi implicit ale sistemului (2.21), în condiţiile *teoremelor 2, 3 şi 4*, fig. III.19.

Teorema 1 permite şi clarificarea noţiunii de separatoare introdusă la 2.1.3. a.3. *Separatoarea* este o traiectorie care intră într-un (sau iese dintr-un) punct de echilibru, tangent la o direcţie radială fixă.

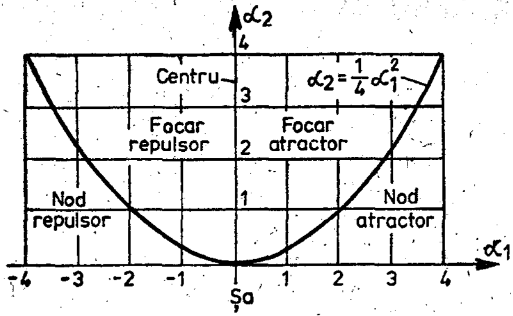


Fig. III.19. Clasificarea în planul (α_1, α_2) a tipurilor de puncte de echilibru ale părţii liniare (2.22) a sistemului (2.21).

Tangentele la separatoarele părţii liniare în punctul de echilibru sînt de asemenea tangente la separatoarele sistemului neliniar corespunzător.

Exemplul 2.5. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}. \end{cases}$$

Se cere să se determine separatoarele în portretul de stare al părţii liniare şi apoi în portretul de stare al sistemului.

Punctul de echilibru al sistemului este (0,0). Partea sa liniară este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2, \end{cases}$$

ale cărei valori proprii sînt $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Punctul de echilibru este de tip şa şi portretul de stare este reprezentat în fig. III.20, *a*. Separatoarele sînt chiar axele proprii ale sistemului (v. 2.1.3.a. 3) ale căror direcţii sînt definite de $V^{-1}x = 0$. Întrucît $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi $V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ rezultă că ecuaţiile separatoarelor sînt $x_1 + x_2 = 0$ (stabilă) şi $x_2 = 0$ (instabilă).

Separatoarele sistemului neliniar sînt, în general, traiectorii curbe. În cazul de faţă dreapta $x_2 = 0$ este de asemenea separatoare instabilă. Cealaltă separatoare, de această dată stabilă, este o curbă tangentă în origine la dreapta $x_1 + x_2 = 0$, şi situată sub ea. Ultimul fapt rezultă din aceea că $dx_2/dx_1 > -1$ pentru $x_1 < 0$ şi $dx_2/dx_1 < -1$ pentru $x_1 > 0$. Portretul de stare local al sistemului neliniar, în punctul de echilibru (0, 0), este reprezentat în fig. III.20, *b*.

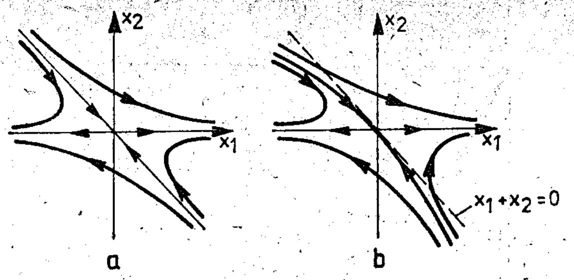


Fig. III.20. Portretele de stare la *exemplul 2.5.*

Dacă punctul de echilibru $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ al sistemului (2.21) este nesimplu atunci partea sa liniară (2.22) are o simplă infinitate de puncte de echilibru situate pe o dreaptă, sau o dublă infinitate de puncte de echilibru situate în tot planul stărilor. În acest caz între portretul de stare al sistemului neliniar și portretul de stare al părții sale liniare pot exista diferențe calitative foarte mari. Ceea ce este caracteristic pentru sistemele cu puncte de echilibru nesimple este faptul că în portretul de stare apar întotdeauna curbe ale punctelor de echilibru nesimple.

Exemplul 2.6. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(x_2 - x_1^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_2 - x_1^2). \end{cases}$$

Se cere să se determine portretul de stare al sistemului.

Sistemul se caracterizează prin punctele de echilibru situate pe parabola $x_2 = x_1^2$. Făcînd raportul ecuațiilor sistemului se obține

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}; \quad x_2 \neq x_1^2, \quad x_2 \neq 0,$$

din care prin integrare rezultă

$$x_1^2 + x_2^2 = C, \quad C = \text{const.}$$

Portretul de stare corespunzătoare este reprezentat în *fig.* III.21. Sensurile de parcurgere a traiectoriilor rezultă din următoarele: pentru $x_2 > x_1^2$ avem $\dot{x}_1 > 0$, în timp ce pentru $x_2 < x_1^2$ și $x_2 > 0$ avem $\dot{x}_1 < 0$; pentru $x_2 < 0$ avem $\dot{x}_1 > 0$. Conform portretului de stare, toate punctele de echilibru situate pe arcul de parabolă din primul cadran sînt simplu stabile.

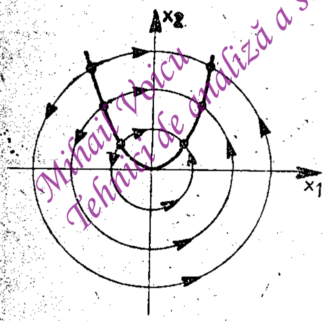


Fig. III.21. Portretul de stare la *exemplul 2.6.*

2.2.3. Cicluri limită

S-a văzut la 2.1.3.b.3, fig. III.17, *f*, că în portretul de stare al unui sistem este posibilă existenţa unor traiectorii închise. Ele corespund unor soluţii periodice ale sistemului dinamic. Ca şi în subcapitolul precedent vom aborda prin metoda planului stărilor atît existenţa, cît şi natura soluţiilor periodice ale unui sistem dinamic neliniar de ordinul doi.

Fie C_0 o curbă închisă în $\mathbf{R}^2$. Mulţimea W, de formă inelară, care conţine curba C_0 se numeşte o *vecinătate inelară* a curbei C_0.

Definiţia 5. O traiectorie închisă C_0 din portretul de stare se numeşte *ciclu limită* dacă există o vecinătate a ei W care nu mai conţine alte traiectorii închise.

În conformitate cu această definiţie traiectoriile închise care înconjoară un punct de echilibru de tip centru nu sînt cicluri limită deoarece oricît de mică ar fi vecinătatea W ea mai conţine cel puţin încă o traiectorie închisă (v. fig. III.17, *f*).

Exemplul 2.7. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 (1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \\ \dot{x}_2 = - x_1 + x_2(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}). \end{cases}$$

Folosind coordonatele polare să se arate că sistemul are un ciclu limită.

Introducînd coordonatele polare $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ din ecuaţiile sistemului se obţine

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\theta} = - 1. \end{cases}$$

Evident $r(t) = 1$, $\theta(t) = -t$ este o soluţie periodică a sistemului corespunzătoare traiectoriei închise C_0: $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Această traiectorie este un ciclu limită deoarece pentru $0 < r < 1$ avem $\dot{r} > 0$, iar pentru $r > 1$ avem $\dot{r} < 0$, ceea ce înseamnă că atît traiectoriile din interiorul, cît şi cele din exteriorul lui C_0 sînt spirale care converg la C_0, fig. III.22, *a*, respectiv că C_0 este singura traiectorie închisă din planul stărilor. Avînd în vedere caracterul traiectoriilor din vecinătatea lui C_0 se poate afirma că ciclul limită C_0 este stabil.

Definiţia 6. Un ciclu limită C_0 se numeşte *stabil (atractor)* dacă traiectoriile din vecinătatea ei, atît dintr-o parte cît şi din cealaltă parte a lui C_0, tind la C_0 pentru $t \to \infty$, fig. III.22, *a*.

Definiţia 7. Un ciclu limită C_0 se numeşte *instabil (repulsor)* dacă traiectoriile din vecinătatea ei, atît dintr-o parte cît şi din cealaltă parte a lui C_0, se îndepărtează de C_0 pentru $t \to \infty$, fig. III.22, *b*.

Definiţia 8. Un ciclu limită C_0 se numeşte *semistabil* dacă traiectoriile din vecinătatea ei, dintr-o parte tind la C_0, iar din cealaltă parte se îndepărtează de C_0, ambele pentru $t \to \infty$, fig. III.22, *c*.

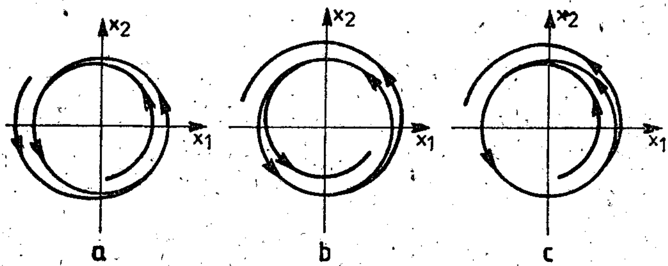


Fig. III.22. Cicluri limită:
a — stabil; *b* — instabil; *c* — semistabil.

Ceea ce este caracteristic portretului de stare care conţine un ciclu limită stabil (instabil) este faptul că se poate determina o vecinătate W astfel încît toate traiectoriile de stare, cu excepţia ciclului limită, intră în (ies din) W atunci cînd $t \to \infty$. Această proprietate, consecinţă directă a *definiţiilor 6 şi 7*, conduce la următorul rezultat, [A5].

Teorema 5 (Poincaré-Bendixson). Fie $T(x_{10}, x_{20})$ o traiectorie de stare a sistemului (2.2), corespunzătoare punctului iniţial (x_{10}, x_{20}), care este conţinută pentru $t \geqslant t_0$ în întregime într-o mulţime mărginită $D \subset \mathbf{R}^2$. Atunci pentru $t \to \infty$ traiectoria $T(x_{10}, x_{20})$ tinde fie la un punct de echilibru, fie la un ciclu limită.

Acest rezultat, pentru a fi eficient în aplicaţii, a pus în evidenţă necesitatea unei abordări globale a problemei existenţei şi naturii ciclurilor limită. Ea are în vedere următoarele două aspecte importante:

— tratarea operatorială a evoluţiei soluţiei sistemului (2.2) în sensul că aceasta reprezintă o transformare a planului $\mathbf{R}^2$ în el însuşi;

— evidenţierea unor mulţimi în planul stărilor din care nu iese nici o traiectorie de stare.

Soluţia $(x_1(t), x_2(t)) \in X \subseteq \mathbf{R}^2$ a sistemului (2.2), care satisface condiţia iniţială $(x_{10}, x_{20}) \in X$ precizează evoluţia punctului de stare care la $t = t_0$ se află în (x_{10}, x_{20}). Această idee poate fi formalizată în modul următor.

Definiţia 9. Aplicaţia $\Phi_t \colon X \to X$ care transformă pe $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ în $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, adică $x(t) = \Phi_t(x_0)$, se numeşte *fluxul* sau *operatorul de evoluţie* al sistemului (2.2).

În cazul sistemului liniar (2.6) operatorul de evoluţie are expresia matriceală

$$\Phi_t = e^{A(t-t_0)},$$

unde A este matricea coeficienţilor sistemului. El coincide cu matricea de tranziţie a sistemului, introdusă la I.2.1.3 şi explicitată la I.5.2.3.

Definiția 10. O submulțime $D \subset \mathbf{R}^2$ se numește *mulțime pozitiv invariantă* pentru sistemul (2.2) dacă pentru orice punct $x_0 \in D$ traiectoria $x(t) = \Phi_t(x_0)$ rămîne în D pentru toți $t \geqslant t_0 = 0$.

Un rezultat de existență a ciclurilor limită, care se obține imediat din *teorema 5* și *definiția 10* este următorul.

Teorema 6. Dacă o submulțime D, închisă și mărginită este pozitiv invariantă pentru sistemul (2.2) și în D nu există nici un punct de echilibru atunci în D există un ciclu limită.

Desigur că aplicarea *teoremei 6* este legată de dificila problemă a determinării unei mulțimi pozitiv invariante. Rezultate generale în acest sens au fost deja publicate în [C4], [M1], [P2, 3]. Un rezultat aplicabil unor sisteme de ordinul n neautonome cu D funcție de timp și de forma unui hiperparalelipiped a fost prezentat în [P3]. Vom da acest rezultat pentru cazul sistemului (2.2) și o mulțime dreptunghiulară

$$D(t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad \alpha_1(t) \leqslant x_1 \leqslant \beta_1(t), \quad \alpha_2(t) \leqslant x_2 \leqslant \beta_2(t)\}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2.23}$$

cu $\alpha_i(t)$ și $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$, funcții diferențiabile.

Teorema 7 (Pavel-Voicu). Mulțimea $D(t)$ este pozitiv invariantă pentru sistemul (2.2) dacă și numai dacă

$$\begin{cases} f_1(\alpha_1(t), x_2) \geqslant \dot{\alpha}_1(t) \\ f_1(\beta_1(t), x_2) \leqslant \dot{\beta}_1(t), \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} f_2(x_1, \alpha_2(t)) \geqslant \dot{\alpha}_2(t) \\ f_2(x_1, \beta_2(t)) \leqslant \dot{\beta}_2(t) \end{cases} \tag{2.25}$$

pentru toți $(x_1, x_2) \in D(t)$ și toți $t \in \mathbf{R}_+$.

Utilizarea practică a *teoremei 7* poate fi mai comodă dacă sistemul (2.2) este exprimat în coordonate polare. Fie pentru aceasta

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + r\cos\theta \\ x_2 = a_2 + r\sin\theta, \end{cases} \tag{2.26}$$

unde $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ este un anumit punct din plan și $(r, \theta) \in \mathbf{R}^2$ sînt coordonatele polare.

Introducînd (2.26) în (2.2) și explicitînd derivatele $\dot{r}$ și $\dot{\theta}$ se obține

$$\begin{cases} \dot{r} = g_1(r, \theta), & t \in \mathbf{R}_+, \\ \dot{\theta} = g_2(r, \theta), & (r, \theta) \in \mathbf{R}^2, \end{cases} \tag{2.27}$$

în care

$$\begin{cases} g_1(r, \theta) = f_1(a_1 + r\cos\theta,\ a_2 + r\sin\theta)\cos\theta + \\ \qquad + f_2(a_1 + r\cos\theta,\ a_2 + r\sin\theta)\sin\theta \\ g_2(r, \theta) = \dfrac{1}{r}\,[f_2(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta)\cos\theta - \\ \qquad - f_1(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta)\sin\theta]. \end{cases} \tag{2.28}$$

Întrucît, de regulă, ne interesează determinarea unei mulţimi pozitiv invariante de formă inelară în planul (x_1, x_2) se consideră

$$D_i(t) = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2;\ r_1(t) \leqslant r \leqslant r_2(t)\}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2.29}$$

în care $r_1(t)$ şi $r_2(t)$ sînt funcţii diferenţiabile. Din modul în care a fost definit D_i rezultă evident că $\theta \in \mathbf{R}$.

Aplicînd *teorema 7* sistemului (2.27) şi mulţimii (2.29) se obţine următorul rezultat util în aplicaţii.

Teorema 8. Mulţimea $D_i(t)$ este pozitiv invariantă pentru sistemul (2.27) dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} g_1(r_1(t),\ \theta) \geqslant \dot{r}_1(t) \\ g_1(r_2(t),\ \theta) \leqslant \dot{r}_2(t) \end{cases} \tag{2.30}$$

pentru toţi $\theta \in \mathbf{R}$ şi toţi $t \in \mathbf{R}_+$.

Exemplul 2.8. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - ax_1^2 - bx_2^2). \end{cases}$$

Să se determine parametrii $a > 0$ şi $b > 0$ astfel încît sistemul să admită o mulţime pozitiv invariantă de forma unui inel circular.

Întrucît sistemul are originea ca punct unic de echilibru vom folosi transformarea (2.26) cu $a_1 = a_2 = 0$. Se obţine

$$\begin{cases} \dot{r} = r\sin^2\theta\,(1 - ar^2\cos^2\theta - br^2\sin^2\theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta(1 - ar^2\cos^2\theta - br^2\sin^2\theta). \end{cases}$$

Pentru $r_1 = \text{const.}$ şi $r_2 = \text{const.}$ cu $0 < r_1 \leqslant r_2$ conform *teoremei 8* trebuie să aibă loc

$$\begin{cases} r_1\sin^2\theta(1 - ar_1^2\cos^2\theta - br_1^2\sin^2\theta) \geqslant 0 \\ r_2\sin^2\theta(1 - ar_2^2\cos^2\theta - br_2^2\sin^2\theta) \leqslant 0 \end{cases}$$

pentru toţi $\theta \in \mathbf{R}$.

Acest sistem de inecuații este satisfăcut pentru $\theta = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, mai trebuie să aibă loc

$$r_1^2 \leqslant \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}, \quad r_2^2 \geqslant \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

Pentru $a < b$ avem $r_1^2 \leqslant b^{-1}$ și $r_2^2 \geqslant a^{-1}$. Pentru $a > b$ avem $r_1^2 \leqslant a^{-1}$ și $r_2^2 \geqslant b^{-1}$. În sfîrșit, pentru $a = b$ se obține $r_1^2 \leqslant a^{-1} \leqslant r^2$. În toate cazurile D_i este mulțime pozitiv invariantă, care conform *teoremei 6*, conține ciclul limită stabil $ax_1^2 + bx_2^2 = 1$.

Un alt rezultat util în aplicații este următorul.

Teorema 9 (Liénard). Fie un sistem dinamic descris prin ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -g(x) - f(x)v \end{cases} \tag{2.31}$$

și fie

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad G(x) = \int_0^x g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.32}$$

Dacă

1° $f(x)$ este funcție pară, cu $F(x) < 0$ pentru $x \in (0, a)$ și $g(x)$ este funcție impară cu $xg(x) > 0$ pentru $x \neq 0$,

2° $|F(x)| \to \infty$ pentru $|x| \to \infty$ și $G(x) \to \infty$ pentru $x \to \infty$,

3° $F(x)$ are numai zerourile $x=0$ și $x=a>0$ și este monoton crescătoare pentru $x > a$ atunci sistemul considerat admite exact un ciclu limită stabil în interiorul căruia se găsește originea care este focar instabil.

În sfîrșit, la fel de util în unele aplicații este următorul rezultat de non-existență a ciclurilor limită.

Teorema 10 (Bendixson). Fie D o regiune simplu conexă din $\mathbf{R}^2$ în care sistemul (2.2) are proprietatea

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \text{semn constant}. \tag{2.33}$$

Atunci sistemul (2.2) nu are nici o traiectorie închisă în întregime conținută în D.

D. Dacă $P(x_1, x_2)$ și $Q(x_1, x_2)$ au derivate parțiale continue într-o regiune simplu conexă $D \subset \mathbf{R}^2$ mărginită de o curbă C_0 simplu închisă atunci, conform formulei lui Stokes, [S2], are loc

$$\oint_{C_0} P\mathrm{d}x_1 + Q\mathrm{d}x_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{2.34}$$

Se presupune prin absurd că C_0, care mărgineşte D, este un ciclu limită al sistemului (2.2). Pentru orice $(x_1, x_2) \in C_0$ are loc $f_1(x, x_2)\,dx_2 - f_2(x_1, x_2)\,dx_1 = 0$. Pentru $P = -f_2$ şi $Q = f_1$ din (2.34) rezultă

$$\oint_{C_0} f_1\,dx_2 - f_2\,dx_1 = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0,$$

ceea ce este în contradicţie cu (2.33). ■

Exemplul 2.9. Se consideră sistemul de la *exemplul 2.8* şi se cere să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît să nu existe nici un ciclu limită în tot planul de stare.

Conform condiţiei (2.33) trebuie să aibă loc

$$1 - ax_1^2 - 3bx_2^2 = \text{semn constant}$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Se observă că pentru $a < 0$ şi $b < 0$ condiţia impusă este satisfăcută. Cum punctul de echilibru (0,0) este un focar instabil, rezultă că soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ este global instabilă.

2.2.4. Aplicaţie: oscilator electronic RC

Se consideră un amplificator electronic cu reacţie după ieşire printr-o reţea RC, fig. III.23. Caracteristica statică a amplificatorului, care prezintă fenomenul de saturaţie, se explicitează prin polinomul de gradul trei

$$u_e = k_1 u_i - k_3 u_i^3. \tag{2.35}$$

În ipoteza că rezistenţa de intrare a amplificatorului este foarte mare ($R_i = +\infty$) şi rezistenţa de ieşire este foarte mică ($R_e \approx 0$), se cere să se determine condiţiile în care sistemul considerat generează oscilaţii stabile.

Cu notaţiile din fig. III.23 putem scrie ecuaţiile:

$$u_e = \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt + R_1 i + R_2 i_R, \tag{2.36}$$

$$u_i = R_2 i_R = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_C\,dt, \tag{2.37}$$

$$i = i_R + i_C. \tag{2.38}$$

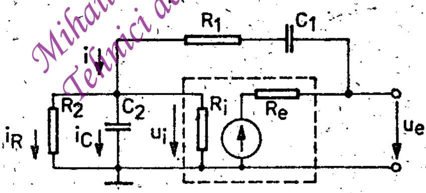


Fig. III.23. Oscilator electronic RC.

Introducînd variabila $x = u_i$ şi eliminînd u_e, i, i_R şi i_C între ecuaţiile (2.35)—(2.38) se obţine ecuaţia

$$\ddot{x} + (2\zeta\omega_n + \alpha x^2)\,\dot{x} + \omega_n^2 x = 0, \tag{2.39}$$

în care

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \\ \zeta = \dfrac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1 - k_1R_2C_1}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \\ \alpha = \dfrac{3\,k_3}{R_1C_2}. \end{cases} \tag{2.40}$$

Ecuația (2.39) este de tip Van der Pol și este echivalentă cu următoarea reprezentare de stare

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega_n^2 x - (2\zeta\omega_n + \alpha x^2)v. \end{cases} \tag{2.41}$$

Întrucît *teorema 9* garantează existența a exact unui ciclu limită stabil, să observăm că dacă $\zeta < 0$ atunci avem:

1° $f(x) = 2\zeta\omega_n + \alpha x^2$; $F(x) = 2\zeta\omega_n x + \frac{1}{3}\alpha x^3$;

$F(x) < 0$ pentru $0 < x < a = \sqrt{6|\zeta|\omega_n/\alpha}$;

$g(x) = \omega_n^2 x$; $xg(x) > 0$ pentru $x \neq 0$;

2° $|F(x)| \to \infty$ pentru $|x| \to \infty$ și $G(x) = \frac{1}{2}\omega_n^2 x^2 \to \infty$ pentru $|x| \to \infty$;

3° $F(a) = 0$ și $F'(x) > 0$ pentru $x > a$.

Rezultă că sistemul considerat are un ciclu limită stabil, a cărui formă și parametri se pot determina prin metoda izoclinelor. Să mai observăm în final că realizarea condiției $\zeta < 0$, conform relației a doua din (2.40), implică

$$k_1 > k_{10} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}, \tag{2.42}$$

care este de fapt condiția ca sistemul să intre în regim de autooscilații.

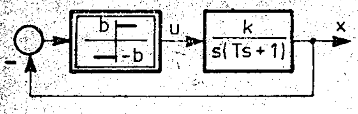


Fig. III.24. Servomecanism cu regulator de tip releu.

2.2.5. Aplicație: servomecanism cu regulator de tip releu

Se consideră servomecanismul cu schema bloc structurală din fig. III.24, în care neliniaritatea este de tip releu bipozițional. Cu notațiile din figură se pot scrie ecuațiile

$$X(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} U(s), \text{ cu } u = \begin{cases} -b, & x > 0 \\ +b, & x < 0, \end{cases}$$

sau

$$T\ddot{x} + \dot{x} = -kb \operatorname{sgn} x. \tag{2.43}$$

Introducînd și variabila $v = \dot{x}$, din (2.43) se obține

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\dfrac{kb \operatorname{sgn} x + v}{T} \end{cases}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{kb \operatorname{sgn} x + v}{Tv}. \tag{2.44}$$

Prin operații elementare ecuația (2.44) se aduce la forma

$$\mathrm{d}x = -T\,\mathrm{d}v + T\,kb \frac{\mathrm{d}v}{v + kb \operatorname{sgn} x} \operatorname{sgn} x.$$

Pentru $x < 0$, prin integrare se obține

$$x = -Tv - Tk\,b \ln(-v + kb) + C_1, \quad v < kb, \tag{2.45}$$

iar pentru $x > 0$, procedînd asemănător, rezultă

$$x = -Tv + Tkb \ln(v + kb) + C_2, \quad v > -kb. \tag{2.46}$$

Avînd în vedere faptul că releul comută atunci cînd x schimbă de semn, rezultă că pentru $x < 0$ sistemul evoluează pe o traiectorie din familia (2.45), iar pentru $x > 0$ pe o traiectorie din familia (2.46). Urmează că planul stărilor este format prin alipirea semiplanelor $x < 0$ și $x > 0$, fiecare cu familia sa de traiectorii, după axa $x = 0$ care este *linia de comutare*. Pe această dreaptă se trece de pe traiectoriile (2.45) pe traiectoriile (2.46) și viceversa, în mod succesiv, fig. III.25, *a*. Sensul de

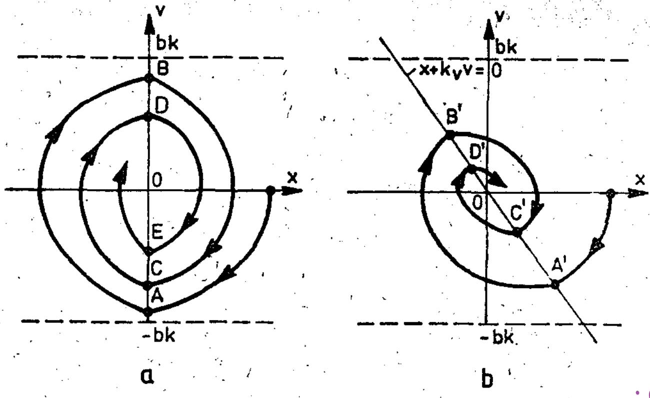


Fig. III.25. *a* — Portretul de stare al sistemului din fig. III.24; *b* — Reducerea oscilațiilor prin rotirea dreptei de comutare.

parcurgere a traiectoriilor este cel indicat prin săgeți (în semiplanul $v < 0$, x este descrescător, iar în semiplanul $v > 0$, x este crescător). Întrucît familiile de traiectorii (2.45) și (2.46) au proprietatea că șirul $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, $|OD|$, $|OE|$ etc. (fig. III.25, *a*) este monoton descrescător, rezultă că orice traiectorie de stare situată în $|v| < kb$ converge către origine (focar stabil).

Calitatea evoluției stării către origine nu este satisfăcătoare datorită numărului ridicat de oscilații. Pentru a evidenția o posibilitate de reducere a numărului de oscilații să observăm că, geometric, o rotire în sens pozitiv a dreptei de comutare poate avea efectul dorit. Justificarea se bazează pe faptul că de această dată șirul $|OA'|$, $|OB'|$, $|OC'|$, $|OD'|$ etc. (fig. III.25, *b*) converge mult mai repede la zero. Dacă ecuația noii drepte de comutare este

$$x + k_v v = 0, \quad k_v > 0,$$

atunci pentru realizarea efectivă a comutării pe această dreaptă sistemul va trebui să fie guvernat, în locul ecuației (2.43), de ecuația

$$T\ddot{x} + \dot{x} = -kb \operatorname{sgn} (x + k_v \dot{x}).$$

Aceasta înseamnă că pe calea directă a sistemului, înainte de releu, trebuie să se introducă un regulator PD cu funcția de transfer $G_c(s) = 1 + k_v s$. Aparent, o valoare k_v cît mai mare ar trebui să asigure în aceeași măsură reducerea oscilațiilor sistemului. Există totuși o limită superioară a lui k_v determinată de apariția regimului alunecător, [B6], [U1].

2.2.6. Bifurcaţia Hopf

Bifurcaţia unui sistem dinamic este legată de faptul că variaţiile anumitor parametri ai sistemului, sub influenţa unor perturbaţii externe, pot produce modificări calitative importante ale portretului de stare. De exemplu în cazul oscilatorului RC de la 2.2.4, variaţia factorului de amplificare k_1 în jurul valorii k_{10} (relaţia (2.42)) face ca punctul de echilibru (0, 0) să se transforme din focar stabil, pentru $k_1 < k_{10}$, în focar instabil, pentru $k_1 > k_{10}$. Schimbarea calitativă a portretului de stare se produce la $k_1 = k_{10}$ şi se spune că sistemul are o *bifurcaţie* la k_{10}. Să mai observăm că partea liniară a sistemului (2.41) are valorile proprii $-\omega_n(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$, care devin $\pm j\omega_n$ pentru $k_1 = k_{10}$. Se spune că sistemul (2.41) are o *bifurcaţie Hopf* pentru $k_1 = k_{10}$, [C5], [M2].

În legătură cu bifurcaţia Hopf şi cu posibilitatea apariţiei unui ciclu limită la variaţia unui parametru $k \in \mathbf{R}$ poate fi util următorul rezultat, a cărui demonstraţie se găseşte în [M2].

Teorema 11. Fie sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, k), & t \in \mathbf{R}_+, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, k), & (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad k \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.47}$$

care are un punct de echilibru în (0, 0) pentru orice k. Valorile proprii $\lambda_1(k)$ şi $\lambda_2(k)$ ale părţii liniare a sistemului (2.47) sînt pur imaginare pentru $k = k_0$.

Dacă

$$\frac{d}{dk}\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}(k)]_{k=k_0} > 0 \tag{2.48}$$

şi originea este un punct de echilibru asimptotic stabil pentru $k = k_0$ atunci:

1° $k = k_0$ este un punct de bifurcaţie al sistemului;

2° există $k_1 < k_0$ astfel încît pentru $k \in (k_1, k_0)$ originea este focar stabil;

3° există $k_2 > k_0$ astfel încît pentru $k \in (k_0, k_2)$ originea este focar instabil înconjurat de un ciclu limită ale cărui dimensiuni cresc cu creşterea lui k.

Este relativ uşor de verificat că oscilatorul electronic RC are o bifurcaţie la $k_1 = k_{10}$. Într-adevăr (2.48) are loc în mod evident. Pentru a arăta că pentru $k_1 = k_{10}$ punctul de echilibru al sistemului (2.41) este asimptotic stabil se foloseşte *teorema 4* (indicele de stabilitate pentru $k_1 = k_{10}$ este $I = -2\alpha/\omega_n < 0$).

3. Metoda directă Liapunov

3.1. Sisteme dinamice neliniare autonome și continue în timp

În cadrul acestui subcapitol ne vom ocupa în primul rînd de sisteme dinamice de forma

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.1}$$

cu condiția inițială $x(t_0) = x_0$ și punctul de echilibru $x = 0$.

Rezultatele care se vor expune au fost extinse prin adaptări corespunzătoare și la cazul sistemelor neautonome și/sau discrete în timp. Astfel de cazuri vor fi luate în considerare cu prilejul tratării noțiunii de *stabilitate absolută*, introdusă în teoria sistemelor automate neliniare ca parte a unui sistem de concepte generat de metoda directă Liapunov.

3.1.1. Definiții

În esență metoda directă Liapunov, [L3], se bazează pe generalizarea noțiunii de energie. De exemplu în cazul sistemului mecanic din fig. I.15 punctul A_1 este un punct de echilibru asimptotic stabil. Justificarea de ordin *strict fizic* a acestei afirmații constă în aceea că energia totală a bilei B atinge un minim relativ V_{min} în A_1 și în orice punct nu prea îndepărtat de A, dar diferit de acesta, au loc inegalitățile $V - V_{min} > 0$ și $\dot{V} \leqslant 0$, ceea ce înseamnă că mișcarea bilei B are loc către punctul A_1 (aperiodic sau oscilatoriu amortizat).

Pornind de la această idee se asociază sistemului (3.1) o funcție $V: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ cu următoarele proprietăți:

1° Derivatele $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde x_i sînt componentele lui x, există și sînt continue pentru $\| x \| \leqslant K$, $K > 0$.

2° $V(x)$ este *pozitiv definită*, adică $V(0) = 0$ și $V(x) > 0$ pentru $\| x \| \leqslant K$, cu $x \neq 0$.

3° $\dot{V}(x)$ este *negativ semidefinită*, adică $\dot{V}(0) = 0$ și $\dot{V}(x) \leqslant 0$ pentru $\| x \| \leqslant K$, cu $x \neq 0$.

Proprietatea 3° se poate înlocui cu următoarea mai tare.

4° $\dot{V}(x)$ *este negativ definită*, adică $\dot{V}(0) = 0$ și $\dot{V}(x) < 0$ pentru $\|x\| \leqslant K$, cu $x \neq 0$.

Prin $\dot{V}(x)$ se înțelege

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n = [\operatorname{grad} V(x)]^T \dot{x} =$$

$$= [\operatorname{grad} V(x)]^T f(x), \tag{3.2}$$

în care

$$\operatorname{grad} V(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]^T \tag{3.3}$$

este vectorul gradient al funcției scalare $V(x)$; (3.2) justifică afirmația că $V(x)$ este o funcție asociată sistemului (3.1).

Definiția 1. O funcție $V(x)$ care satisface 1°—3° se numește *funcție Liapunov slabă.*

Definiția 2. O funcție $V(x)$ care satisface 1°, 2° și 4° se numește *funcție Liapunov tare.*

3.1.2. Criterii de stabilitate și de instabilitate

Teorema 1 (Liapunov). Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este stabil dacă există o funcție Liapunov slabă.

D. Se presupune prin absurd că deși există o funcție Liapunov slabă, $x = 0$ nu este stabil, adică pentru $\| x_0 \| < \delta$ există un $t_1 > t_0$ astfel încît $\| x(t_1) \| \geqslant \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$ dat.

În virtutea proprietăților 1°—3° există o funcție $\varphi(r)$, unde r este lungimea razei vectoare în $\mathbf{R}^n$, cu proprietățile: $\varphi(0) = 0$ și $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant K$ implică $\varphi(r_1) < \varphi(r_2)$, dar astfel încît

$$V(x) \geqslant \varphi(\| x \|). \tag{3.4}$$

Fie x_0 astfel ales încît să aibă loc simultan

$$\| x_0 \| < \delta = \varepsilon, \quad V(x_0) < \varphi(\varepsilon). \tag{3.5}$$

Acest lucru este posibil pentru x_0 suficient de apropiat de origine deoarece $\varphi(\varepsilon) > 0$, $V(0) = 0$ și $V(x)$ este continuă. Întrucît $\dot{V} \leqslant 0$, urmează că $V(x(t_1)) \leqslant V(x_0)$ pentru $t_1 > t_0$ sau, ținînd seama de (3.5),

$$V(x(t_1)) < \varphi(\varepsilon). \tag{3.6}$$

Dar pentru $t_1 > t_0$ avem $\|x(t_1)\| > \varepsilon$ şi din (3.4) rezultă $V(x(t_1)) \geqslant \geqslant \varphi(\|x(t_1)\|) \geqslant \varphi(\varepsilon)$, ceea ce contrazice (3.6). ■

Teorema 2 (Liapunov). Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este asimptotic stabil dacă există o funcţie Liapunov tare.

D. Conform *teoremei 1* $x = 0$ este stabil. Mai rămîne de arătat că dacă are loc 4° atunci $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ pentru orice x_0 cu $\|x_0\| < \delta$.

Se presupune prin absurd că, deşi $\dot{V}(x)$ este negativ definită, $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| \neq 0$, adică există un $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ (ε din *definiţia 1* de la I.4.2.1) astfel încît

$$\|x(t)\| > \varepsilon_1, \quad t > t_1 > t_0. \tag{3.7}$$

Întrucît $-\dot{V}(x)$ este pozitiv definită, există o funcţie $\psi(r)$ cu proprietăţile $\psi(0) = 0$ şi $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant K$ implică $\psi(r_1) < \psi(r_2)$, dar astfel încît

$$\dot{V}(x) \leqslant -\psi(\|x\|). \tag{3.8}$$

Ţinînd seama de (3.7) şi de faptul că $-\psi(r)$ este strict descrescătoare, din (3.8) rezultă că

$$\dot{V}(x(t)) < -\psi(\varepsilon_1), \quad t > t_1. \tag{3.9}$$

Se integrează (3.9) de la t_1 la t. Rezultă $V(x(t)) < V(x(t_1)) - \psi(\varepsilon_1)\cdot(t - t_1)$, $t > t_1$, adică pentru $t > t_1 + V(x(t_1))/\psi(\varepsilon_1)$ avem $V(x(t)) < 0$, ceea ce contrazice faptul că $V(x)$ este pozitiv definită. Conform ipotezelor 2° şi 4° $V(x(t))$ este pozitivă şi descrescătoare, astfel că pentru $t \to \infty$ ea are o limită nenegativă. În consecinţă $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{V}(x(t)) = 0$, dar întrucît $\dot{V}(x)$ este negativ definită, aceasta are loc numai dacă $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$. ■

Pentru $n = 2$ este foarte simplu de dat o interpretare geometrică *teoremei 2* în planul stărilor.

Conform *teoremei 2* trebuie să aibă loc $V(x_1, x_2) > 0$, $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ pentru $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant K$ şi $V(0, 0) = 0$, $\dot{V}(0, 0) = 0$. În consecinţă funcţia $z = V(x_1, x_2)$ poate fi reprezentată în planul stărilor prin curbe de nivel constant, fig. III.26, care au dimensiuni din ce în ce mai reduse pe măsură ce z scade. Dacă γ este o traiectorie de stare oarecare din vecinătatea originii, pentru un punct P de intersecţie cu o curbă

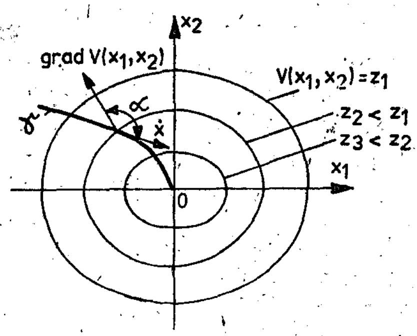


Fig. III.26. Interpretarea geometrică a *teoremei 2*.

de nivel constant are loc $\dot{V}(x_1,x_2) < 0$. Conform relației (3.2), în care se explicitează produsul scalar, pentru punctul P are loc

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} \times$$
$$\times (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2)^{1/2} \cos \alpha < 0, \quad (3.10)$$

unde α este unghiul dintre vectorul gradient, care este normal la curba de nivel constant în punctul P și vectorul viteză $\dot{x}$ al punctului de stare P de pe traiectoria γ. Condiția (3.10) implică $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, ceea ce înseamnă că vectorul $\dot{x}$ este permanent orientat spre interiorul oricărei curbe de nivel constant. Ca urmare pentru $t \to \infty$ punctul P se deplasează pe curba γ spre originea planului de stare, ceea ce implică faptul că originea este punct de echilibru asimptotic stabil.

Pentru cazurile în care $V(x)$ este funcție Liapunov slabă dar $\dot{V}(x) = 0$ numai pe traiectorii banale din $\|x\| \leqslant K$ (cum ar fi puncte de echilibru izolate sau unele axe ale spațiului stărilor) este util următorul rezultat, [B 9].

Teorema 3 (Barbașin-Krasovski). Dacă există o funcție Liapunov slabă dar astfel încît $\dot{V}(x)$ nu este identic nulă pe orice traiectorie nebanală a sistemului (3.1) atunci punctul de echilibru $x = 0$ este asimptotic stabil.

Întrucît metoda directă Liapunov produce în principiu numai condiții suficiente de stabilitate sau stabilitate asimptotică, înseamnă că rezultatele din *teoremele 1—3* sînt valabile numai pentru o regiune a planului stărilor. Cu alte cuvinte respectivele rezultate sînt rezultate de *stabilitate* sau de *stabilitate asimptotică în mic*.

Definiția 3. Dacă o regiune X_{sa} din spațiul stărilor, definită prin $V(x) \leqslant$ constant, unde $V(x)$ este o funcție Liapunov tare, este închisă și mărginită atunci X_{sa} este o regiune de stabilitate asimptotică în spațiul stărilor.

Este evident că determinarea unei regiuni de stabilitate asimptotică X_{sa} depinde de alegerea funcției $V(x)$, urmînd ca pentru funcții Liapunov tari diferite să se obţină X_{sa} diferite. În aceste condiţii se poate da o formă echivalentă *definiţiei 4* de la I.4.2.3.

Definiţia 4. Dacă $x = 0$ este un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (3.1) atunci mulţimea X_a a tuturor stărilor iniţiale x_0 pentru care traiectoriile corespunzătoare converg către origine pentru $t \to \infty$ se numeşte *mulţimea de atracţie* a sistemului (3.1), corespunzătoare punctului de echilibru $x = 0$.

Regiunile de stabilitate asimptotică X_{sa} sînt părţi ale mulţimii de atracţie X_a. Determinarea mulţimii de atracţie sau a unor părţi ale ei are o importanţă practică deosebită, deoarece în acest fel se pot preciza limitele funcţionării normale ale unui sistem. Problema în sine este relativ complexă, deoarece presupune construcţia unei funcţii Liapunov tari în condiţiile în care *definiţia 2* nu precizează vreun procedeu pentru o astfel de construcţie.

Desigur că din punct de vedere practic este de dorit ca $X_a = \mathbf{R}^n$, respectiv ca starea de echilibru să fie global asimptotic stabilă. Pentru aceasta este necesară satisfacerea unei condiţii suplimentare, după cum rezultă din afirmaţia următoare.

Teorema 4. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este global asimptotic stabil dacă el este asimptotic stabil şi dacă există o funcţie Liapunov cu proprietatea

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty. \tag{3.11}$$

Exemplul 3.1. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

Folosind funcţia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$ să se studieze natura punctului de echilibru (0,0) al sistemului.

Vom arăta că $V(x)$ este o funcţie Liapunov tare. Proprietăţile 1° şi 2° de la 3.1.1. sînt evident realizate. Pentru 4° avem

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_1x_2^2)\,\dot{x}_1 + (2x_1^2x_2 + 4x_2^3)\,\dot{x}_2 =$$

$$= -2x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^4 - 4x_2^6,$$

care este negativ definită. În plus $V(x_1, x_2)$ satisface şi condiţia (3.11). Aşadar punctul de echilibru este global asimptotic stabil.

În lipsa unor condiţii necesare şi suficiente de stabilitate sau de stabilitate asimptotică sînt deosebit de utile în aplicaţii şi rezultate de instabilitate, [L3], [C6], [B10].

Teorema 5 (Liapunov). Fie o funcţie $V(x)$ cu $V(0) = 0$ şi cu derivatele parţiale de ordinul întîi continue. Dacă există o vecinătate, care conţine originea, în care $V(x)$ este pozitiv definită şi $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (3.11)) este pozitiv definită atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului este instabil.

Teorema 6 (Cetaev). Fie o funcţie $V(x)$ cu $V(0) = 0$ şi cu derivatele parţiale de ordinul întîi continue. Dacă $V(x) = 0$ pe frontiera unei regiuni X_0 care are originea ca punct de frontieră şi dacă $V(x)$ şi $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (3.1)) sînt ambele pozitiv definite în X_0 atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este instabil.

Teorema 7. a. Fie o funcţie $V(x)$ cu $V(0) = 0$ şi cu derivatele parţiale de ordinul întîi continue. Dacă există o vecinătate care conţine originea în care $V(x)$ ia valori negative în unele puncte şi dacă $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (3.1)) este negativ semidefinită atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) nu este asimptotic stabil.

b. Dacă $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (3.1)) este negativ definită atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este instabil.

c. Dacă $V(x)$ şi $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (3.1)) sînt ambele negativ definite atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este complet instabil.

Exemplul 3.2. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1x_2. \end{cases}$$

Folosind funcţia $V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$ să se studieze natura punctului de echilibru al sistemului.

Punctul de echilibru este $x_1 = x_2 = 0$. Să observăm mai întîi că există puncte într-o vecinătate a originii pentru care $V(x_1, x_2) < 0$, de exemplu pentru $x_1 = 1$ şi $x_2 = 0{,}5$. Pe de altă parte $\dot{V}(x_1, x_2) = (3x_2^2 - 3x_1^2)\dot{x}_1 + 6x_1x_2\dot{x}_2 = -3(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0$ pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, cu $x_1 \neq 0$ şi $x_2 \neq 0$. Conform *teoremei 7. b* punctul de echilibru este instabil.

3.1.3. Cazul sistemelor dinamice liniare constante

Fie un sistem dinamic liniar constant de forma

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.12}$$

în care A este o matrice pătratică constantă.

În acest caz, după cum se va vedea imediat, se poate utiliza ca funcţie Liapunov tare forma pătratică (v. anexa D)

$$V(x) = x^T P x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.13}$$

în care P este o matrice reală simetrică şi pozitiv definită.

Teorema 8. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.12) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă pentru orice matrice Q, reală şi pozitiv definită, soluţia P a ecuaţiei Liapunov

$$PA - A^T P = -Q \tag{3.14}$$

este pozitiv definită.

D. *Suficienţa.* Dacă P, soluţie a ecuaţiei (3.14), este pozitiv definită (v. anexa D) atunci $V(x)$, relaţia (3.13), este o formă pătratică pozitiv definită. Pe de altă parte

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T(A^T P + PA)\,x = -\,x^T Q x$$

este o formă pătratică negativ definită. Conform *teoremei 2* punctul de echilibru este asimptotic stabil.

Necesitatea. Dacă $x = 0$ este asimptotic stabil atunci matricea A este hurwitziană (v. *definiţia 1* de la II.2). În aceste condiţii matricea simetrică şi pozitiv definită

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, e^{At}\, dt \tag{3.15}$$

este soluţia ecuaţiei Liapunov (3.14). ■

3.1.4. Stabilitatea în primă aproximaţie

Rezultatul din paragraful precedent constituie un prim pas spre conturarea unor procedee de construcţie a unei funcţii Liapunov.

Fie un sistem dinamic de forma

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.16}$$

unde $g(x)$ este o funcţie vectorială neliniară (cu termeni Taylor de grad mai mare ca unu), cu $g(0) = 0$. Se spune că sistemul (3.12) este *aproximaţia liniară* a sistemului (3.16).

Utilizînd funcţia (3.13), pe baza *teoremei 2*, se obţin următoarele rezultate.

Teorema 9. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.16) este asimptotic stabil dacă el este asimptotic stabil pentru aproximaţia liniară (3.12).

D. Fie funcţia (3.13), în care P este soluţia ecuaţiei (3.14). Derivînd în raport cu timpul în (3.13) obţinem

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T(A^T P + PA)x + 2g^T(x)Px =$$
$$= -x^T Q x + 2g^T(x)Px.$$

Întrucît $g(x)$ conţine termeni de grad mai mare sau egal cu doi (în cazul unei aproximaţii polinomiale) rezultă că termenul $g^T(x)Px$ conţine termeni de grad mai mare sau egal cu trei. Acest lucru implică faptul că pentru x suficient de apropiat de origine $\dot{V}(x) < 0$, ceea ce înseamnă că $V(x)$ este o funcţie Liapunov tare. Conform *teoremei 2* $x = 0$ este asimptotic stabil pentru (3.16). ■

În acelaşi mod se demonstrează şi următoarea afirmaţie.

Teorema 10. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.16) este instabil dacă el este instabil pentru aproximaţia liniară (3.12).

3.2. Tehnici de construcţie a unei funcţii Liapunov

S-a văzut în ultimele două paragrafe cum se poate utiliza o formă pătratică ca funcţie Liapunov în cazul sistemelor liniare sau în cazul aproximaţiei liniare a unui sistem. În acest ultim caz, dacă matricea A are valori proprii simple pe axa imaginară, cu ajutorul aproximaţiei liniare nu se poate face nici o afirmaţie privitoare la sistemul neliniar.

Pentru aplicarea *teoremelor 1 şi 2* trebuie să se răspundă mai întîi la următoarele două întrebări:

1° În ce condiţii există o funcţie Liapunov?

2° Dacă există o funcţie Liapunov, cum poate fi ea determinată în scopul aplicării *teoremelor 1 şi 2*?

Un răspuns la prima întrebare, a cărui demonstraţie este dată în [H4], este următorul.

Teorema 11. Dacă punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este asimptotic stabil şi matricea jacobiană

$$J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

a funcţiei $f(x)$ este continuă într-un domeniu $X_V \subseteq \mathbf{R}^n$ atunci există pe X_V o funcţie Liapunov tare pentru sistemul (3.1).

În legătură cu cea de a doua întrebare vom prezenta în continuare cîteva metode de construcţie a unei funcţii Liapunov.

3.2.1. Metoda Krasovski, [K3].

Fie B o matrice simetrică pozitiv definită, cu elemente reale constante. Cu B şi $J(x)$, relaţia (3.17), se construieşte matricea simetrică

$$M(x) = \frac{1}{2}[J^T(x)B + BJ(x)], \quad x \in X_V, \tag{3.18}$$

a cărei cea mai mare valoare proprie este $\mu(x)$.

Teorema 12. Dacă există o matrice B astfel încît $\mu(x) < -c$, $c > 0$, pentru orice $x \in X_V$ atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este asimptotic stabil. Dacă $\mu(x) < -c$ are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$ atunci $x = 0$ este global asimptotic stabil.

D. Părţile reale ale valorilor proprii ale matricii $BJ(x)$ sînt cuprinse între valorile proprii cea mai mică şi cea mai mare ale matricii $M(x)$ (v. *teorema 20* de la II.2.3.2), respectiv sînt mai mici ca $-c$. Urmează că pentru $x \in X_V$ avem $|\det BJ(x)| \geqslant c^n$, ceea ce înseamnă că funcţia $w(x) = |\det J(x)|$ are un minimum pozitiv α pe X_V. Funcţia

$$V(x) = f^T(x)Bf(x) \tag{3.19}$$

este pozitiv definită şi

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T J^T(x) Bf(x) + f^T(x) BJ(x) \dot{x} = 2 f^T(x) M(x) f(x)$$

este negativ definită. Ca urmare $x = 0$ este asimptotic stabil.

Pentru a arăta că $V(x) \to \infty$ pentru $\|x\| \to \infty$ pornim de la $\mathrm{d}f = w(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha\,\mathrm{d}x$ care prin integrare conduce la

$$\int \mathrm{d}f \geqslant \alpha \int \mathrm{d}x.$$

Aceasta înseamnă că pentru $\|x\| \to \infty$ cel puţin o componentă a lui $f(x)$ creşte nemărginit, respectiv că $V(x)$ este nemărginită. În concluzie $x = 0$ este global asimptotic stabil. ■

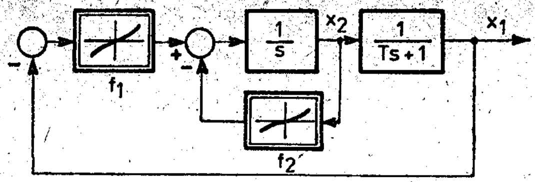


Fig. III.27. Schema bloc structurală a sistemului automat de la *exemplul 3.3.*

Exemplul 3.3. Se consideră sistemul automat cu structura din fig. III.27, ale cărui ecuații sînt

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{T}\,x_1 + \dfrac{1}{T}\,x_2 \\[2ex] \dot{x}_2 = -f_1(x_1) - f_2(x_2). \end{cases}$$

Ce condiții trebuie să îndeplinească neliniaritățile f_1 și f_2 astfel încît punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$ să fie global asimptotic stabil?

Considerînd $B = I$ în (3.18) putem scrie

$$M(x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{T} - f_1'(x_1)\right] \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{T} - f_1'(x)\right] & -f_2'(x_2) \end{bmatrix}.$$

Condiția ca această matrice să fie negativ definită este

$$f_2'(x_2) > \frac{T}{4}\left[\frac{1}{T} - f_1'(x)\right]^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Evident, aceasta este o condiție suficientă de stabilitate asimptotică globală a stării de echilibru. Ea poate fi îmbunătățită într-o oarecare măsură prin alegerea unei matrice B adecvate.

3.2.2. Metoda Ingwerson, [I3]

Această metodă se bazează tot pe utilizarea matricii jacobiene (3.17) a sistemului (3.1) și constă în parcurgerea următorilor pași.

1° Se rezolvă ecuația matriceală de tip Liapunov

$$J^T(x)P(x) + P(x)\,J(x) = -Q, \tag{3.20}$$

unde Q este o matrice reală, constantă, simetrică și pozitiv (semi)definită.

2° Cu ajutorul matricii simetrice $P(x)$ se formează o nouă matrice $\bar{P}(x)$ ale cărei elemente $\bar{p}_{ij}$ au proprietatea că depind numai de x_i și x_j deoarece prin definiție

$$\bar{p}_{ij}(x_i, x_j) = \bar{p}_{ji}(x_i, x_j) = p_{ij}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0),$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.21}$$

unde $p_{ij} = p_{ji}$ sînt elementele matricii $P(x)$.

3° Se formează vectorul gradient al funcției scalare $V(x)$, deocamdată necunoscută, ale cărui componente sînt

$$g_i(x) = [\text{grad } V(x)]_i = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{x_j} \bar{p}_{ij}(x_i, x_j)\, dx_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Se știe că, [S2], un vector oarecare este gradientul unei funcții scalare dacă și numai dacă rot grad $V(x) = 0$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Înlocuind (3.22) în (3.23) și ținînd seama de (3.21) se constată că (3.23) este satisfăcută.

4° Se determină $V(x)$ prin integrarea produsului $[\text{grad } V(x)]^T dx$ pe o curbă oarecare din $\mathbf{R}^n$. Întrucît valoarea integralei în acest caz nu depinde de curba aleasă, [S2], se poate scrie

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(x_1, 0, \ldots, 0)\, dx_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)\, dx_2 + \ldots +$$

$$+ \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{3.24}$$

5° Se aplică *teoremele 1—7* în mod adecvat și anume în funcție de modul în care sînt definite $V(x)$ și $\dot{V}(x)$.

Exemplul 3.4. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a x_1 - x_1^2 - b x_2, \quad a > 0, \quad b > 0. \end{cases}$$

Să se construiască o funcție Liapunov și să se determine natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Ecuaţia de tip Liapunov (3.20) are în acest caz forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -2x_1 - a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 - a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix},$$

în care Q s-a ales pozitiv semidefinită. Soluţia corespunzătoare este

$$P(x) = \bar{P}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conform relaţiei (3.22) componentele vectorului gradient sînt

$$g_1 = \int_0^{x_1} (2x_1 + a)\, dx_1 = x_1^2 + ax_1$$

$$g_2 = \int_0^{x_2} dx_2 = x_2.$$

În continuare, cu (3.24), se obţine

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_1^2 + ax_1)\, dx_1 + \int_0^{x_2} x_2\, dx_2 = \frac{1}{3} x_1^3 + \frac{1}{2} ax_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2,$$

care este pozitiv definită într-o regiune X_0 suficient de mică care conţine originea. Întrucît

$$\dot{V}(x_1, x_2) = g_1 \dot{x}_1 + g_2 \dot{x}_2 = -bx_2^2$$

este negativ semidefinită, dar $x_2 = 0$ nu este traiectorie a sistemului, conform *teoremei 3* punctul de echilibru este asimptotic stabil.

3.2.3. Metoda Schultz-Gibson, [S3]

Conform *definiţiilor (1)2*, $\dot{V}(x)$ de forma (3.2) trebuie să fie negativ (semi)definită. În aceste circumstanţe se defineşte

$$\operatorname{grad} V(x) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \qquad (3.25)$$

unde a_{ij} sînt funcţii de $x_1, \dots, x_n$ şi urmează să se aleagă astfel încît să fie satisfăcute condiţiile:

1° $\dot{V}(x)$ să fie negativ (semi)definită;

2° grad $V(x)$ să reprezinte gradientul unei funcţii scalare, ceea ce este echivalent cu (3.23).

3° O dată a_{ij} determinate, respectiv g_i cunoscute, se foloseşte (3.24) pentru determinarea funcţiei $V(x)$.

Exemplul 3.5. Se consideră un reactor atomic cu extracţie constantă de putere, descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{\alpha}{\tau} x_2 \\[2ex] \dot{x}_2 = \dfrac{1}{\varepsilon}(e^{x_1} - 1), \end{cases}$$

unde $P(t) = e^{x_1(t)}$ este puterea instantanee, x_2 este temperatura, $\alpha > 0$ este un coeficient de temperatură, $\varepsilon > 0$ este capacitatea calorică şi $\tau > 0$ este viaţa medie a unui neutron.

Se cere să se determine natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Cu $g_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ şi $g_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ avem

$$\dot{V}(x) = -\frac{\alpha}{\tau} a_{11}x_1x_2 - \frac{\alpha}{\tau} a_{12}x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} a_{21}(e^{x_1} - 1)\, x_1 + \frac{1}{\varepsilon} a_{22}(e^{x_1} - 1)x_2.$$

Se aleg $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$ şi $a_{11} = \dfrac{\tau}{\varepsilon\alpha x_1}(e^{x_1} - 1)$ şi se obţine $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ pentru $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ şi $g_1 = \dfrac{\tau}{\varepsilon\alpha}(e^{x_1} - 1)$, $g_2 = x_2$, pentru care $\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0$.

Folosind acum (3.24) rezultă

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\tau}{\varepsilon\alpha}(e^{x_1} - 1)\, dx_1 + \int_0^{x_2} x_2\, dx_2 = \frac{\tau}{\varepsilon\alpha}(e^{x_1} - x_1 - 1) + \frac{1}{2} x_2^2,$$

care este pozitiv definită pentru $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Conform *teoremei 1* starea de echilibru este stabilă.

3.2.4. Determinarea mulţimii de atracţie

Dacă se aplică *definiţia 4* în cazul unui sistem de ordinul doi rezultă că în planul stărilor frontiera mulţimii de atracţie X_a este formată în întregime din traiectorii de stare. Într-adevăr, fie Γ frontiera lui X_a, P un punct al ei şi γ o traiectorie care trece prin P. Evident Γ şi γ nu se intersectează deoarece în caz contrar există $Q \in \gamma$ astfel încît Q şi originea se află de părţi opuse faţă de Γ, ceea ce contrazice faptul că X_a este mulţimea de atracţie şi Γ frontiera ei. De asemenea este imposibil ca γ să fie tangentă la Γ dinspre interior în punctul P deoarece, în caz contrar, γ nu poate fi continuă în P. În concluzie γ

este o parte a lui Γ. Dacă γ este un ciclu limită atunci $\Gamma = \gamma$; în celelalte cazuri Γ este un poligon format din traiectorii de stare sau o curbă închisă formată numai din puncte de echilibru. Aceste concluzii rămîn valabile, *mutatis mutandis*, şi în cazul sistemelor de ordinul n.

După cum s-a mai arătat, părţi ale mulţimii de atracţie pot fi determinate cu ajutorul unei funcţii Liapunov adecvate.

Fie $V(x)$ o funcţie pozitiv definită într-o regiune $X \subset \mathbf{R}^n$ şi fie S o hipersuprafaţă închisă în întregime conţinută în X şi cu următoarele proprietăţi:

1° originea este în interiorul lui S;

2° $\dot{V}(x) = 0$ pentru $x \in S$;

3° pentru $x \neq 0$ $\dot{V}(x) < 0$ dacă x este în interiorul lui S şi $\dot{V}(x) > 0$ dacă x este în exteriorul lui S;

4° hipersuprafaţa $V(x) = c = \text{const.}$, închisă prin ipoteză, se găseşte în întregime în interiorul lui S.

Atunci $V(x) \leqslant c$ este o submulţime a mulţimii de atracţie, deoarece pentru orice punct al ei are loc *teorema 2* pentru sistemul (3.1).

Dacă S este constituită în întregime din traiectorii de stare ale sistemului (3.1) atunci S este frontiera mulţimii de atracţie.

Exemplul 3.6. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2. \end{cases}$$

Se cere să se evalueze mulţimea sa de atracţie.

Sistemul are punctele de echilibru (0,0) şi (1,1). Utilizînd partea liniară a sistemului se constată că (0,0) este nod stabil şi (1,1) este şa. Conform *teoremei 10* de la 2.2.3, sistemul nu are nici o traiectorie închisă în planul stărilor. Traiectoria $x_1 = x_2$ trece prin punctele de echilibru. Întrucît P (1,1), fig. III.28, este şa rezultă că mai există şi traiectoriile $P'P$ şi $P''P$ care converg către P, tangent în P la separatoarea $x_1 + x_2 = 2$ a părţii liniare, care reprezintă de fapt separatoarea portretului de stare. În conformitate cu cele de mai sus, $P'P''$ este frontiera mulţimii de atracţie a sistemului.

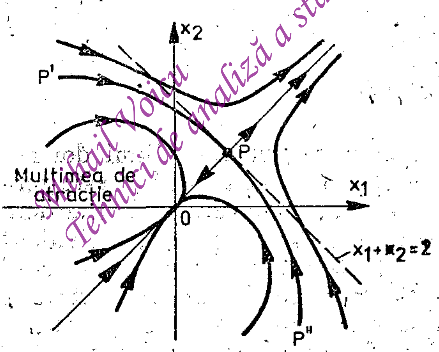


Fig. III.28. Portretul de stare la *exemplul 3.6.*

Ideile expuse mai sus au condus la o metodă de construcţie a unei funcţii Liapunov care permite determinarea exactă a mulţimii de atracţie *(metoda Zubov,* [Z2]*)*.

Se consideră sistemul (3.1) şi o mulţime $X \subseteq \mathbf{R}^n$ simplu conexă care conţine o vecinătate a originii. Rezultatul următor este o condiţie suficientă ca $X \equiv X_a$.

Teorema 13 (Zubov). Fie $V(x)$ şi $W(x)$ două funcţii scalare cu următoarele proprietăţi:

1° $V(x)$ este definită, continuă şi pozitiv definită pe X şi satisface inegalitatea $0 < V(x) < 1$ pentru $x \in X$, $x \neq 0$;

2° $W(x)$ este definită pentru orice x finit, continuă şi pozitiv definită;

3° Pentru $x \in X$ are loc

$$\dot{V}(x) = -W(x)[1 - V(x)]\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}; \tag{3.26}$$

4° Dacă $x \in X$ şi x tinde la frontiera lui X (sau pentru X nemărginită $\|x\| \to \infty$) atunci $V(x) \to 1$.

Atunci X este exact mulţimea de atracţie X_a a sistemului (3.1).

D. Ipotezele 1°—3° asigură stabilitatea asimptotică a punctului de echilibru $x = 0$. Se introduce o nouă variabilă independentă prin

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \|f(x)\|^2}\,\mathrm{d}t, \tag{3.27}$$

unde ds este lungimea elementului de arc de traiectorie, fără ca aceasta să schimbe natura punctului de echilibru $x = 0$. Din (3.26) şi (3.27) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}s} = -W(x)[1 - V(x)],$$

care prin integrare conduce la

$$1 - V[x(s(t))] = [1 - V(x_0)]\,\mathrm{e}^{\int_0^{s(t)} W[x(s)]\,\mathrm{d}s}. \tag{3.28}$$

Dacă $x_0 \in X$ atunci $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$. Dacă $x_0 \notin X_a$ atunci, $\int_0^t W(x(t))\,\mathrm{d}t$ fiind nemărginită, pentru $t \to \infty$ exponenţiala din (3.28) creşte nemărginit, respectiv $1 - V[x(s(t)] \to +\infty$, ceea ce contrazice ipoteza 1°. În concluzie $X \equiv X_a$. ■

O consecinţă imediată a *teoremei 13* este următorul rezultat care permite determinarea exactă a mulţimii de atracţie.

Teorema 14. Fie $W(x)$ în ipotezele *teoremei 13* şi $V(x)$ pozitiv definită, cu $0 \leqslant V(x) \leqslant 1$, $x \in X$, şi

$$[\text{grad } V(x)]^T f(x) = - W(x)[1 - V(x)] \sqrt{1 + \|f(x)\|^2}. \quad (3.29)$$

Atunci frontiera mulţimii de atracţie este definită de ecuaţia

$$V(x) = 1. \quad (3.30)$$

Exemplul 3.7. Se consideră sistemul dinamic

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2kx_1^2x_2, & k \in \mathbf{R}, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Se cere să se determine mulţimea de atracţie a sistemului.

Conform ecuaţiei (3.29), în care ultimul factor din membrul drept poate fi omis dacă soluţia sistemului este definită pentru $t \in \mathbf{R}_+$, şi pentru $W(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)$, putem scrie

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(-x_1 + 2kx_1^2x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2)[1 - V(x)].$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$V(x_1, x_2) = 1 - e^{-\varphi(x_1, x_2)}, \quad \varphi(x_1, x_2) = \frac{x}{1 - kx_1x_2} + x_2^2.$$

Folosind ecuaţia (3.30) se obţine

$$kx_1x_2 = 1, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

care este frontiera mulţimii de atracţie.

3.2.5. Aplicaţie: sistem automat asimptotic stabil pentru o clasă de neliniarităţi

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* în care

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + as + b)}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (3.31)$$

şi $f(y)$ este o neliniaritate oarecare cu $f(0) = 0$. Ne propunem să determinăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească neliniaritatea astfel încît punctul de echilibru $y = 0$ să fie global asimptotic stabil.

Conform schemei bloc din fig. III.29, *a* şi funcţiei de transfer (3.31) ecuaţia diferenţială a sistemului are expresia

$$\dddot{y} + a\ddot{y} + b\dot{y} = -f(y). \quad (3.32)$$

Introducînd variabilele de stare $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ şi $x_3 = \ddot{y}$ din (3.32) se obţine

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -g(x_1)x_1 - bx_2 - ax_3, \end{cases} \tag{3.33}$$

în care prin

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} \tag{3.34}$$

s-a notat *factorul de amplificare neliniar.*

Vom construi o funcţie Liapunov prin metoda Schultz-Gibson. În conformitate cu (3.2) şi (3.25), pe baza ecuaţiilor (3.33) putem scrie

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + $$
$$+ a_{23}x_3)\, x_3 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,(-g(x_1)\,x_1 - bx_2 - ax_3).$$

Alegînd $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$ şi $a_{13} = a_{31}$ şi efectuînd calculele în expresia de mai sus se obţine

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = -a_{13}x_1^2 g(x_1) - (ba_{23} - a_{12})\, x_2^2 - (aa_{33} - a_{23})\, x_3^2 -$$
$$- (ba_{13} + a_{23}g(x_1) - a_{11})x_1x_2 - (aa_{23} + ba_{33} - a_{13} - a_{22})x_2x_3 -$$
$$- (aa_{13} + a_{33}g(x_1) - a_{12})x_1x_3. \tag{3.35}$$

Pentru simplificare şi în vederea satisfacerii condiţiilor (3.23) se adoptă $a_{11} = ag(x_1) + b^2$, $a_{12} = ab$, $a_{13} = b$, $a_{22} = a^2 + b$, $a_{23} = a$, $a_{33} = 2$, astfel că din (3.35) rezultă

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = -\,[bx_1^2 g(x_1) + ax_3^2 + 2x_1x_3 g(x_1)],$$

care mai poate fi pusă şi sub forma

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{a}\,(ab - g(x_1))x_1^2 g(x_1) - a\left(\frac{x_1}{a}\, g(x_1) + x_3\right)^2. \tag{3.36}$$

Se trage concluzia că $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$ este negativ semidefinită pentru $g(x_1) \leqslant ab$.

Utilizînd acum (3.24) vom determina funcţia $V(x_1, x_2, x_3)$. Cu particularizările adoptate pentru a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, avem

$$g_1 = [ag(x_1) + b^2]x_1 + abx_2 + bx_3$$

$$g_2 = abx_1 + (a^2 + b)x_2 + ax_3$$

$$g_3 = bx_1 + ax_2 + 2x_3,$$

care satisfac (3.23), astfel că din (3.24) rezultă

$$V(x_1, x_2, x_3) = a\int_0^{x_1} xg(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b^2x_1^2 + abx_1x_2 + \frac{1}{2}(a^2 + b)\,x_2^2 +$$

$$+ bx_1x_3 + ax_2x_3 + x_3^2 = a\int_0^{x_1} xg(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,x^TMx,$$

în care $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ şi

$$M = \begin{bmatrix} b^2 & ab & b \\ ab & a^2 + b & a \\ b & a & 2 \end{bmatrix}$$

Funcţia $V(x_1, x_2, x_3)$ este pozitiv definită dacă

$$g(x_1) > 0, \quad x_1 \in \mathbf{R}, \quad x_1 \neq 0, \tag{3.37}$$

şi dacă matricea M este pozitiv definită. Utilizînd criteriul Sylvester (v. anexa *D*) rezultă că M este pozitiv definită pentru orice $a > 0$, $b > 0$. În concluzie $V(x_1, x_2, x_3)$ este o funcţie Liapunov slabă.

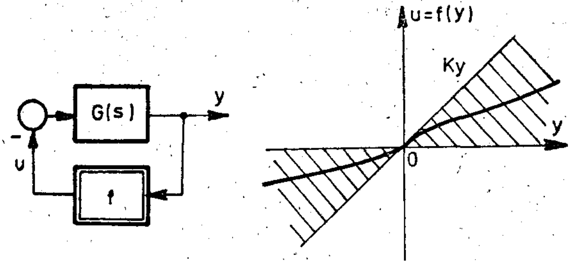
Examinînd (3.36) se observă că pentru

$$g(x_1) < ab, \quad x_1 \in \mathbf{R}, \tag{3.38}$$

$V(x_1, x_2, x_3)$ se poate anula pentru $x_1 = 0$ şi $x_3 = 0$. Întrucît acestea, conform ecuaţiilor (3.33), implică $x_2 = 0$, ţinînd seama de *teoremele 3 şi 4*, rezultă că punctul de echilibru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ este global asimptotic stabil. Din (3.34), (3.37) şi (3.38) se trage concluzia că rezultatul obţinut are loc pentru orice neliniaritate $u = f(y)$ care satisface *condiţia de sector*, fig. III.29, *b*,

$$0 < \frac{f(x_1)}{x_1} < ab = K, \quad x_1 \neq 0. \tag{3.39}$$

Avînd în vedere faptul că (3.39) este o condiţie suficientă se pune întrebarea dacă se pot găsi condiţii mai bune decît aceasta. Un rezultat



a b

Fig. III.29. *a* — Structura sistemului automat neliniar pentru abordarea *stabilității absolute*; *b* — Neliniaritatea de tip sector [0, K].

remarcabil în legătură cu condiția de sector (3.39) se obține în cazul în care $f(x_1)$ este liniară, adică în fig. III.29, *a* avem

$$u = ky, \quad k = \text{const.}$$

Ținînd seama de (3.31) ecuația polilor sistemului automat este

$$s^3 + as^2 + bs + k = 0.$$

Aplicînd criteriul Hurwitz (*teorema 5* de la II.1.1.2) se obține condiția necesară și suficientă de stabilitate asimptotică

$$0 < k < K.$$

Așadar sectorul (0, K), fig. III.29, *b*, este sectorul maximal în care sistemul automat liniar este asimptotic stabil, motiv pentru care se mai numește și *sectorul Hurwitz*.

Concluzia acestei aplicații este că dacă sectorul adoptat pentru $f(x_1)$ este mai mare decît sectorul Hurwitz atunci, în mod sigur, stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru nu mai are loc pentru *orice* neliniaritate din sector (ea poate avea loc eventual pentru *anumite* neliniarități). Dacă condiția (3.39) are loc numai pentru $|x_1| < c$, $c > 0$, nu se mai pot face afirmații privitoare la stabilitatea asimptotică globală, dar se pot obține rezultate de stabilitate asimptotică în mic.

3.3. Stabilitatea absolută

Din punctul de vedere al aplicațiilor ne interesează, mai ales în rezolvarea unor probleme de proiectare, determinarea unor condiții de stabilitate asimptotică globală pentru o clasă largă de neliniarități.

O astfel de clasă de neliniarități, semnificativă pentru aplicații, naturală din punct de vedere conceptual (punctul de plecare a fost *conjectura lui Aizerman*, [A6]; v. și 3.3.4) și deosebit de productivă în planul rezultatelor de stabilitate, este

$$C_{[0,K]} = \{f \in \bar{C}^{\circ};\quad 0 \leqslant \frac{f(y)}{y} \leqslant K,\quad y \neq 0\},\quad K > 0, \tag{3.40}$$

unde $\bar{C}^{\circ}$ este mulțimea funcțiilor scalare reale, continue pe porțiuni. Se spune că neliniaritățile din $C_{[0,K]}$ satisfac condiția de sector $[0, K]$, fig. III.29, *b*.

În afara clasei $C_{[0,K]}$ se mai definesc, în mod asemănător și pentru motive care vor fi clarificate în cele ce urmează, și clasele $C_{[\varepsilon,K]}$, unde $\varepsilon > 0$ este un număr arbitrar de mic, $C_{(0,K)}$ și $C_{(0,+\infty)}$.

Clasele de neliniarități definite mai sus și necesitatea ca sistemul automat cu schema bloc structurală din fig. III.29, *a*, în care $G(s)$ este funcția de transfer a părții liniare, să se caracterizeze prin soluția $y = 0$ global asimptotic stabilă au condus la formularea conceptului din definiția următoare.

Definiția 5. Sistemul automat cu structura din fig. III.29, *a* se numește ***absolut stabil*** dacă soluția $y = 0$ este global asimptotic stabilă pentru orice $f \in C_{[0,K]}$ ($C_{[\varepsilon,K]}$, $C_{(0,K)}$ sau $C_{(0,+\infty)}$).

3.3.1. Problema lui Lurie

O abordare clasică în spiritul *definiției 5* a fost problema lui Lurie, [L 4], care a avut la origine o problemă de proiectare din domeniul aviației. Pe scurt această problemă a constat în următoarele.

Fie (A, b, c) o realizare minimală (de ordinul n) a funcției $G(s)$, fracție rațională cu gradul numitorului mai mare ca gradul numărătorului (aceasta înseamnă că perechea (A, b) este complet controlabilă, perechea (A, c) este complet observabilă și $G(s) = c(Is - A)^{-1}b$). În aceste condiții, conform fig. III.29, *a*, ecuațiile sistemului automat sînt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - bu, & t &\in \mathbf{R}_+, & x &\in \mathbf{R}^n,\\ y &= cx, & y &\in \mathbf{R}, & &\\ u &= f(y), & u &\in \mathbf{R}, & & \end{aligned} \tag{3.41}$$

în care f este o funcție continuă situată în sectorul $(0, +\infty)$.

Utilizîndu-se o funcție Liapunov de forma

$$V(x, y) = x^T P x + \int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.42}$$

în care P este o matrice reală pozitiv definită, se pot demonstra următoarele rezultate.

Teorema 15. O condiţie necesară şi suficientă ca $V(x, y)$, asociată sistemului (3.41), cu A matrice hurwitziană şi f funcţie continuă situată în sectorul $(0, +\infty)$ să fie o funcţie Liapunov tare este ca

$$cb > \left(Pb - \frac{1}{2} A^T c^T\right)^T Q^{-1} \left(Pb - \frac{1}{2} A^T c^T\right), \tag{3.43}$$

unde $Q = -(PA + A^T P)$ este o matrice reală pozitiv definită.

Teorema 16. Dacă matricea A este hurwitziană, $\int_0^{\pm\infty} f(y)\,\mathrm{d}y$ este divergentă şi inegalitatea (3.43) este satisfăcută atunci sistemul (3.41) este absolut stabil.

Chestiunea care trebuia efectiv rezolvată era aceea a determinării elementelor matricii linie c, de reacţie după starea părţii liniare, care asigură stabilitatea absolută a sistemului automat. O rezolvare riguroasă este posibilă prin utilizarea transformărilor canonice Lurie-Letov, [C 3]. O cale mai simplă pentru obţinerea unei soluţii constă în a fixa pentru produsul cb o anumită valoare $r > 0$, adică $cb = r$, şi a adopta factorizarea $Q = R^T R$, unde R este o matrice pătratică nesingulară. În aceste condiţii inecuaţia (3.43) admite soluţia

$$c = 2(b^T P + \sqrt{r} v^T R) A^{-1},$$

în care v este un vector arbitrar, cu $v^T v < 1$.

3.3.2. Criteriul Popov

În prima sa formă, criteriul Popov, [P 4], a dat o rezolvare total diferită, şi anume în domeniul frecvenţelor, a problemei lui Lurie şi totodată în ipoteze mai largi, în sensul că $G(s)$ poate avea un pol în origine, restul polilor fiind situaţi în $\operatorname{Re} s < 0$. Ulterior domeniul de aplicabilitate s-a lărgit şi anume pentru neliniarităţi din $C_{[0, K]}$, $C_{[\varepsilon, K]}$ etc. şi număr arbitrar de poli în origine, stabilindu-se conexiuni cu metoda directă Liapunov.

Fie sistemul automat neliniar cu schema bloc structurală din fig. III.29, *a* în care funcţia de transfer a subsistemului liniar, de stare complet controlabilă şi complet observabilă, are forma

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + 1}{a_n s_n + \ldots + a_1 s + 1}. \tag{3.44}$$

Coeficienţii a_i, b_j sînt numere reale; $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ şi $\alpha + n > m$. Coeficientul de amplificare s-a considerat 1, urmînd ca factorul de amplificare al buclei să fie luat în considerare în neliniaritatea $f(y)$.

Din punctul de vedere al distribuţiei polilor lui $G(s)$ în planul complex se disting următoarele două cazuri.

a) *Cazul principal:* toţi polii lui $G(s)$ sînt situaţi în semiplanul $\mathrm{Re}\, s < 0$.

b) *Cazul critic:* cel puţin un pol se află pe axa imaginară $\mathrm{Re}\, s = 0$, iar restul polilor sînt situaţi în semiplanul $\mathrm{Re}\, s < 0$.

Raţiunea acestei distincţii îşi are originea în modul în care a fost definită clasa de neliniarităţi $C_{[0, K]}$. Este evident că dacă sectorul adoptat este $[0, K]$ atunci este posibil să se aleagă $f(y) \equiv 0$, ceea ce înseamnă că sistemul din fig. III.29, *a* este deschis, funcţionalitatea fiindu-i asigurată numai de partea liniară. În cazul critic partea liniară nu poate fi asimptotic stabilă şi ca urmare nu se poate pune problema stabilităţii absolute în cazul sectorului $[0, K]$. Pentru eliminarea acestui inconvenient în cazul critic se va avea în vedere clasa de neliniarităţi $C_{[\varepsilon, K]}$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic. Abordarea în acest mod a cazului critic implică necesitatea asigurării stabilităţii asimptotice globale pentru cazul $f(y) = \varepsilon y$ (cazul liniar), cu $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.

Definiţia 6. Sistemul automat neliniar cu schema bloc din fig. II.29, *a*, cu $G(s)$ în cazul critic şi $f(y) = \varepsilon y$, se numeşte *ε-stabil* dacă el este asimptotic stabil pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.

Pentru cazurile uzuale ($\alpha = 1, 2$) condiţiile ca sistemul automat cu structura din fig. III.29, *a* să fie ε-stabil sînt uşor de realizat.

Dacă $\alpha = 1$ locul de transfer $\varepsilon G(j\omega)$ începe, pentru $\omega = +0$, la $-\infty$ şi pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic punctul $(-1, j0)$ rămîne în afară şi la stînga locului de transfer. Conform *teoremei 7* de la II.3.2.1, sistemul automat este ε-stabil.

Dacă $\alpha = 2$, pentru $s = j\omega$ din (3.44) rezultă

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\,\frac{(1 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \ldots) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \ldots)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots)},$$

care pentru $\omega > 0$ foarte mic poate fi aproximată prin

$$G(j\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2}\,\frac{1 + jb_1\omega}{1 + ja_1\omega} = -\frac{1}{\omega^2}\,\frac{1 + a_1 b_1\omega^2 + j\omega(b_1 - a_1)}{1 + a_1^2\omega^2}.$$

Este vizibil că pentru $\omega > 0$ foarte mic avem

$$\mathrm{Re}\, \varepsilon G(j\omega) \approx -\frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad \mathrm{Im}\, \varepsilon G(j\omega) \approx -\varepsilon\,\frac{b_1 - a_1}{\omega}.$$

Pentru ca sistemul să fie ε-stabil, respectiv pentru satisfacerea condițiilor din *teorema 7* de la II.3.2.1, este necesar și suficient ca

$$a_1 < b_1. \tag{3.45}$$

Înainte de a enunța criteriul Popov să justificăm de ce $G(s)$ nu poate avea poli în semiplanul $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Dacă $G(s)$ ar avea poli în $\mathrm{Re}\, s > 0$ atunci, pentru $f(y) = \varepsilon y$, *locul rădăcinilor* sistemului cu structura din fig. III.29, *a* ar avea ramuri în $\mathrm{Re}\, s > 0$, care, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, nu pot părăsi respectivul semiplan. Ca urmare, pentru $f \in C_{[\varepsilon, K]}$ nu se poate pune problema stabilității absolute a sistemului automat.

Teorema 17 (Popov). Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a*, în care $G(s)$ satisface ipotezele specificate și $f \in C_{[0, K]}$ — în cazul principal, în care este posibil și $K = +\infty$, sau $f \in C_{[\varepsilon, K]}$ — în cazul critic, în care sistemul este ε-stabil și K este finit. Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încît are loc inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,[(1 + \mathrm{j}q\omega)\, G(\mathrm{j}\omega)] > -\frac{1}{k}, \quad \omega \geqslant 0. \tag{3.46}$$

Pentru demonstrația acestei condiții suficiente de stabilitate absolută indicăm consultarea lucrării [P 4].

În cazul critic pentru $K = +\infty$ s-a demonstrat următorul rezultat, [A 7].

Teorema 18. Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* în care $G(s)$ are un pol în origine ($\alpha = 1$), restul polilor fiind în semiplanul $\mathrm{Re}\ s < 0$ și $f \in C_{(0, +\infty)}$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încît are loc inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,[(1 + \mathrm{j}q\omega)\, G(\mathrm{j}\omega)] \geqslant 0, \quad \omega \geqslant 0. \tag{3.47}$$

Criteriul Popov a fost extins, [P 5], și pentru cazul în care $G(s)$ conține un element cu timp mort.

Teorema 19. Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* în care partea liniară este $G(s)\, \mathrm{e}^{-Ts}$, $T > 0$, cu $G(s)$ în cazul principal și f este continuă cu $f \in C_{[0, K]}$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q > 0$ astfel încît are loc inegalitatea (3.46).

Alte rezultate aplicabile sistemelor cu timp mort se găsesc în [R 2].

Exemplul 3.8. Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* cu $f \in C_{(0,\,+\infty)}$ şi

$$G(s) = \frac{b_1 s + 1}{s(a_1 s + 1)}, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0.$$

Se cere să se studieze dacă sistemul este absolut stabil.

În acest caz se poate aplica *teorema 18.* În conformitate cu (3.47) putem scrie

$$\frac{q a_1 b_1 \omega^2 + q + b_1 - a_1}{a_1^2 \omega^2 + 1} \geqslant 0, \quad \omega \geqslant 0.$$

Alegînd $q \geqslant \max(0,\ a_1 - b_1)$ inegalitatea de mai sus are loc pentru orice $\omega \geqslant 0$, ceea ce înseamnă că sistemul considerat este absolut stabil pentru $f \in C_{(0,\,+\infty)}$.

Forma inegalităţilor (3.46) şi (3.47) a readus în mod natural în actualitate noţiunea de *funcţie real pozitivă* (utilizată din deceniul 4 în teoria circuitelor electrice), care la rîndul ei a contribuit la introducerea noţiunii de hiperstabilitate (v. IV.3.1).

Definiţia 7. Fracţia raţională $F(s)$ se numeşte real pozitivă dacă

1° nu are nici un pol în $\operatorname{Re} s > 0$;

2° polii de pe axa imaginară (atunci cînd există) sînt simpli şi reziduurile corespunzătoare sînt reale şi pozitive;

3° $\operatorname{Re} F(j\omega) \geqslant 0$ pentru toţi $\omega \geqslant 0$.

Teorema 20. Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* în care f este continuă şi $f \in C_{(0,\,K)}$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încît funcţia

$$F(s) = (1 + qs)\,G(s) + \frac{1}{K} \tag{3.48}$$

este real pozitivă.

Două demonstraţii diferite al acestei teoreme se găsesc în [S 4] şi respectiv în [W 3].

În aplicaţii este deci necesar să se verifice condiţiile 1°, 2° şi 3° din *definiţia 7.* Condiţia 3° este asemănătoare cu (3.46) şi (3.47). Se poate demonstra că 1° şi 2° sînt echivalente cu condiţia ca polinomul $P(s)+Q(s)$ să fie hurwitzian, unde $F(s) = Q(s)/P(s)$; pentru $F(s)$ de forma (3.48) această condiţie trebuie să aibă loc pentru acelaşi q pentru care condiţia 3° este satisfăcută.

3.3.3. Forma grafică a criteriului Popov

Efectuînd calculele în membrul stîng al inegalității (3.46) pentru $G(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega)$ se obține

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} G(j\omega) > -\frac{1}{K}. \tag{3.49}$$

Introducînd variabilele

$$v = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad w = \omega \operatorname{Im} G(j\omega), \quad \omega \geqslant 0, \tag{3.50}$$

se definește hodograful

$$G_P(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} G(j\omega), \quad \omega \geqslant 0, \tag{3.51}$$

numit *locul Popov*, și dreapta

$$v - qw + \frac{1}{K} = 0, \tag{3.52}$$

numită *dreaptă Popov*.

Dacă inegalitatea (3.49) are loc atunci cu (3.50) ea devine

$$v - qw + \frac{1}{K} > 0. \tag{3.53}$$

Dreapta Popov are panta $1/q$ și tăieturile $(-1/K, 0)$ și $(0, 1/Kq)$, fig. III.30. Punctele din planul (v, w) situate la dreapta dreptei Popov satisfac inegalitatea (3.53).

Pentru verificarea grafică a condiției (3.49) se procedează în modul următor: se trasează în planul (v, w) locul Popov (3.51) și în punctul $(-1/K, 0)$ se trasează o dreaptă Popov de pantă $1/q$ astfel aleasă încît locul Popov să rămînă în întregime la dreapta ei, fig. III.30; dacă și celelalte ipoteze din *teorema 17* sînt satisfăcute atunci sistemul automat neliniar considerat este absolut stabil.

Este evident că punctul $(-1/K, 0)$ fiind dat pot exista o infinitate de drepte Popov pentru care locul Popov rămîne complet la dreapta lor. Dacă nu există o dreaptă Popov, respectiv nu există nici un $q \in \mathbf{R}$, astfel încît locul

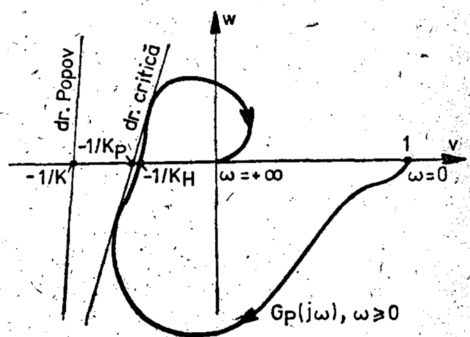


Fig. III.30. Forma grafică a criteriului Popov.

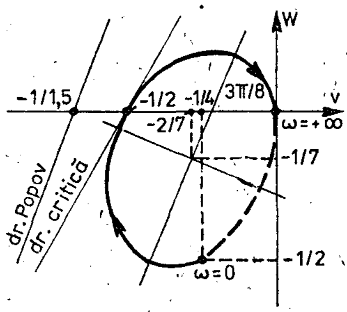


Fig. III.31. Aplicarea criteriului Popov la *exemplul 3.9.*

Popov să rămînă în întregime la dreapta, *teorema 17* nu se poate aplica, dar aceasta nu implică faptul că sistemul automat neliniar considerat nu poate fi absolut stabil (condiţia (3.49) nu este şi necesară).

Exemplul 3.9. Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* în care $f \in C_{[\varepsilon,1,5]}$ şi

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+s+2)}.$$

Se cere să se afle dacă sistemul este absolut stabil.

În conformitate cu (3.50) şi (3.51) locul Popov este descris de ecuaţiile parametrice:

$$v = -\frac{1}{(\omega^2-2)^2+\omega^2}, \quad w = \frac{\omega^2-2}{(\omega^2-2)^2+\omega^2}, \quad \omega \geqslant 0.$$

Eliminînd $\omega^2 = 2 - w/v$ între aceste ecuaţii se obţine

$$2v^2 + w^2 - vw + v = 0,$$

care reprezintă ecuaţia unei elipse cu centrul în punctul $(-2/7, -1/7)$, cu axa mare rotită cu $3\pi/8$ care trece prin punctele $(0,0)$ şi $(-1/2,0)$, fig. III.31. În aceste condiţii prin punctul $(-1/1{,}5, 0)$ se pot duce o infinitate de drepte Popov. Întrucît sistemul este şi ε-stabil, conform *teoremei 17* sistemul automat considerat este absolut stabil.

Cu ajutorul inegalităţii (3.46) sau pe cale grafică se poate determina valoarea maximă K_P a lui K pentru care dreapta Popov este tangentă la locul Popov, fig. III.30.

Aceasta se numeşte *dreapta critică.* Întrucît pentru dreapta critică condiţia (3.49) nu are loc pentru toţi $\omega \geqslant 0$ rezultă că neliniaritatea se poate situa în sectorul $[0, K_P)$ sau $[\varepsilon, K_P)$, numit *sectorul Popov.* În cazul critic sectorul Popov poate fi şi $[\varepsilon, K_P]$, dar numai dacă locul Popov nu trece prin punctul $(-1/K_P, 0)$, [A 7]. În cazul sistemului de la *exemplul 3.9* sectorul Popov este $[\varepsilon, 2)$, fig. III.31.

Procedeul de verificare grafică expus mai sus se poate aplica şi în cazul *teoremelor 18—20.* În cazul *teoremei 18* dreapta Popov trece prin originea planului (v, w). În cazul *teoremei 20* trebuie să se verifice condiţiile 1°, 2° şi 3° din *definiţia 7.* Condiţia 3° fiind asemănătoare cu (3.46), procedura de verificare grafică rămîne în fond aceeaşi, cu deosebirea că dreapta Popov poate fi şi tangentă la locul Popov.

3.3.4. Conjectura Aizerman

Procedînd ca în finalul aplicației de la 3.2.5 vom considera $f(y) = ky$, $k \geqslant 0$, adică în fig. III.29, a $u = ky$. Sistemul automat fiind liniar, pentru studiul stabilității se poate aplica criteriul Hurwitz *(teorema 5* de la II.1.1.2) sau criteriul Nyquist *(teorema 7* de la II.3.2.1). Tăietura hodografului $kG(j\omega)$, $\omega \geqslant 0$, pe semiaxa reală negativă (așadar pentru $\operatorname{Im} G(j\omega_0) = 0$) este $kG(j\omega_0) = k \operatorname{Re} G(j\omega_0) = -k/K_H$, unde $K_H = -1/\operatorname{Re} G(j\omega_0)$. Avînd în vedere ipotezele pe care le satisface $G(s)$, aplicînd criteriul Nyquist, rezultă că pentru stabilitatea absolută în cazul $f(y) = ky$ este necesar și suficient ca $-1 < -k/K_H$, respectiv

$$k < K_H. \tag{3.54}$$

Evident constanta K_H definește sectorul $[0, K_H)$, respectiv $[\varepsilon, K_H)$, numit, în virtutea proprietăților sale, *sectorul Hurwitz*.

Avînd în vedere modul în care a fost definit K_H rezultă că el poate fi pus în evidență și cu ajutorul locului Popov. Într-adevăr, pentru $\operatorname{Im} G(j\omega_0) = 0$ în (3.51) se obține $G_P(j\omega_0) = \operatorname{Re} G(j\omega_0) = -1/K_H$, ceea ce înseamnă că tăietura locului Popov pe semiaxa reală are abscisa $-1/K_H$, fig. III.30.

Dacă sistemul automat neliniar trebuie să fie absolut stabil atunci, în mod evident, el trebuie să fie absolut stabil și în cazul particular $f(y) = ky$. Se trage concluzia că (3.54) este o condiție necesară de stabilitate absolută, sau cu alte cuvinte sectorul $[0, K]$ (respectiv $[\varepsilon, K]$) nu poate fi nici într-un caz mai mare ca sectorul Hurwitz $[0, K_H)$ (respectiv $[\varepsilon, K_H)$).

Pornind de la faptul că pentru unele sisteme automate neliniare cu $G(s)$ de ordin redus sectorul maxim de stabilitate absolută coincide cu sectorul Hurwitz (în sensul $\sup\,[0, K] = K_H$, respectiv $\sup\,[\varepsilon, K] = K_H$), Aizerman, [A 6], a enunțat următoarea conjectură: *sectorul maximal de stabilitate absolută coincide întotdeauna cu sectorul Hurwitz*. După cum s-a arătat ulterior, această afirmație este adevărată numai în unele cazuri cum ar fi: $G(s)$ de ordinul doi, de ordinul trei cu cel mult un zerou finit, de ordinul patru fără zerouri finite și cu poli complex conjugați suficient de îndepărtați de axa imaginară, de ordin oarecare cu toți polii reali negativi și fără zerouri finite. În toate aceste cazuri studiul stabilității absolute se poate face cu ajutorul criteriului Nyquist și anume în sensul determinării sectorului Hurwitz. Dacă $[0, K] \subset [0, K_H)$, respectiv $[\varepsilon, K] \subset [\varepsilon, K_H)$ atunci sistemul automat considerat este absolut stabil.

Exemplul 3.10. Să se verifice conjectura Aizerman pentru sistemul de la *exemplul 3.9.* Conform fig. III.31 tăietura locului Popov $G_P(j\omega)$, respectiv a locului de transfer $G(j\omega)$ pe semiaxa reală negativă are loc în punctul $(-1/2,\ 0)$, ceea ce înseamnă $K_H = 2$. Întrucît prin același punct trece și dreapta critică, rezultă $K_P = 2$. Sectorul Popov coincide cu sectorul Hurwitz; se trage concluzia că sectorul Hurwitz este sectorul maxim de stabilitate absolută, ceea ce implică valabilitatea conjecturii Aizerman.

3.3.5. Criteriul cercului

O extensie a criteriului Popov s-a realizat prin considerarea clasei de funcții

$$C_{[K_1,\,K_2]} = \left\{ f \in \bar{C}^\circ;\quad K_1 \leqslant \frac{f(y)}{y} \leqslant K_2,\quad y \neq 0 \right\},$$

unde $K_1 < K_2$ sînt două constante reale, pentru care se poate formula o definiție asemănătoare cu *definția 5.*

Problema stabilității absolute a sistemului automat neliniar cu structura din fig. III.29, *a* a fost abordată în două moduri.

Primul constă în transformarea schemei bloc din fig. III.29, *a* prin introducerea variabilei

$$\tilde{u} = u - K_1 y \tag{3.55}$$

și a neliniarității

$$\tilde{f}(y) = f(y) - K_1 y, \tag{3.56}$$

care satisface condiția

$$\tilde{f} \in C_{[0,\ K_2-K_1]} \quad \text{sau} \quad \tilde{f} \in C_{[\varepsilon,\ K_2-K_1]}.$$

Întrucît

$$Y(s) = -G(s)\,U(s), \tag{3.57}$$

prin înlocuirea relației (3.55), luată în transformate Laplace, în (3.57) se obține

$$Y(s) = \tilde{G}(s)\,\tilde{U}(s), \tag{3.58}$$

unde

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + K_1 G(s)}. \tag{3.59}$$

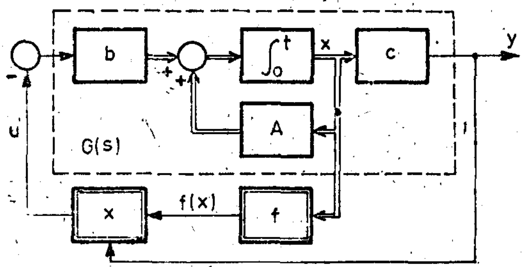


Fig. III.32. Structura sistemului automat neliniar pentru *teorema 21* (criteriul cercului).

În acest fel s-a obținut un nou sistem automat neliniar cu schema bloc structurală de forma celei din fig. III.29, *a*, dar în care partea liniară este (3.59) și partea neliniară are expresia (3.56) cu condiția de sector $[0, K_2 - K_1]$ sau $[\varepsilon, K_2 - K_1]$. Pe această cale problema stabilității absolute pentru clasa de neliniarități $C_{[K_1, K_2]}$ se reduce la aplicarea *teoremelor 17—20.*

Al doilea mod de abordare este legat de o modificare structurală în schema bloc a sistemului automat neliniar și anume: pentru $G(s)$ se consideră realizarea minimală de ordinul n

$$\dot{x} = Ax - bu, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.60}$$

$$y = cx, \quad y \in \mathbf{R}, \tag{3.61}$$

iar reacția neliniară este de forma, fig. III.32,

$$u = f(x)\, y, \tag{3.62}$$

unde $f(x)$ este o funcție scalară de starea x și satisface condiția

$$K_1 < f(x) < K_2, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{3.63}$$

Teorema 21. Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.32 în care partea liniară este descrisă de (3.60), (3.61), cu $G(s) = c(Is - A)^{-1}b$, și partea neliniară este de forma (3.62), cu (3.63).

Atunci sistemul automat neliniar are punctul de echilibru $y = 0$ global asimptotic stabil dacă funcția

$$F(s) = \frac{K_2 G(s) + 1}{K_1 G(s) + 1} \tag{3.64}$$

este real pozitivă.

Foarte interesantă este forma grafică a *teoremei 21*, care justifică de altfel și numele sub care este cunoscută.

Din condiția 3° a *definiției 7*, ținînd seama de (3.64), se obține

$$\mathrm{Re}\,\frac{K_2G(\mathrm{j}\omega)+1}{K_1G(\mathrm{j}\omega)+1}\geqslant 0,\quad \omega\geqslant 0. \tag{3.65}$$

Înlocuind mai sus $G(\mathrm{j}\omega)=v(\omega)+\mathrm{j}w(\omega)$, după calcule relativ simple, rezultă inecuația

$$K_1K_2(v^2+w^2)+(K_1+K_2)v+1\geqslant 0. \tag{3.66}$$

Din punct de vedere geometric, în planul $(v,\ w)$, inecuația (3.66) reprezintă un disc circular D cu centrul

$$C(-(K_1+K_2)/2K_1K_2,\ \ \mathrm{j}0), \tag{3.67}$$

de rază $r=(K_2-K_1)/2K_1K_2$ și care are punctele $(-1/K_1,\ \mathrm{j}0)$ și $(-1/K_2,\ \mathrm{j}0)$ diametral opuse.

Condiția (3.66) este echivalentă cu aceea ca locul de transfer $G(\mathrm{j}\omega)$, $\omega\geqslant 0$, să rămînă în întregime în exteriorul discului D dacă $K_1K_2>0$ și să fie în întregime situat în interiorul discului D dacă $K_1K_2<0$.

În afară de condiția 3° mai trebuie să fie satisfăcute și condițiile 1° și 2° din *definiția 7*. După cum s-a arătat, acestea pot fi înlocuite cu aceea ca polinomul $G(s)+\dfrac{1}{K_1}+G(s)+\dfrac{1}{K_2}$ să fie hurtwitzian. Întrucît zerourile acestui polinom coincid cu polii fracției

$$\frac{G(s)}{\dfrac{K_1+K_2}{2K_1K_2}+G(s)}$$

se poate aplica criteriul Nyquist *(teorema 6* de la II.3.2.1*)* utilizînd tot hodograful $G(\mathrm{j}\omega)$. Condițiile 1° și 2° din *definiția 7* sînt satisfăcute dacă și numai dacă locul de transfer $G(\mathrm{j}\omega)$ înconjoară punctul C, relația (3.67), în sens pozitiv de $\left(n_+ + \dfrac{1}{2}\,n_0\right)$ ori atunci cînd ω crește de la $-\infty$ a $+\infty$, unde n_+ și n_0 sînt numerele de poli ai lui $G(s)$ în semiplanul $\mathrm{Re}\,s>0$ și respectiv pe axa $\mathrm{Re}\,s=0$.

Avînd în vedere toate aceste caracterizări de natură grafică se poate enunța o formă echivalentă a *teoremei 21*.

Teorema 22 (criteriul cercului). Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III.32, în care partea liniară este descrisă de (3.60), (3.61), cu $G(s) = c(Is - A)^{-1}b$ şi avînd n_+ poli în Re $s > 0$, respectiv n_0 poli pe Re $s = 0$, şi partea neliniară este de forma (3.62), cu (3.63). Atunci sistemul automat neliniar are punctul de echilibru $y=0$ global asimptotic stabil dacă locul de transfer $G(j\omega)$ înconjoară centrul discului (3.66) în sens pozitiv de $\left(n_+ + \frac{1}{2} n_0\right)$ ori atunci cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$ şi pentru $K_1K_2 > 0$ ($K_1K_2 < 0$) este complet în exteriorul (interiorul) discului (3.66).

Criteriul cercului constituie, într-un anumit sens, o generalizare a criteriului Nyquist deoarece pentru $K_2 \to K_1$ primul reproduce partea suficientă a celui de al doilea.

Teorema 22 rămîne valabilă şi pentru cazul în care funcţia f depinde şi de timp şi ea se aplică în special pentru determinarea constantelor K_1 şi K_2, care dau o formă concretă condiţiei (3.63), prin trasarea în planul locului de transfer $G(j\omega)$, dacă este posibil, a unor cercuri cu centrul pe axa reală astfel încît să fie satisfăcute condiţiile *teoremei 22*.

Exemplul 3.11. Se consideră un servosistem de poziţionare cu structura din fig. III.32 în care $G(s) = \dfrac{1}{s(s+a)}$, cu $a > 0$ şi neliniaritatea (traductorul de poziţie) se caracterizează prin sensibilitatea

$$f(y, \dot{y}) = k + \varepsilon g(y, \dot{y}).$$

Funcţia $g(y, \dot{y})$, care satisface condiţia de mărginire

$$g(y, \dot{y}) \leq 1, \quad (y, \dot{y}) \in \mathbf{R}^2,$$

evidenţiază erorile sistematice, constructive şi aleatoare pe care le introduce în regim dinamic traductorul de poziţie.

Se cere să se determine în planul parametrilor $k > 0$ şi $\varepsilon \in \mathbf{R}$ domeniul pentru care $y = 0$ este global asimptotic stabilă.

Locul de transfer $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$ este reprezentat în fig. III.33. Toate cercurile care se pot trasa la stînga verticalei $-1/a^2$ pot avea diametre arbitrar de mari. Asimptota însăşi este un cerc de diametru infinit. În aceste condiţii $y = 0$ este global asimptotic stabilă dacă $0 < f(y, \dot{y}) < a^2$. Această dublă inegalitate este satisfăcută pentru $k > |\varepsilon|$ şi $k < a^2 - |\varepsilon|$, cu $|\varepsilon| < a^2$, domeniul D' în fig. III.34.

Pentru cercurile care pot fi tangente la locul de transfer $G(j\omega)$ diametrele cresc pe măsură ce centrele lor se îndepărtează de origine, spre stînga. Considerînd $K_1 = k - |\varepsilon|$ şi $K_2 = k + |\varepsilon|$ şi ţinînd seama că

$$v(\omega) = \mathrm{Re}\, G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + a^2}, \quad w(\omega) = \mathrm{Im}\, G(j\omega) = -\frac{a}{\omega(\omega^2 + a^2)},$$

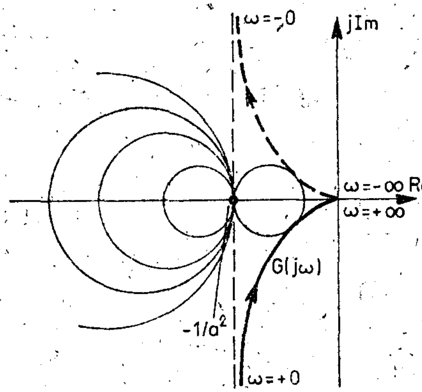


Fig. III.33. Aplicarea criteriului cercului la *exemplul 3.11.*

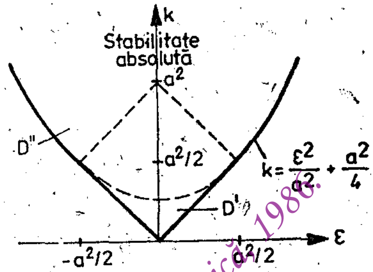


Fig. III.34. Domeniul parametric de stabilitate absolută la *exemplul 3.11.*

din (3.66) rezultă

$$\omega^4 + (a^2 - 2k)\,\omega^2 + k^2 - \varepsilon^2 \geq 0, \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Această inecuație este satisfăcută pentru orice $\omega \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $k \geq \varepsilon^2/a^2 + a^2/4$. Întrucît de fapt $K_1 < f(y, y') < K_2$, rezultă că domeniul corespunzător este $k > \varepsilon^2/a^2 + a^2/4$, domeniul D'' în fig. III.34. Soluția căutată este în mod evident $D' \cup D''$, fig. III.34.

3.3.6. Criteriul Popov pentru sisteme discrete

Schema bloc structurală a unui sistem automat neliniar discret are în principiu forma din fig. III.29, *a*, în care partea liniară conține structural și un element de eșantionare-memorare cu perioada T (v. I.1.4.8). Ca urmare partea liniară se caracterizează prin funcția de transfer în z $G(z)$ sau prin $G^*(s) = G(z)|_{z=e^{Ts}}$ (v. anexa B).

Primul rezultat care a extins criteriul Popov la cazul sistemelor discrete este următorul, [T 2].

Teorema 23 (Țîpkin). Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. III. 29, *a* în care partea liniară este descrisă de $G^*(s)$, corespunzătoare funcției de transfer $G(s)$ care are toți polii în $\mathrm{Re}\, s < 0$, și $f \in C_{(0,K)}$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă

$$\operatorname{Re} G^*(j\omega) + \frac{1}{K} > 0, \quad \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{T}\right]. \tag{3.68}$$

Este evident că acest rezultat este, într-un anume sens, și o extindere a criteriului Nyquist pentru sisteme discrete (v. *teorema 12* de la II.3.4.1).

Pentru cazul în care $G(s)$ are poli și în $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ s-a obținut un rezultat de stabilitate absolută, dar pentru $f \in C_{(K_1, K_2)}$. Condiția frecvențială (3.68) se aplică acum funcției

$$\widetilde{G}^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + K_1 G^*(s)},$$

care se obține exact în același mod în care a fost obținută funcția (3.59) și anume prin introducerea variabilei

$$\widetilde{u}^*(t) = u^*(t) - K_1 y^*(t)$$

și a neliniarității

$$\widetilde{f}(y^*) = f(y^*) - K_1 y^*.$$

În acest fel $\widetilde{f} \in C_{(0, K)}$, unde $K = K_2 - K_1$.

Dacă $G(s)$ nu are poli în $\operatorname{Re} s > 0$, K_1 este posibil să fie arbitrar de mic ceea ce înseamnă că se poate considera sectorul $(0, K)$ și să se aplice condiția frecvențială (3.68).

Exemplul 3.12. Se consideră un servosistem de poziționare în care partea liniară conține un servomotor cu funcția de transfer $G(s) = \dfrac{1}{s(s+a)}$, cu $a > 0$, precedat de un element de eșantionare cu perioada T, și partea neliniară este $f \in C_{(K_1, K_2)}$.

Se cere să se determine constantele K_1, K_2.

După cum se știe funcția de transfer în z corespunzătoare lui $G(s)$ este (v. anexa **B**)

$$G(z) = \frac{(1 - e^{-aT})\, z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}.$$

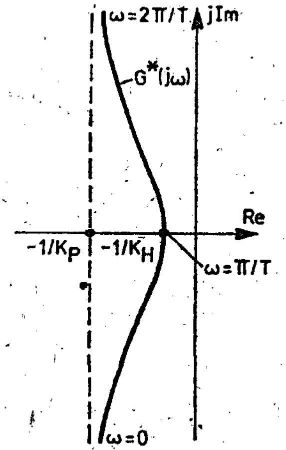


Fig. III.35. Aplicarea criteriului Ţîpkin la *exemplul* 3.12.

Înlocuind neliniaritatea cu un element liniar de forma $f(y^*) = ky^*$, sistemul automat liniar se caracterizează prin polinomul polilor

$$\Delta(z) = z^2 - \left(1 + e^{-aT} - k\,\frac{1 - e^{-aT}}{a}\right) z + e^{-aT}.$$

Utilizînd criteriul Jury-Blanchard *(teorema 17* de la II.1.2.3.*)* se obţine condiţia de stabilitate asimptotică

$$0 < k < K_H = \frac{2a(1 + e^{-aT})}{1 - e^{-aT}}.$$

Se deduce că se poate adopta K_1 arbitrar de mic şi $K_2 \leqslant K_H$. În aceste condiţii $f \in C_{(0,K_2)}$ şi se poate folosi condiţia frecvenţială (3.68). Putem scrie

$$G^*(j\omega) = \frac{(1 - e^{-aT})\, e^{jT\omega}}{a(e^{jT\omega} - 1)(e^{jT\omega} - e^{-aT})}.$$

Hodograful corespunzător este reprezentat în fig. III.35.

Întrucît

$$\min_{0 \leqslant \omega \leqslant \pi} \operatorname{Re} G^*(j\omega) = \operatorname{Re} G^*(j\omega)\,|_{\omega=0} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{(\cos T\omega - e^{-aT})\, e^{-aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT}\cos T\omega}\right)\Bigg|_{\omega=0} = -\frac{1 + e^{-aT}}{2a(1 - e^{-aT})} = -\frac{1}{K_P},$$

din (3.68) se obţine

$$K_2 < K_P < K_H.$$

3.4.7. Stabilitatea absolută pe componente

Se consideră sistemul dinamic descris de ecuaţia

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.69}$$

cu condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$ şi punctul de echilibru $x = 0$.

În conformitate cu atributele uzuale ale sistemelor dinamice se poate afirma că starea x a sistemului (3.69) trebuie să evolueze, de regulă, numai într-o submulţime compactă (închisă şi mărginită) $X \subset \mathbf{R}^n$. O caracterizare în acest sens a sistemelor dinamice liniare constante pe baza *metodei invarianţei de flux*, [P 3—4], a făcut obiectul lucrărilor [V 2—8]. Vom arăta în continuare că este posibilă extinderea respectivei caracterizări şi pentru sistemul neliniar (3.69) [V 13].

Pentru abordarea problemei de mai sus și pentru prezentarea rezultatelor într-o formă concisă se fac mai întîi cîteva convenții privitoare la notații și se definesc elementele necesare tratării problemei propuse. Fie $v = (v_i)$ și $w = (w_i)$ doi vectori din $\mathbf{R}^n$. Se notează prin $|v|$ vectorul cu componentele $|v_i|$ și prin $v \leqslant w$ ($v < w$) sau prin $v \geqslant w$ ($v > w$) inegalitățile $v_i \leqslant w_i$ ($v_i < w_i$) sau respectiv $v_i \geqslant w_i$ ($v_i > w_i$), $i = 1, \ldots, n$. Fie $V \subset \mathbf{R}^n$ o submulțime compactă și fie $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un anumit punct din V. Se notează prin $\mathcal{C}_v^z$ operatorul care fixează pe $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ în $z \in V$ de o manieră diagonală, adică $\mathcal{C}_v^z\{\varphi(v)\} = [\varphi_1(z_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, \varphi_i(v_1, \ldots, v_{i-1}, z_i, v_{i+1}, \ldots, v_n), \ldots, \varphi_n(v_1, \ldots, v_{n-1}, z_n)]^T$. Se mai notează prin $\max \mathcal{C}_v^z\{\varphi(v)\}$, $v \in V$, vectorul cu componentele $\max \varphi_i(v_1, \ldots, z_i, \ldots, v_n)$, $i = 1, \ldots, n$, $v \in V$.

Fie $\gamma: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ o funcție diferențiabilă cu componentele γ_i și $\gamma(t) > 0$, $t \in \mathbf{R}_+$, și hiperintervalul dependent de timp

$$X(t) = \{v \in \mathbf{R}^n;\ |v| \leqslant \gamma(t)\},\ t \in \mathbf{R}_+. \tag{3.70}$$

Întrucît vom studia evoluția stării sistemului (3.69) în $X(t)$ sub aspectul stabilității, se impune ca $\gamma(t)$ să aibă proprietatea

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0. \tag{3.71}$$

Definiția 8. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.69) se numește *asimptotic stabil pe componente în raport cu* $\gamma(t)$ ($ASC\gamma$) dacă pentru orice $t_0 \in \mathbf{R}_+$ și pentru orice $x_0 \in X(t_0)$ răspunsul sistemului satisface condiția

$$|x(t)| \leqslant \gamma(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{3.72}$$

În condițiile în care funcția f din (3.69) satisface condițiile de existență și de unicitate de la I.2.2 și în conformitate cu [P 3] $x = 0$ este ASCγ dacă și numai dacă $X(t)$ este invariantă pentru sistemul (3.69), respectiv dacă și numai dacă

$$\lim_{h \searrow 0} h^{-1} d(v + hf(t; v);\ X(t)) = 0 \tag{3.73}$$

pentru orice $(t, x_0) \in \mathbf{R}_+ \times X(t_0)$. Prin $d(v; V)$ s-a notat distanța de la $v \in \mathbf{R}^n$ la submulțimea $V \subset \mathbf{R}^n$.

Teorema 24. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.69) este ASCγ dacă și numai dacă

$$\max_{\substack{t \geqslant 0 \\ |v| \leqslant \gamma}} [\mathcal{C}_v^{\pm\gamma}\{\pm f(t, v)\} - \dot{\gamma}(t)] \leqslant 0. \tag{3.74}$$

D. În virtutea formei particulare a hiperintervalului (3.70) rezultă că (3.73) este echivalentă cu

$$-\gamma(t) - h\dot{\gamma}(t) - h\underline{r}(h) \leqslant v + hf(t, v) + hr(h) \leqslant$$
$$< \gamma(t) + h\dot{\gamma}(t) + h\bar{r}(h), \tag{3.75}$$

pentru orice $(t, v) \in \mathbf{R}_+ \times X(t)$, pentru $h > 0$, suficient de mic, și pentru anumite funcții $\underline{r}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$, $r: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ și $\bar{r}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$, cu $\underline{r}(h) \to 0$, $r(h) \to 0$ și $\bar{r}(h) \to 0$ pentru $h \searrow 0$.

Înlocuind v succesiv în (3.75) cu $(\pm\gamma_1(t), v_2, \ldots, v_n), \ldots, (v_1, \ldots, v_{i-1}, \pm\gamma_i(t), v_{i+1}, \ldots, v_n), \ldots, (v_1, \ldots, v_{n-1}, \pm\gamma_n(t))$ și simplificînd prin $h > 0$ rezultă că (3.75) este echivalentă cu

$$\mathcal{C}_v^{\pm\gamma}\{\pm f(t, v)\} \leqslant \dot{\gamma}(t) \tag{3.76}$$

pentru orice $(t, v) \in \mathbf{R}_+ \times X(t)$, în care semnele care preced pe γ și f trebuie să coincidă. În aceste circumstanțe este evident că (3.76) este echivalentă cu (3.74). ■

Este ușor de observat că inegalitatea (3.72), sub condiția (3.71), poate fi îndeplinită numai dacă punctul de echilibru $x = 0$ este asimptotic stabil. În consecință inegalitatea (3.74) este o condiție suficientă de *stabilitate asimptotică* a punctului $x = 0$. Mai mult, mulțimea

$$X_{AS} \doteq \{v \in \mathbf{R}^n;\ |v| \leqslant \max_{\mathbf{R}_+} \gamma(t)\}$$

este una din *regiunile de stabilitate asimptotică* a punctului de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.69).

În acest context, evident, se poate pune și problema *stabilității asimptotice globale pe componente* a punctului de echilibru $x = 0$. Se pot identifica mai multe posibilități de definire consistentă a ei. Una dintre cele mai simple și naturale este următoarea.

Definiția 9. În *definiția 8* se înlocuiește $\gamma(t)$ cu $\rho\gamma(t)$, $\rho \geqslant 1$. Sistemul dinamic (3.69) se numește $ASC\gamma$ ($x = 0$ este *global* $ASC\gamma$) dacă $x = 0$ este $ASC\gamma$ pentru orice $\rho \geqslant 1$.

Teorema 25. Sistemul dinamic (3.69) este $ASC\gamma$ dacă și numai dacă

$$\max_{\substack{t \geqslant 0 \\ |v| \leqslant \gamma \\ \rho \geqslant 1}} \left[\frac{1}{\rho}\mathcal{C}_v^{\pm\gamma}\{\pm f(t, \rho v)\} - \dot{\gamma}(t)\right] \leqslant 0. \tag{3.77}$$

Ca și mai sus, este evident că (3.77) este o condiție suficientă de *stabilitate asimptotică globală* a punctului $x = 0$.

Rezultatul enunțat prin *teorema 25* generalizează cea ce s-a obținut în [V 2—3] pentru sistemul

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.78}$$

în care A este o matrice $(n \times n)$ reală, cu elemente constante. Forma particulară corespunzătoare a *teoremei 25* este următoarea.

Teorema 26. (Voicu). Sistemul dinamic (3.78) este ASCγ dacă și numai dacă

$$\max_{\mathbf{R}_+} [\bar{A}\gamma(t) - \dot{\gamma}(t)] \leqslant 0. \tag{3.79}$$

Privitor la notația $\bar{A}$ amintim că ea a fost definită la II.2.1.1, relația (2.25).

După cum s-a arătat în [V 2—3], pentru sistemul (3.79), stabilitatea asimptotică pe componente este echivalentă cu *stabilitatea exponențial asimptotică pe componente.* Definițiile acestui tip de stabilitate și caracterizările corespunzătoare ale sistemului (3.69) sînt următoarele.

Definiția 10. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.69) se numește *EASC* (E = exponențial) dacă există $\alpha > 0$ (vector) și $\beta > 0$ (scalar) astfel încît pentru orice $t_0 \in \mathbf{R}_+$ și pentru orice x_0, cu $|x_0| \leqslant \alpha$, răspunsul sistemului satisface inegalitatea

$$|x(t)| \leqslant \alpha\, e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0. \tag{3.80}$$

Definiția 11. În *definiția 10* se înlocuiește α cu $\rho\alpha$, $\rho \geqslant 1$. Sistemul dinamic (3.69) se numește *EASC* ($x = 0$ este *global EASC*) dacă $x = 0$ este EASC pentru orice $\rho \geqslant 1$.

Teorema 27. Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.69) este EASC dacă și numai dacă

$$\max_{\substack{t \geqslant 0 \\ |v| \leqslant \alpha}} [e^{\beta t}\, \mathcal{C}_v^{\pm\alpha} \{\pm f(t, v\, e^{-\beta t})\}] \leqslant -\beta\alpha. \tag{3.81}$$

Teorema 28. Sistemul dinamic (3.69) este EASC dacă și numai dacă

$$\max_{\substack{t \geqslant 0 \\ |v| \leqslant \alpha \\ \rho \geqslant 1}} \left[\frac{1}{\rho}\, e^{\beta t}\, \mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\pm f(t, \rho v\, e^{-\beta t})\}\right] \leqslant -\beta\alpha. \tag{3.82}$$

Pentru a introduce în mod natural noțiunea de *stabilitate absolută pe componente* vom prezenta, în conformitate cu [V 2—3], o caracterizare a sistemului (3.78) în legătură cu *definiția 11*.

Teorema 29. Pentru sistemul dinamic (3.78) următoarele condiții sînt echivalente:

1° Sistemul (3.78) este EASC;

2° $\bar{A}\alpha \leqslant -\beta\alpha$;

3° $0 < \beta \leqslant \min\limits_{i}\left(-a_{ii} - \frac{1}{\alpha_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}|\,\alpha_j\right)$,

unde a_{ij} și α_j, $i, j = 1, \ldots, n$, sînt elementele lui A și respectiv componentele lui α;

4° $\bar{A}\alpha < 0$;

5° $-\bar{A}$ este o M-matrice (definiția lui $-\bar{A}$ ca M-matrice este $-\bar{A}\alpha > 0$);

6° $\bar{A}$ este hurwitziană;

7° $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i(A_\alpha) \subset \{s \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\ s < 0\}$,

unde $G_i(A_\alpha)$ sînt discurile lui Gherșgorin asociate matricii A_α (v. II.2.1.1, relația (2.20));

8° $(-1)^k \bar{A}_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$,
unde $\bar{A}_k$ sînt minorii principali diagonali ai matricii $\bar{A}$;

9° $(-\bar{A})^{-1} \geqslant 0$ (toate elementele sînt nenegative).

Forma de inegalitate a condiției (3.82) sugerează o posibilitate de abordare a problemei stabilității sistemelor dinamice neliniare matriceale

$$\dot{x} = F(t, x)\, x, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.83}$$

în care $F(t, x)$ este o matrice $(n \times n)$ continuă și adecvat mărginită.

Pentru scopurile noastre mărginirea lui $F(t, x)$ trebuie înțeleasă în sensul următor: există $\alpha > 0$ (vector), $\beta > 0$ (scalar) și o matrice constantă A astfel încît

$$\mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\bar{F}(t, \rho v e^{-\beta t})\} \leqslant \bar{A}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad |v| \leqslant \alpha, \quad \rho \geqslant 1, \tag{3.84}$$

în care $\mathcal{C}_v^{\pm\alpha}$ se aplică fiecărei coloane a matricii $\bar{F}$ și inegalitatea între matrici are semnificația de inegalitate între perechile omoloage de elemente ale matricilor.

Evident, există o clasă nevidă $\mathcal{F}_{\bar{A}}$ de matrici $F(t, x)$ care satisfac (3.84). În aceste condiții sistemul (3.78) se numește *$\mathcal{C}$-majorantul liniar pe componente* al sistemului (3.83).

Definiția 12. Sistemul dinamic (3.83) se numește *absolut stabil pe componente* dacă el este EASC pentru orice $F \in \mathcal{F}_{\bar{A}}$.

Teorema 30. Sistemul dinamic (3.83) este absolut stabil pe componente dacă și numai dacă $\mathcal{C}$-majorantul liniar pe componente (3.78) este EASC.

D. *Suficienţa.* Se observă mai întîi că pentru $t \in \mathbf{R}_+$, $|v| \leqslant \alpha$, $\rho \geqslant 1$ şi $F \in \mathcal{F}_{\bar{A}}$ putem scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\pm F(t, \rho v\, \mathrm{e}^{-\beta t})\, v\} &\leqslant \mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\bar{F}(t, \rho v\, \mathrm{e}^{-\beta t})\alpha\} = \\ &= \mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\bar{F}(t, \rho v\, \mathrm{e}^{-\beta t}\}\alpha \leqslant \bar{A}\alpha. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dacă (3.78) este EASC, atunci, în conformitate cu (3.85), şi cu 2° de la *teorema 29*, se poate scrie

$$\mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\{\pm F(t, \rho v\, \mathrm{e}^{-\beta t})\, v\} \leqslant \bar{A}\alpha \leqslant -\beta\alpha$$

pentru $t \geqslant 0$, $|v| \leqslant \alpha$, $\rho \geqslant 1$ şi $F \in \mathcal{F}_{\bar{A}}$. Avînd în vedere *teorema 28* (aplicată sistemului (3.83)) şi *definiţia 12* rezultă că sistemul (3.83) este absolut stabil pe componente.

Necesitatea este evidentă dacă se adoptă $F(t, x) = \bar{A}$. ■

Pentru o clasă de sisteme dinamice de forma (3.83), care descriu anumite procese tehnico-economice, ecologice, biologice (farmacocinetice) sau circuite cu tranzistoare, prin aplicarea metodei directe Liapunov, Šiljak a studiat stabilitatea asimptotică conectivă, [S 5]. Definind clasa de matrici $\mathfrak{M}_{\bar{A}}$ pentru care $F(t, x) \leqslant \bar{A}$, $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}^n$, în [S 5] se dă o caracterizare a sistemului (3.83) în termenii „stabilităţii exponenţial absolute şi conective" conform căreia starea sistemului poate fi evaluată prin

$$\| x(t) \| \leqslant k\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t_0)}, \qquad t \geqslant t_0; \tag{3.86}$$

unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană, $k > 0$ (dependent de componentele lui α) şi $0 < \varepsilon \leqslant \beta_{max}$. În acest context trebuie să remarcăm că dacă (3.83) este absolut stabil pe componente atunci el este şi exponenţial absolut şi conectiv stabil deoarece evaluarea temporală detaliată (3.80) implică evaluarea (3.86). Cu toate acestea clasa $\mathcal{F}_{\bar{A}}$ este mai largă decît clasa $\mathfrak{M}_{\bar{A}}$. Pentru justificarea acestei afirmaţii vom examina un exemplu.

Exemplul 3.13. Se consideră (3.83) cu $n=1$ şi $\bar{A}=-1$. Pentru $F(t,x)=-\mathrm{e}^{2t}|x|$ avem $F \notin \mathfrak{M}_{-1}$ deoarece $-\mathrm{e}^{2t}|x| \leqslant 0$, $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}$, adică $F \in \mathfrak{M}_0$; evident $\mathfrak{M}_0$ nu poate fi o clasă pentru care (3.83) este exponenţial absolut şi conectiv stabil. În acelaşi timp pentru $\alpha=1$ şi $\beta=1$ avem $F \in \mathcal{F}_{-1}$ deoarece $-\rho\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-t} \leqslant -1$, $t \in \mathbf{R}_+$, $\rho \geqslant 1$. Realmente, soluţia Cauchy a sistemului $\dot{x} = -\mathrm{e}^{2t}|x|\, x$ este $x(t) = 2x_0/[2+|x_0|(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t_0})]$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, şi ea satisface condiţia $|x| \leqslant \rho\, \mathrm{e}^{-(t-t_0)}$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, pentru orice $|x_0| \leqslant \rho$, $\rho \geqslant 1$, adică sistemul considerat este EASC.

Capitolul IV

Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate multivariabile

1. Sisteme automate multivariabile liniare

În capitolele II și III s-au avut în vedere în primul rînd sistemele automate monovariabile. Metodele de analiză a stabilității expuse acolo se aplică, în anumite condiții, și sistemelor automate multivariabile. Precizăm că prin sisteme automate multivariabile se înțeleg sistemele cu mai mult de o mărime reglată și cu mai mult de un circuit de reacție negativă.

Faptul că astfel de sisteme se întîlnesc tot mai frecvent în practica inginerească și că metodele de analiză și de sinteză dezvoltate pentru sistemele automate monovariabile nu conduc întotdeauna la rezultatele scontate sau nu se pot aplica în formele lor originare a avut ca urmare elaborarea unor metode specifice sistemelor automate multivariabile.

Ca exemple de sisteme automate multivariabile se pot aminti următoarele:

— Reglarea automată a unui bloc turbină-generator sincron funcționînd în regim insular, situație în care se reglează frecvența și tensiunea.

— Reglarea automată a unui generator de abur. În acest caz este vorba despre un sistem cu un număr mare de mărimi reglate și de reacții. Principalele mărimi reglate sînt: debitul de combustibil, debitul de aer de ardere, depresiunea în focar, conținutul de oxid de carbon în gazele arse, nivelul apei în tambur și presiunea aburului produs.

— Reglarea automată a unei coloane de distilare, situație în care, obișnuit, se reglează nivelul și temperatura unui fluid.

— Climatizarea automată în spații de locuit sau în spații în care se aplică tehnologii speciale. În acest caz se reglează temperatura și umiditatea aerului.

Pentru a putea aprecia complexitatea problemelor care se pun la reglarea automată a unor sisteme multivariabile vom examina un exemplu simplu.

Exemplul 1.1. Se consideră sistemul cu schema funcțional-tehnologică din fig. IV. 1, *a*, care se folosește pentru a realiza amestecul a două lichide miscibile. Se presupune că temperaturile lor, θ_1 și θ_2, sînt constante, cu $\theta_1 < \theta_2$. Debitele q_1 și q_2 pot fi modificate prin ventilele V_1 și V_2, respectiv prin mărimile corespunzătoare de comandă v_1 și v_2. Mărimile reglate ale sistemului sînt temperatura θ și debitul q ale amestecului de fluide. Evident, această reglare poate avea loc numai prin comenzile v_1 și v_2 pe baza măsurării adecvate a mărimilor θ și q.

Față de un regim de funcționare dat, pentru micile abateri staționare ale tuturor mărimilor putem scrie

$$\Delta\theta_s = k_{11}\,\Delta v_{1s} + k_{12}\,\Delta v_{2s}$$

$$\Delta q_s = -\,k_{21}\,\Delta v_{1s} + k_{22}\,\Delta v_{2s},$$

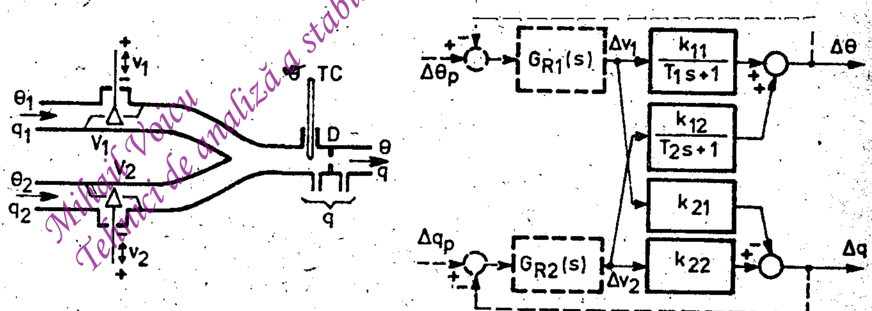
unde $k_{ij} > 0$, $i, j = 1, \ldots, 4$, și indicele s pune în evidență faptul că relațiile de mai sus se referă la regimul staționar.

Comportarea în regim dinamic a sistemului diferă de cea corespunzătoare regimului staționar. Variațiile Δv_1 și Δv_2 își manifestă efectul asupra lui $\Delta\theta$ cu anumite întîrzieri caracterizate prin constantele de timp T_1 și T_2. Asupra lui Δq variațiile Δv_1 și Δv_2 nu se manifestă cu întîrziere atîta timp cît fluidele în cauză sînt incompresibile. În aceste condiții, în transformate Laplace, sistemul considerat este descris de ecuațiile

$$\Delta\Theta(s) = \frac{k_{11}}{T_1 s + 1}\,\Delta V_1(s) + \frac{k_{12}}{T_2 s + 1}\,\Delta V_2(s)$$

$$\Delta Q(s) = -k_{21}\,\Delta V_1(s) + k_{22}\,\Delta V_2(s).$$

Schema bloc structurală a sistemului este reprezentată în fig. IV. 1, *b* (numai conexiunile trasate cu linie continuă). Ceea ce rezultă cu evidență din această schemă este



a b

Fig. IV. 1. Sistem pentru amestecarea a două lichide:
a — schema funcțional-tehnologică; V_1, V_2 — ventile; *TC* — termometru; *D* — diafragmă;
b — schema bloc structurală a sistemului cu reglare automată de temperatură și de debit.

faptul că Δv_1 şi Δv_2 influenţează simultan mărimile reglate $\Delta\theta$ şi Δq. Acest fapt se datoreşte cuplajului intern al sistemului.

Conform schemei din fig. IV.1, *b*, $G_{R1}(s)$ este regulatorul de temperatură şi $G_{R2}(s)$ este regulatorul de debit. Pentru $\Delta\theta > 0$ primul regulator determină răcirea amestecului de lichide prin creşterea debitului q_1 al lichidului mai rece, iar pentru $\Delta q > 0$ cel de al doilea regulator determină reducerea debitului q_2 al lichidului mai cald. Este foarte clar că cele două regulatoare nu pot acţiona independent. Orice variaţii, atît ale temperaturii θ cît şi ale debitului q, atrag după sine acţionarea ambelor regulatoare datorită cuplajului intern al sistemului.

1.1. Tehnici de localizare a polilor

1.1.1. Determinantul caracteristic

Schema bloc structurală standard a unui sistem automat multivariabil are forma din fig. IV.2, în care $G_F(s)$ este matricea de transfer a părţii fixate (elementele de execuţie, instalaţia automatizată şi traductoarele) şi $G_R(s)$ este matricea de transfer a regulatoarelor. Elementele acestor matrici sînt fracţii raţionale.

Conform fig. IV.2 ecuaţiile care descriu funcţionarea sistemului sînt

$$Y(s) = G_F(s)W(s), \tag{1.1}$$

$$W(s) = G_R(s)U(s), \tag{1.2}$$

$$U(s) = V(s) - Y(s), \tag{1.3}$$

în care u, y, $v \in \mathbf{R}^m$ şi w are dimensiuni arbitrare şi matricele $G_R(s)$ şi $G_F(s)$ au dimensiuni adecvate.

Relaţia intrare-ieşire se obţine eliminînd $U(s)$ şi $W(s)$ între ecuaţiile (1.1)—(1.3). Putem scrie succesiv

$$Y(s) = G_F(s)G_R(s)\,[V(s) - Y(s)],$$

$$[I_m + G_F(s)G_R(s)]\,Y(s) = G_F(s)G_R(s)\,V(s), \tag{1.4}$$

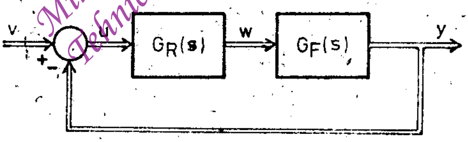


Fig. IV.2. Schema bloc structurală a unui sistem automat multivariabil.

în care I_m este matricea unitate de ordinul m.

Din (1.4) rezultă

$$Y(s) = G_0(s)V(s), \tag{1.5}$$

în care s-a notat cu

$$G_0(s) = [I_m + G(s)]^{-1}G(s) \tag{1.6}$$

matricea de transfer a sistemului automat, iar în (1.6)

$$G(s) = G_F(s)G_R(s) \tag{1.7}$$

este matricea de transfer a sistemului deschis.

Precizăm că la explicitarea lui $Y(s)$ din ecuația (1.4) s-a presupus că

$$F(s) = \det\,[I_m + G(s)] \not\equiv 0, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{1.8}$$

fapt care asigură existența inversei $[I_m + G(s)]^{-1}$ pentru $s \in \mathbf{C}$ exceptînd zerourile lui $F(s)$.

Fie $P_0(s)$ numitorul comun al tuturor minorilor matricii $G_0(s)$. Conform celor arătate la I.6.4.1, $P_0(s)$ este *polinomul polilor* sistemului automat. În legătură cu stabilitatea IMEM, pe baza *definiției 1* și a *teoremei 2* de la II.1.1 se poate formula următorul rezultat.

Teorema 1. Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2 este stabil IMEM dacă și numai dacă polinomul polilor $P_0(s)$ este hurwitzian.

Exemplul 1.2. Pentru sistemul de la *exemplul 1.1* se dau $k_{11} = k_{12} = 2$, $k_{21} = k_{22} = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 1$ și $G_{R1}(s) = \dfrac{a}{s}$, $G_{R2}(s) = b$, cu $a > 0$ și $b > 0$. Se cere să se determine în planul parametrilor a, b domeniul de stabilitate IMEM.

Conform schemei din fig. IV.1, *b* și relației (1.7) avem

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{11}}{T_1 s + 1} & \dfrac{k_{12}}{T_2 s + 1} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{R1}(s) & 0 \\ 0 & G_{R2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2a}{s(2s+1)} & \dfrac{2b}{s+1} \\ -\dfrac{a}{s} & b \end{bmatrix}.$$

În continuare, ținînd seama de (1.6), obținem

$$G_0(s) = \frac{1}{F(s)} \begin{bmatrix} \dfrac{2a(b+1)}{s(2s+1)} + \dfrac{2ab}{s(s+1)} & \dfrac{2b}{s+1} \\ -\dfrac{a}{s} & b + \dfrac{2ab}{s(s+1)} + \dfrac{2ab}{s(2b+1)} \end{bmatrix},$$

în care

$$F(s) = \frac{b+1}{s(s+1)(2s+1)} \left[2s^3 + 3s^2 + \left(1 + \frac{6ab + 2a}{b+1}\right)s + \frac{2a(2b+1)}{b+1}\right].$$

Înlocuind $F(s)$ în $G_0(s)$ și efectuînd calculele se obține

$$G_0(s) = \frac{1}{2(b+1)P_0(s)} \begin{bmatrix} 2a[(3b+1)s + 2b + 1] & 2bs(2s+1) \\ -a(s+1)(2s+1) & b[2s^3 + 3s^2 + (6a+1)s + 4a] \end{bmatrix},$$

în care

$$P_0(s) = s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3ab + a}{b+1}\right)s + \frac{a(2b+1)}{b+1}$$

este polinomul polilor sistemului automat.

Matricea Hurwitz asociată polinomului $P(s)$ este

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{a(2b+1)}{b+1} & \frac{1}{2} + \frac{3ab+a}{b+1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a(2b+1)}{b+1} \end{bmatrix}.$$

Conform *teoremei* 5 de la II. 1.1.2 şi ţinînd seama de faptul că $a > 0$, $b > 0$, condiţia de stabilitate IMEM este

$$\frac{3}{4} + \frac{3(3ab+a)}{2(b+1)} - \frac{a(2b+1)}{b+1} > 0,$$

din care se obţine $3 + \frac{2a(5b+1)}{b+1} > 0$. Pentru $a > 0$, $b > 0$ această inegalitate este satisfăcută, ceea ce înseamnă că sistemul considerat este stabil IMEM.

În afara acestui rezultat, exemplul considerat pune în evidenţă un fapt remarcabil şi anume că zerourile lui $P_0(s)$ coincid cu zerourile lui $F(s)$ deoarece

$$F(s) = \frac{2(b+1)}{s(s+1)(2s+1)} P_0(s).$$

Cum $F(s)$ se calculează mult mai uşor decît $P_0(s)$, utilizarea lui $F(s)$ pentru analiza stabilităţii se impune în mod natural. Este uşor de verificat că în cazul sistemelor automate monovariabile zerourile lui $F(s)$ coincid întotdeauna cu cele ale lui $P_0(s)$. În virtutea acestui fapt $F(s)$ se numeşte *determinantul caracteristic intrare-ieşire* al sistemului automat multivariabil.

Desigur trebuie să ne întrebăm în ce măsură afirmaţia „zerourile lui $F(s)$ coincid cu zerourile lui $P_0(s)$" este adevărată în general. Pentru a vedea concret ce relaţie mai poate exista între $F(s)$ şi $P_0(s)$ se consideră următorul exemplu.

Exemplul 1.3. Fie un sistem automat multivariabil cu

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s-2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine $F(s)$ şi $P_0(s)$ şi să se analizeze stabilitatea IMEM a sistemului.

Avem

$$F(s) = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{s} & \frac{1}{s-2} \\ 0 & 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{(s+1)^2}{s^2}.$$

Pe de altă parte, conform relaţiei (1.6), putem scrie

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s-2} \\ 0 & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s-2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s^2}{(s+1)^2(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Urmează că

$$P_0(s) = (s+1)^2 (s-2),$$

ceea ce înseamnă că zerourile lui $F(s)$ coincid numai cu o parte dintre zerourile lui $P_0(s)$. Evident, sistemul considerat nu este stabil IMEM deoarece $P_0(s)$ nu este hurwitzian.

Pentru a vedea din ce motiv sînt posibile diferenţele puse în evidenţă între mulţimea zerourilor lui $F(s)$ şi mulţimea zerourilor lui $P_0(s)$ fie

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbf{R}, \ x \in \mathbf{R}^n, \ u \in \mathbf{R}^m, \tag{1.9}$$

$$y = Cx + Du, \quad y \in \mathbf{R}^m, \tag{1.10}$$

o reprezentare intrare-stare-ieşire a sistemului deschis din fig. IV.2, în care A, B, C, D sînt matrici de dimensiuni adecvate. Evident,

$$G(s) = C(I_n s - A)^{-1} B + D, \tag{1.11}$$

în care I_n este matricea unitate de ordinul n.

Conform schemei bloc structurale din fig. IV.2 la ecuaţiile (1.9), (1.10) se mai adaugă ecuaţia comparatorului

$$u = v - y. \tag{1.12}$$

Pentru a obţine reprezentarea intrare-stare-ieşire a sistemului automat se înlocuieşte (1.12) în (1.9), (1.10) după care se elimină y din prima, folosind-o pe a doua.

După calcule relativ simple se obţin ecuaţiile

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 v, \tag{1.13}$$

$$y = C_0 x + D_0 v, \tag{1.14}$$

în care

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A - B(I_m + D)^{-1} C, \\
B_0 &= B[I_m - (I_m + D)^{-1} D], \\
C_0 &= (I_m + D)^{-1} C, \\
D_0 &= (I_m + D)^{-1} D.
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

Evident, se presupune că $\det (I_m + D) \neq 0$.

Fie

$$\Delta(s) = \det (I_n s - A) \tag{1.16}$$

polinomul caracteristic al sistemului deschis și

$$\Delta_0(s) = \det (I_n s - A_0) \tag{1.17}$$

polinomul caracteristic al sistemului automat multivariabil.

Lema 1. (Hsu-Chen). Între $F(s)$, $\Delta(s)$ și $\Delta_0(s)$ există relația

$$\frac{F(s)}{F(\infty)} = \frac{\Delta_0(s)}{\Delta(s)}, \tag{1.18}$$

unde $F(\infty) = \det (I_m + D) \neq 0$.

D. Pe baza relațiilor (1.8), (1.11) putem scrie

$$F(s) = \det [I_m + C(I_n s - A)^{-1} B + D]. \tag{1.19}$$

Utilizînd o formulă a lui Schur (v. anexa E), (1.19) poate fi pusă sub forma

$$F(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & B \\ \hline -C & I_m + D \end{array}\right].$$

Făcînd apoi un artificiu de calcul, așa cum se arată mai jos,

$$F(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \det \left[\begin{array}{c|c} I_n & -B(I_m + D)^{-1} \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & B \\ \hline -C & I_m + D \end{array}\right],$$

după înmulțirea determinanților se obține

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{\Delta(s)} \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A + B(I_m + D)^{-1} C & 0 \\ \hline -C & I_m + D \end{array}\right] = \\
&= \frac{1}{\Delta(s)} \det [I_n s - A + B(I_m + D)^{-1} C] \det [I_m + D].
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

Ţinînd seama de prima relaţie din (1.15), de (1.17) şi de faptul că

$$F(\infty) = \lim_{s\to\infty} F(s) = \det\,(I_m + D) \neq 0, \tag{1.21}$$

din (1.20) rezultă imediat (1.18). ■

Rezultatul (1.18) evidenţiază legătura care există între valorile proprii ale sistemului deschis, valorile proprii ale sistemului închis şi zerourile determinantului caracteristic intrare-ieşire al sistemului automat. Este posibil ca $\Delta_0(s)$ şi $\Delta(s)$ să aibă zerouri comune şi acest fapt explică de ce unele dintre zerourile lui $\Delta_0(s)$ nu pot fi în acelaşi timp zerouri ale lui $F(s)$. Cauzele care determină existenţa unor zerouri comune pentru $\Delta(s)$ şi $\Delta_0(s)$ sînt legate, după cum se va arăta în continuare, de proprietăţile interne ale sistemului deschis.

Lema 2. Toate valorile proprii ale părţilor de stare necontrolabilă şi/sau neobservabilă ale sistemului deschis din fig. IV.2 sînt zerouri comune ale polinoamelor $\Delta_0(s)$ şi $\Delta(s)$.

D. Utilizînd forma canonică Kalman (v. I.6.3.5), conform definiţiilor (1.16) şi (1.17), obţinem

$$\Delta(s) = \det\,(I_1 s - A_{11}) \det\,(I_2 s - A_{22}) \det\,(I_3 s - A_{33}) \det\,(I_4 s - A_{44}), \tag{1.22}$$

$$\Delta_0(s) = \det(I_1 s - A_{11}) \det\,[I_2 s - A_{22} + B_2(I_m + D)^{-1} C_2] \det\,(I_3 s - A_{33}) \det\,(I_4 s - A_{44}), \tag{1.23}$$

în care A_{11}, A_{33} şi A_{44} sînt matricile de evoluţie ale subsistemelor de stare necontrolabilă şi/sau neobservabilă, componente ale sistemului deschis, şi A_{22}, B_2, C_2 sînt matricile care definesc subsistemul de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă. Examinînd polinoamele (1.22) şi (1.23) rezultă evident că toate valorile proprii ale matricilor A_{11}, A_{33}, A_{44} sînt în acelaşi timp zerouri comune ale polinoamelor $\Delta_0(s)$ şi $\Delta(s)$. ■

Înlocuind (1.22) şi (1.23) în (1.18) şi făcînd simplificările posibile în această fază se obţine

$$\frac{F(s)}{F(\infty)} = \frac{\Delta_{20}(s)}{\Delta_2(s)}, \tag{1.24}$$

în care

$$\Delta_{20}(s) = \det\,[I_2 s - A_{22} + B_2(I_m + D)^{-1} C_2], \tag{1.25}$$

$$\Delta_2(s) = \det[(I_2 s - A_{22})]. \tag{1.26}$$

Desigur că nu avem nici un motiv să afirmăm că polinoamele $\Delta_{20}(s)$ şi $\Delta_2(s)$ sînt întotdeauna relativ prime între ele. După cum vom arăta cu ajutorul unui exemplu este posibil ca $\Delta_{20}(s)$ şi $\Delta_2(s)$ să aibă zerouri comune deşi subsistemul caracterizat prin A_{22}, B_2 şi C_2 este de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă.

Exemplul 1.4. Fie sistemul automat multivariabil de la *exemplul 1.3* cu sistemul deschis descris de

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine $\Delta_2(s)$, $\Delta_{20}(s)$ şi $F(s)$.

Mai întîi vom observa că sistemul deschis dat prin ecuaţiile de mai sus este de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă deoarece rang $\mathcal{C} = 3$ şi rang $\mathcal{O} = 3$. În aceste condiţii avem

$$\Delta_2(s) = \Delta(s) = s^2\,(s-2),$$

$$A_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\0&-1&2\end{bmatrix},$$

$$\Delta_{20}(s) = \Delta_0(s) = (s+1)^2\,(s-2).$$

Aşadar

$$\frac{F(s)}{F(\infty)}=\frac{(s+1)^2}{s^2},$$

rezultat care s-a mai obţinut şi la *exemplul 1.3*.

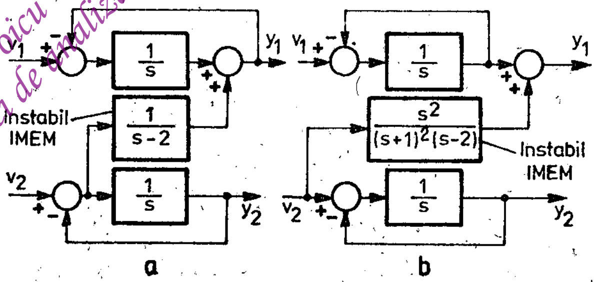


Fig. IV.3. Sistem automat cu cuplaj intern incomplet (*exemplul 1.4*).

Pentru a răspunde la întrebarea de ce $s = 2$ nu se află printre zerourile lui $F(s)$, vom reprezenta schema bloc structurală a sistemului automat — fig. IV.3, *a*, ţinînd seama de expresia matricii de transfer a sistemului deschis dată la *exemplul 1.3*. Se remarcă faptul că cuplajul intern este incomplet şi că printr-o transfigurare simplă se ajunge la schema bloc structurală din fig. IV.3, *b*, în care există o conexiune intrare-ieşire printr-un subsistem instabil IMEM.

Faptele prezentate mai sus ne permit să formulăm următorul rezultat privitor la posibilitatea utilizării determinantului caracteristic $F(s)$ în analiza stabilităţii IMEM a sistemelor automate multivariabile.

Teorema 2. Fie sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2 şi cu toate elementele sistemului deschis stabile IMEM sau dacă nu toate sînt stabile IMEM atunci toate cele instabile IMEM contribuie în $F(s)$. Sistemul automat considerat este stabil IMEM dacă şi numai dacă toate zerourile determinantului caracteristic sînt situate în semiplanul Re $s < 0$ al planului complex.

1.1.2. Criteriul Rosenbrock

Ceea ce este tipic pentru studiul stabilităţii IMEM a sistemelor automate monovariabile este faptul că rezultatele de stabilitate deliberat obţinute pentru această categorie de sisteme permit caracterizarea sistemului închis ca stabil sau instabil IMEM, pe baza cunoaşterii funcţiei de transfer a sistemului deschis. Dacă în cadrul analizei stabilităţii unui sistem automat acest aspect pare a fi mai puţin important, pentru sinteza sistemelor automate (stabilizare, corecţie) el este esenţial. Motivul, după cum rezultă din cele expuse la II.1.1.6, II.1.1.7 şi II.3.3 este acela că stabilizarea unui sistem automat constă în modificarea structurii şi/sau parametrilor unei părţi a sistemului deschis (în speţă a regulatorului). Desigur că, în virtutea acestei raţiuni, obţinerea unor rezultate de acelaşi tip şi pentru sistemele automate multivariabile este pe deplin naturală. Mai mult, un atare lucru este şi posibil dacă avem în vedere *teorema 2*.

Un rezultat care a deschis o perspectivă în sensul generalizării criteriului Nyquist se bazează pe următoarea definiţie, [O 1].

Definiţia 1. O matrice oarecare M, pătratică de ordinul n, cu elementele m_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, se numeşte diagonal dominantă pe linii dacă există un θ_i, cu $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, ..., n$, astfel încît

$$\theta_i \, |m_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.27}$$

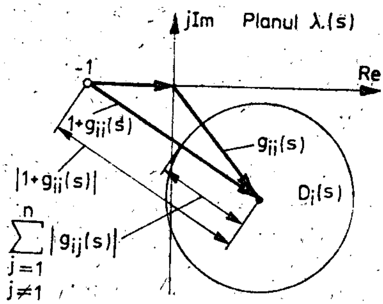


Fig. IV.4. Interpretarea geometrică a relației (1.12).

Fie $g_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, elementele matricii $G(s)$. Pentru a utiliza condițiile (1.27) în cazul matricii $G(s)$ se definesc discurile lui Gherșgorin asociate liniilor matricii $G(s)$

$$D_i(s) = \{\lambda(s) \in \mathbb{C};$$

$$|\lambda(s) - g_{ii}(s)| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |g_{ij}(s)|\}, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.28}$$

Dacă s parcurge un contur închis γ atunci fiecare disc $D_i(s)$ se deplasează în mod corespunzător în planul $\lambda(s)$, acoperind o anumită „bandă" în respectivul plan.

Definiția 2. Mulțimile

$$B_i = \bigcup_{s \in \gamma_N} D_i(s), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.29}$$

unde γ_N este conturul Nyquist (v. fig. II.24), se numesc *benzile Gherșgorin* asociate liniilor matricei $G(s)$.

Cu aceste elemente pregătitoare putem enunța și demonstra următorul rezultat.

Teorema 3 (Rosenbrock). Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2 este stabil IMEM dacă sistemul deschis este stabil IMEM și toate benzile Gherșgorin B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, ale matricii $G(s)$ nu înconjoară punctul $(-1,\ j0)$.

D. Fie în planul $\lambda(s)$ discul $D_i(s)$, fig. IV. 4. Pentru un $s \in \gamma_N$ discul $D_i(s)$ este o parte a benzii B_i. Întrucît banda B_i nu înconjoară punctul $(-1,\ j0)$ din planul $\lambda(s)$, rezultă că pentru orice $s \in \gamma_N$ discul $D_i(s)$ satisface, conform fig. IV. 4, următoarea relație geometrică

$$|1 + g_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |g_{ij}(s)|, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.30}$$

În aceste circumstanțe matricea

$$\underline{G}(s)=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{g_{12}(s)}{1+g_{11}(s)} & \cdots\cdots & \dfrac{g_{1m}(s)}{1+g_{11}(s)} \\ \dfrac{g_{21}(s)}{1+g_{22}(s)} & 1 & \cdots\cdots & \dfrac{g_{2m}(s)}{1+g_{22}(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{g_{m1}(s)}{1+g_{mm}(s)} & \dfrac{g_{m2}(s)}{1+g_{mm}(s)} & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.31)$$

este diagonal dominantă pe linii.

Fie $\lambda_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, valorile proprii ale matricii $\underline{G}(s)$. Discurile lui Gherşgorin asociate lui $\underline{G}(s)$ (pe linii) sînt

$$\underline{D}_i(s) = \{\lambda(s) \in \mathbf{C};\quad |\lambda(s) - 1| \leqslant \frac{1}{|1 + g_{ii}(s)|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |g_{ij}(s)|\},\quad s \in \mathbf{C}, \qquad (1.32)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Se ştie că (v. **II.2.1.1**).

$$\{\lambda_1(s),\ \lambda_2(s), \ldots, \lambda_m(s)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \underline{D}_i(s). \qquad (1.33)$$

Întrucît $\underline{G}(s)$ este diagonal dominantă rezultă că discurile $\underline{D}_i(s)$, toate cu centrele în punctul $(1, j0)$, au razele subunitare. Dacă $\underline{D}_{max}(s)$ este discul de rază maximă (dintre discurile $\underline{D}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$) atunci $\lambda_i(s) \in \underline{D}_{max}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, pentru orice $s \in \mathbf{C}$. Pentru $s \in \gamma_N$ valorile proprii $\lambda_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, parcurg nişte curbe închise care sînt conținute toate în $\underline{D}_{max}(s)$ şi deci nu înconjoară originea planului $\lambda(s)$. Conform principiului argumentului (v. II.3.1) aceasta înseamnă că

$$\arg \det \underline{G}(j\omega)\Bigg|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \arg \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(j\omega)\Bigg|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \sum_{i=1}^{m} \arg \lambda_i(j\omega)\Bigg|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 0. \qquad (1.34)$$

Pe de altă parte determinantul caracteristic $F(s)$, care, conform ipotezelor prezentei teoreme şi conform *teoremei 2*, poate fi utilizat pentru studiul stabilității IMEM a sistemului automat monovariabil, admite factorizarea (v. relația (1.8)

$$F(s) = \prod_{i=1}^{m} [1 + g_{ii}(s)] \det \underline{G}(s), \qquad (1.35)$$

ceea ce, ţinînd seama de (1.34), implică

$$\arg F(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \arg \prod_{i=1}^{m} [1 + g_{ii}(\mathrm{j}\omega)]\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} + \arg \det \underline{G}(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \arg [1 + g_{ii}(\mathrm{j}\omega)]\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty}. \tag{1.36}$$

Întrucît $g_{ii}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, nu au poli în semiplanul $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ şi benzile B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, nu înconjoară punctul $(-1, \mathrm{j}0)$, rezultă că

$$\arg [1+g_{ii}(\mathrm{j}\omega)]\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.37}$$

Înlocuind (1.37) în (1.36) se obţine

$$\arg F(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 0, \tag{1.38}$$

ceea ce înseamnă că determinantul caracteristic nu are nici poli şi nici zerouri în semiplanul $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$. Conform *teoremei 2* sistemul considerat este stabil IMEM. ■

Exemplul 1.5. Se consideră un sistem automat multivariabil cu

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s+3} \\ \dfrac{b}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Se cere să se determine în planul (a, b) domeniile de stabilitate IMEM conform *teoremelor 2 şi 3.*

Ţinînd seama de (1.8) putem scrie

$$F(s) = \det \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s+3} \\ \dfrac{b}{s+3} & 1 + \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{s^3 + 9s^2 + (27 - ab) + 27 - ab}{(s+1)(s+3)^2}.$$

Aplicînd criteriul Hurwitz polinomului de la numărătorul lui $F(s)$ (v. *teorema 5* de la II.1.1.2) obţinem

$$H_3 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 27 - ab & 27 - ab & 9 \\ 0 & 0 & 27 - ab \end{bmatrix},$$

din care rezultă condiţia necesară şi suficientă de stabilitate IMEM

$$ab < 27.$$

Imaginea domeniului corespunzător acestei inecuații este reprezentată în fig. IV.5. Imaginile benzilor Gherșgorin sînt date în fig. IV.6. După cum rezultă din demonstrația *teoremei 3* condiția ca benzile Gherșgorin ale matricii $G(s)$ pentru $a \neq 1$ și $b \neq 1$ să nu înconjoare punctul $(-1, j0)$ implică (1.30). În cazul de față aceasta înseamnă că

$$\left|1+\frac{1}{j\omega+1}\right|>\left|\frac{a}{j\omega+3}\right|, \quad \left|1+\frac{1}{j\omega+2}\right|>\left|\frac{b}{j\omega+3}\right|, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

de unde rezultă

$$|a|<\min_{\omega \in R}\sqrt{\frac{(\omega^2+4)(\omega^2+9)}{\omega^2+1}} \approx 4{,}56, \quad |b|<\min_{\omega \in R}\frac{\omega^2+9}{\sqrt{\omega^2+4}} \simeq 4{,}47.$$

Domeniul corespunzător acestei soluții este reprezentat în aceeași fig. IV.5.

După cum rezultă și din *exemplul 1.5*, *teorema 3* este o condiție suficientă de stabilitate IMEM. În situația în care ipotezele ei nu sînt îndeplinite (un caz frecvent este acela în care $G(s)$ are poli în origine) nu se poate face nici o afirmație privitoare la stabilitatea IMEM.

Este ușor de observat că pentru o aceeași matrice $G(s)$ se mai poate defini un set de benzi B_i^T, $i = 1, 2, \ldots, m$, avînd ca bază coloanele lui $G(s)$, respectiv considerînd matricea $G^T(s)$. Întrucît $F(s) = \det[I_m + G(s)] = \det[I_m + G^T(s)]$ rezultă că se poate face și următoarea afirmație.

Teorema 4. Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2 este stabil IMEM dacă sistemul deschis este stabil IMEM și toate ben-

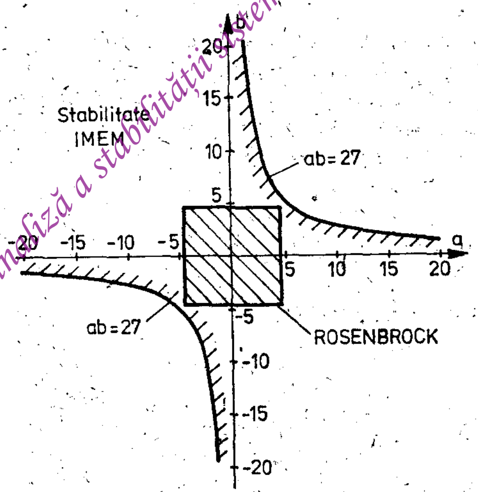


Fig. IV.5. Domeniul parametric de stabilitate IMEM la *exemplul 1.5*.

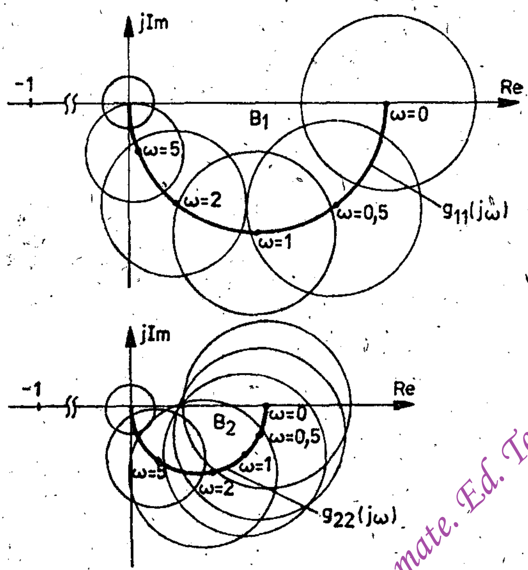


Fig. IV.6. Benzile Gherşgorin la *exemplul 1.5.*

zile Gherşgorin B_i^T, $i = 1, 2, \ldots, m$, ale matricii $G(s)$ nu înconjoară punctul $(-1, j0)$.

Faptul că rezultatul de mai sus lărgeşte efectiv posibilităţile de aplicare a criteriului Rosenbrock se poate vedea utilizîndu-l în cazul *exemplului 1.5*. Fără a mai fi necesare calcule, şi anume pe baza simetriei matricii $G(s)$ şi a rezultatelor deja obţinute, se trage concluzia că $|a| < 4{,}47$ şi $|b| < 4{,}56$. Aceasta înseamnă de fapt că $|a| < 4{,}56$ şi $|b| < 4{,}56$.

1.2. Tehnici frecvenţiale

1.2.1. Funcţiile caracteristice

Problema esenţială care trebuie rezolvată pentru generalizarea criteriului Nyquist este aceea a determinării, pe baza matricii $G(s)$, a acelor funcţii scalare $q(s)$ care conţin informaţii cît mai complete privitoare la stabilitatea IMEM, aşa cum sînt ele conţinute de polinomul polilor $P_0(s)$ sau de determinantul caracteristic $F(s)$ (în condiţiile *teoremei 2*). Se realizează astfel, ca în cazul criteriului Rosenbrock, o comprimare a informaţiei conţinute de matricea de transfer $G(s)$.

Definiția 3. Funcțiile $q_i(s)$, $s \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \dots, m$, soluții ale ecuației

$$\det [q(s)\, I_m - G(s)] = 0, \tag{1.39}$$

se numesc funcțiile caracteristice ale sistemului deschis, conform schemei bloc structurale din fig. IV.2.

În sens strict ecuația (1.39) nu este altceva decît ecuația caracteristică a matricii $G(s)$ și $q_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$, sînt valorile ei proprii. În virtutea acestui fapt putem scrie

$$\det [q(s)\, I_m - G(s)] = \prod_{i=1}^{m} [q(s) - q_i(s)].$$

Pentru $q(s) = -1$ din rezultatul de mai sus se obține

$$(-1) \det [I_m + G(s)] = (-1)^m \prod_{i=1}^{m} [1 + q_i(s)].$$

Așadar, conform definiției (1.8),

$$F(s) = \prod_{i=1}^{m} [1 + q_i(s)], \tag{1.40}$$

ceea ce înseamnă că funcțiile caracteristice $q_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$, conțin, în totalitatea lor, aceleași informații ca și determinantul caracteristic $F(s)$.

În general membrul stîng al ecuației (1.39) poate fi factorizat sub forma unui produs de polinoame ireductibile, după cum urmează

$$\det [q(s) I_m - G(s)] = \prod_{k=1}^{p} [a_{k0} q^r(s) + a_{k1} q^{r-1}(s) + \dots + a_{kr}], \tag{1.41}$$

unde $r \geqslant 1$, $p \leqslant m$ și a_{ki}, $k = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, 2, \dots, r$, sînt funcții de s. Înlocuind (1.41) în (1.39) rezultă că funcțiile caracteristice se pot determina ca rădăcini ale ecuațiilor

$$a_{k0} q^r(s) + a_{k1} q^{r-1}(s) + \dots + a_{kr} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \tag{1.42}$$

Exemplul 1.6.

$$G(s) = \frac{1}{1{,}25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 5s - 2 & 2s - 1 \\ 3s - 18 & s - 8 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine funcțiile caracteristice ale sistemului. Utilizînd (1.39) se obține

$$q^2(s) - \frac{6s - 10}{1{,}25(s+1)(s+2)} q(s) - \frac{s^2 + 3s + 2}{[1{,}25(s+1)(s+2)]^2} = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$q_{1,2}(s) = \frac{3s - 5 \mp \sqrt{d(s)}}{1{,}25(s+1)(s+2)}, \quad d(s) = (3s-5)^2 + s^2 + 3s + 2.$$

1.2.2. Criteriul Nyquist generalizat

După cum este de aşteptat, formularea unui rezultat de stabilitate IMEM prin generalizarea criteriului Nyquist (v. *teorema 6* de la II.3.2.1) se bazează pe utilizarea conturului Nyquist γ_N (v. fig. II.24), care se parcurge în sens orar (negativ). În acest fel domeniul frecvenţelor ω (axa imaginară) este parcurs de la $-\infty$ la $+\infty$.

Spre deosebire de cazul sistemelor monovariabile, în cazul sistemelor automate multivariabile conturul γ_N este parcurs pe n suprafeţe Riemann, care sînt într-o strînsă corelaţie cu polinoamele ireductibile din (1.41). Trecerea de pe o suprafaţă Riemann pe alta are loc în *puncte de ramificare* s pentru care funcţiile caracteristice $q_i(s)$, $i = 1, 2, ..., r$, sînt egale între ele, respectiv pentru acei s pentru care ecuaţiile (1.42) au fiecare cîte r rădăcini identice. După cum se ştie o ecuaţie oarecare din (1.42) are exact r rădăcini identice dacă şi numai dacă discriminantul ei

$$d(s) = \det \left[\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r & & \\ & a_0 & \cdots & \cdots & a_{r-1} & a_r & 0 \\ 0 & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_r \\ & & & ra_0 & \cdots & 2a_{r-2} & a_{r-1} \\ \hline & & ra_0 & (r-1)a_1 & \cdots & a_{r-1} & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ ra_0 & (r-1)a_1 & \cdots & a_{r-1} & & & \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r-1 \\ \text{linii} \\ \\ \\ \\ r \\ \text{linii} \end{array} \tag{1.43}$$

este nul. Pentru simplificarea scrierii, în (1.43) s-a renunţat la indicele k. Suprafeţele Riemann sînt suprafeţe plane suprapuse legate în punctele de ramificare prin tăieturi paralele cu axa reală sau cu axa imaginară.

Exemplul 1.7. Să se determine suprafeţele Riemann şi contururile Nyquist pentru cele două funcţii caracteristice de la *exemplul 1.6.*

Discriminantul, calculat deja la *exemplul 1.6*, este

$$d(s) = 10s^2 - 27s + 27$$

şi se anulează pentru $s_{1,2} = 1{,}35 \pm j\ 0{,}94$. Suprafeţele Riemann corespunzătoare şi modul în care este parcurs conturul Nyquist sînt redate în fig. IV.7, pentru cazul în care tăieturile trec prin punctul de la infinit. De fiecare dată cînd se ajunge la o tăietură se schimbă și planul în care este situat conturul Nyquist.

O altă posibilitate de realizare a tăieturii este aceea de a o face direct între punctele de ramificare. În acest caz nu mai au loc schimbări de plan la parcurgerea conturului Nyquist deoarece acesta nu se intersectează cu tăietura.

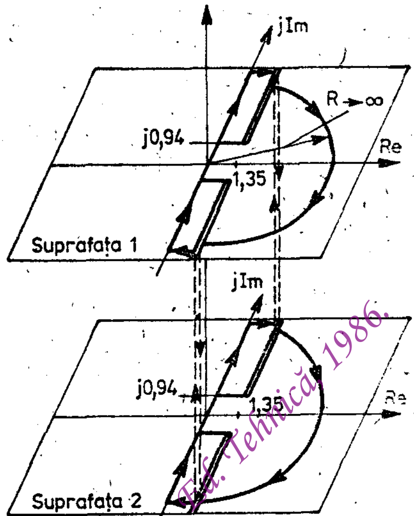


Fig. IV.7. Suprafeţele Riemann la *exemplul 1.7.*

Definiția 4. Hodografele $q_i(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, ale funcţiilor caracteristice ale matricii $G(s)$ constituie *locul caracteristic* (locul Nyquist) al sistemului deschis.

Locul caracteristic reprezintă o generalizare naturală a locului de transfer al sistemului deschis în cazul sistemelor automate monovariabile.

Trasarea locului caracteristic se face de regulă punct cu punct pe baza unor proceduri numerice în care se parcurg următorii cinci paşi:

1° Se alege o anumită valoare a pulsaţiei ω;

2° Se calculează elementele matricei $G(j\omega)$;

3° Se determină valorile proprii $q_i(j\omega)$, $i = 1, 2, ..., m$, ale matricii $G(j\omega)$;

4° Se memorează valorile proprii $q_i(j\omega)$, $i = 1, 2, ..., m$;

5° Se repetă paşii 1°—4° şi pentru alte valori ale pulsaţiei ω şi se trasează, pe baza unor subrutine de sortare şi interpolare, cu linie continuă hodografele $q_i(j\omega)$, $i = 1, 2, ..., m$.

Teorema 5 (Mac Farlane-Postlethwaite). Fie sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2, care în circuit deschis are n_+ poli în semiplanul Re $s > 0$ şi n_0 poli pe Re $s = 0$, dar astfel încît toate elementele instabile IMEM contribuie în $F(s)$. Sistemul automat considerat este stabil IMEM dacă şi numai dacă:

1° locul caracteristic al matricei $G(s)$ înconjoară punctul $(-1, j0)$ în sens pozitiv de un număr de n_+ ori atunci cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$;

2° numărul de ramuri ale locului caracteristic care se închid prin punctul de la infinit este egal cu n_0.

O altă formă a criteriului Nyquist generalizat, utilă în cazul în care matricea de transfer a sistemului deschis este $kG(s)$, unde $k \in \mathbf{R}$ este un parametru (factorul de amplificare), este următoarea.

Teorema 6 (Mac Farlane-Postlethwaite). Fie sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2, care în circuit deschis, caracterizat prin $kG(s)$, are n_+ poli în semiplanul $\mathrm{Re}\, s > 0$ și n_0 poli pe $\mathrm{Re}\, s = 0$, dar astfel încît toate elementele instabile IMEM contribuie în $F(s)$. Sistemul automat considerat este stabil IMEM dacă și numai dacă:

1° locul caracteristic corespunzător matricei $G(s)$ înconjoară punctul $\left(-\frac{1}{k}, \mathrm{j}0\right)$ în sens pozitiv de un număr de n_+ ori atunci cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$;

2° numărul de ramuri ale locului caracteristic care se închid prin punctul de la infinit este egal cu n_0.

Exemplul 1.8. Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2, în care

$$G_R(s) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad G_F(s) = \frac{1}{1{,}25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine valorile lui k pentru care sistemul automat este stabil IMEM.

Folosind (1.39) pentru $k = 1$ se obține ecuația

$$q^2(s) - \frac{2s-3}{1{,}25(s+1)(s+2)}\, q(s) + \frac{s^2+3s+2}{[1{,}25(s+1)(s+2)]^2} = 0,$$

ale cărei soluții sînt

$$q_{1,2}(s) = \frac{s - 1{,}5 \pm \sqrt{d(s)}}{1{,}25(s+1)(s+2)}, \quad d(s) = (s-1{,}5)^2 - (s^2+3s+2).$$

Rezolvînd ecuația $d(s) = 0$ se obțin punctele de ramificare $s_{1,2} = 1/24$. Suprafețele Riemann corespunzătoare sînt reprezentate în fig. IV.8.

Locul caracteristic al sistemului deschis, pentru $k = 1$, are forma din fig. IV.9. Întrucît toți polii sistemului deschis sînt situați în $\mathrm{Re}\, s < 0$, conform *teoremei 6*, locul caracteristic al sistemului deschis (trasat pentru $k = 1$) nu trebuie să înconjoare punctul critic $\left(-\frac{1}{k}, \mathrm{j}0\right)$. Dacă punctul critic parcurge întreaga axă reală, situațiile care se obțin sînt conforme tabelului următor.

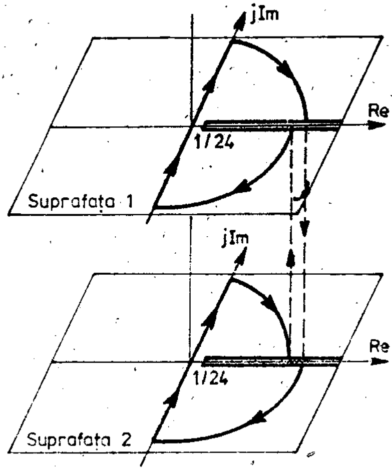


Fig. IV.8. Suprafețele Riemann la *exemplul 1.8.*

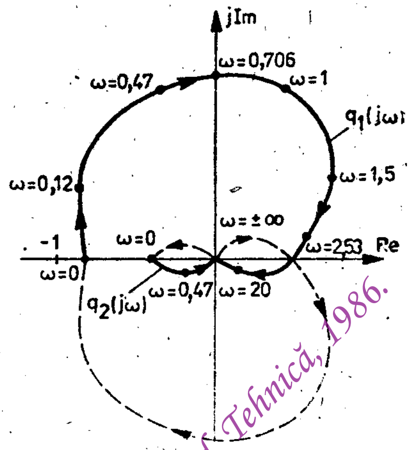


Fig. IV.9. Locul caracteristic la *exemplul 1.8* ($k = 1$).

Poziția punctului critic	Nr. de înconjurări ale punctului critic	Valorile lui k	Sistemul este
$-\infty \leqslant -\frac{1}{k} < -0{,}8$	0	$0 \leqslant k < 1{,}25$	*stabil IMEM*
$-\frac{1}{k} = -0{,}8$	locul trece prin punctul critic	$k = 1{,}25$	instabil IMEM
$-0{,}8 < -\frac{1}{k} < -0{,}4$	1	$1{,}25 < k < 2{,}5$	instabil IMEM
$-\frac{1}{k} = -0{,}4$	locul trece prin punctul critic	$k = 2{,}5$	instabil IMEM
$-0{,}4 < -\frac{1}{k} < 0$	0	$2{,}5 < k < +\infty$	*stabil IMEM*
$-\frac{1}{k} = 0$	locul trece prin punctul critic	$k = +\infty$	instabil IMEM
$0 < -\frac{1}{k} < 0{,}533$	2	$-\infty < k < -1{,}875$	instabil IMEM
$-\frac{1}{k} = 0{,}533$	locul trece prin punctul critic	$k = -1{,}875$	instabil IMEM
$0{,}533 < -\frac{1}{k} \leqslant +\infty$	0	$-1{,}875 < k \leqslant 0$	*stabil IMEM*

1.2.3. Aplicaţie: servomecanism de precizie

În cazul servomecanismelor de poziţionare realizate cu servomotoare electrice rotative, între axul servomotorului electric şi mecanismul poziţionat se interpune în mod necesar un reductor mecanic cu roţi dinţate prin care se reduce turaţia, cu creşterea corespunzătoare a momentului mecanic util. Este un fapt bine cunoscut că jocurile mecanice ale reductorului pot afecta într-o bună măsură precizia de poziţionare a servomecanismului.

Există aplicaţii, cum ar fi acţionarea roboţilor sau poziţionarea antenelor direcţionale, [F1], în care precizia de poziţionare este o condiţie esenţială. Pentru eliminarea influenţei jocului reductoarelor mecanice cu roţi dinţate se pot folosi acţionări cu două servomotoare care lucrează în sensuri opuse. În fig. IV.10, *a* se reprezintă schema funcţională a celor două acţionări. Servomotoarele se caracterizează prin momentul de inerţie $\overline{J}$ şi mecanismul acţionat prin momentul de inerţie J. Prin inter-

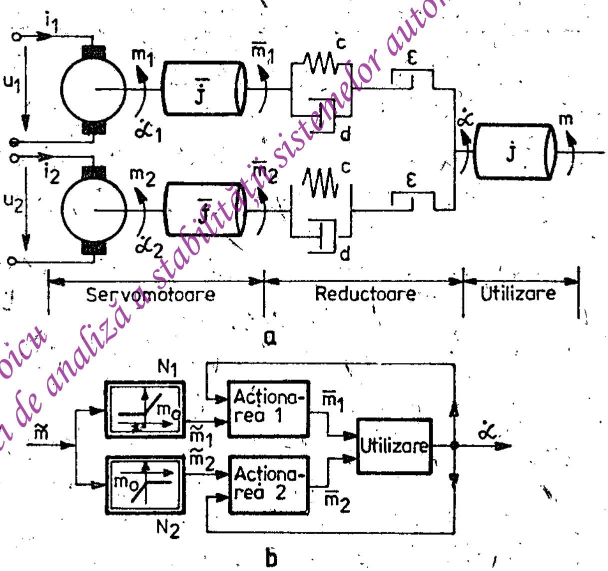


Fig. IV. 10. *a* — Schema funcţională a unei acţionări cu două servomotoare;
b — Principiul pretensionării pentru eliminarea jocului.

mediul reductoarelor mecanice, caracterizate prin coeficientul de torsiune elastică c, coeficientul de frecare vîscoasă d şi jocul în angrenaje ε, cele două servomotoare acţionează în opoziţie. Eliminarea efectivă a efectului jocului se obţine prin pretensionarea reductoarelor conform schemei funcţionale din fig. IV.10, *b*. Comanda acţionărilor se face prin blocurile neliniare N_1 şi N_2 care au tocmai rolul de a fixa valoarea cuplului m_0 de pretensionare. Valoarea prescrisă $\widetilde{m}$ pentru reglarea turaţiei se aplică prin blocurile N_1 şi N_2. La $\widetilde{m}=0$, datorită formei caracteristicilor blocurilor N_1 şi N_2, cele două servomotoare sînt comandate prin m_0 şi $-m_0$, ceea ce asigură pretensionarea reductoarelor şi prin aceasta eliminarea efectului jocului din angrenajele lor. Pentru $\widetilde{m}\neq 0$ axul de ieşire se va roti într-un sens sau în celălalt (în funcţie de semnul lui $\widetilde{m}$), dar la reversare sau la oprire efectul jocului nu va mai fi prezent.

Această soluţie privind eliminarea efectului jocului din angrenajele reductoarelor mecanice are dezavantajul că în cazul unei excitări nesimetrice a servomotoarelor de curent continuu este posibilă apariţia unor oscilaţii sau chiar a instabilităţii.

Un procedeu de stabilizare a unui atare sistem constă în introducerea a două circuite de reacţie inversă şi anume după semisuma şi după semidiferenţa vitezelor unghiulare ale celor două servomotoare.

Schema bloc structurală a instalaţiei automatizate este reprezentată în fig. IV.11. Întrucît jocul a fost eliminat prin pretensionarea reduc-

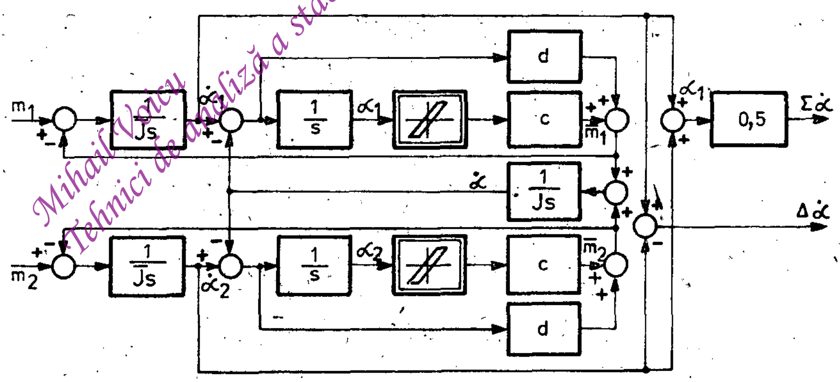


Fig. IV.11. Schema bloc structurală a acţionării unui servomecanism de precizie.

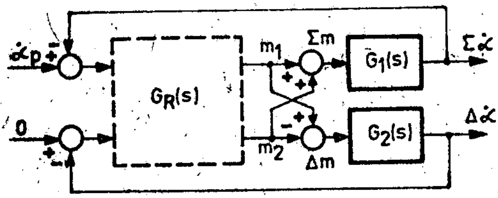


Fig. IV. 12. Schema bloc structurală a reglării automate a semisumei și semidiferenței turațiilor în cazul servomecanismului de precizie.

toarelor, sistemul poate fi considerat liniar și ca atare poate fi redus prin transfigurări la forma mai simplă din fig. IV.12, în care

$$G_1(s) = \frac{k_1(b_2s^2 + b_1s + 1)}{s(a_2s^2 + a_1s + 1)}, \tag{1.44}$$

$$k_1 = \frac{1}{J + 2\bar{J}}, \quad a_1 = \frac{d}{c}, \quad a_2 = \frac{J\bar{J}}{c(J + 2\bar{J})}, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = \frac{J}{2c}, \tag{1.45}$$

$$G_2(s) = \frac{k_2s}{c_2s^2 + c_1s + 1}, \tag{1.46}$$

$$k_2 = \frac{1}{c}, \quad c_1 = a_1, \quad c_2 = \frac{J}{c}, \tag{1.47}$$

reprezintă instalația automatizată și $G_R(s)$ este matricea de transfer a regulatorului.

Pentru valorile numerice $k_1 = 0{,}33$, $a_1 = b_1 = c_1 = 4$, $a_2 = 0{,}5$, $b_2 = 1$, $k_2 = 20$, $c_2 = 1$ și un regulator de forma

$$G_R(s) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \tag{1.48}$$

matricea de transfer a sistemului are expresia

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_1(s) \\ G_2(s) & -G_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{k(s^2 + 4s + 1)}{0{,}3s(0{,}5s^2 + 4s + 1)} & \dfrac{k(s^2 + 4s + 1)}{0{,}3s(0{,}5s^2 + 4s + 1)} \\ \dfrac{20ks}{s^2 + 4s + 1} & -\dfrac{20ks}{s^2 + 4s + 1} \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

Polii acestei matrici sînt zerourile polinomului

$$s(s^2 + 4s + 1)(0{,}5s^2 + 4s + 1)$$

şi anume $s_1 = 0$, $s_2 = -0{,}267$, $s_3 = -3{,}732$, $s_4 = -0{,}535$, $s_5 = -7{,}64$. Deci $G(s)$ are un singur pol pe axa imaginară. Utilizînd ecuaţia (1.39), pentru $k = 1$, se obţin funcţiile caracteristice

$$q_{1,2}(s) = \frac{-p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1p_3}}{2p_1}, \qquad (1.50)$$

unde

$$p_1(s) = 0{,}3s(0{,}5s^2+4s+1)\,(s^2+4s+1)$$

$$p_2(s) = 6s^2(0{,}5s^2+4s+1) - (s^2+4s+1)^2 \qquad (1.51)$$

$$p_3(s) = 40s(s^2+4s+1).$$

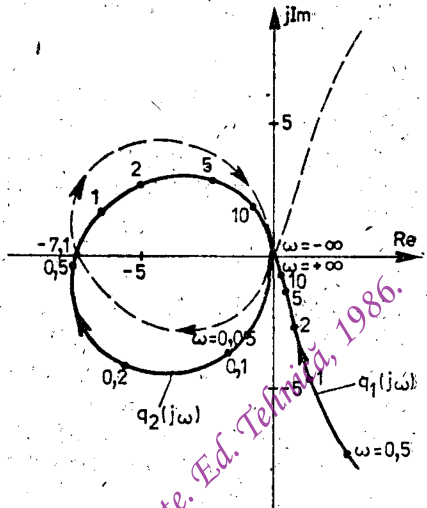


Fig. IV. 13. Locul caracteristic al sistemului din fig. IV. 12.

Locul caracteristic în cazul $k = 1$ are forma din fig. IV.13. Dacă punctul critic parcurge întreaga axă reală situaţiile care se obţin sînt cuprinse în tabelul următor.

Poziţia punctului critic	Nr. de înconjurări ale punctului critic	Valorile lui k	Sistemul este
$-\infty \leqslant -\frac{1}{k} < -7{,}1$	0	$0 \leqslant k < 0{,}138$	*stabil IMEM*
$-\frac{1}{k} = -7{,}1$	locul trece prin punctul critic	$k = 0{,}138$	instabil IMEM
$-7{,}1 < -\frac{1}{k} < 0$	2	$0{,}138 < k < +\infty$	instabil IMEM
$-\frac{1}{k} = 0$	locul trece prin punctul critic	$k = +$	instabil IMEM
$0 < -\frac{1}{k} < +\infty$	1	$-\infty < k < 0$	instabil IMEM

La aplicarea *teoremei 6* s-a ţinut seama şi de condiţia 2°, care este satisfăcută de sistemul considerat, deoarece locul caracteristic are o singură ramură care se închide prin punctul de la infinit.

2. Problema stabilizării

Stabilizarea sistemelor automate liniare multivariabile poate fi abordată pe două căi, și anume: prin utilizarea reprezentării intrare-stare-ieșire și prin utilizarea reprezentării intrare-ieșire. În ambele situații se folosește același procedeu: reacția, care poate fi după stare sau după ieșire.

2.1. Reacția după stare

Din punctul de vedere al aplicațiilor, este frecventă situația în care matricea de evoluție A a unui sistem dinamic liniar constant (continuu sau discret în timp) nu posedă în mod natural proprietățile de stabilitate cerute de funcționalitatea concretă și/sau de destinația sistemului.

În cazul utilizării reprezentării intrare-stare-ieșire, cea mai simplă posibilitate de modificare a localizării valorilor proprii ale unui sistem constă în introducerea unei reacții proporționale după starea sa. Întrucît formal problema stabilizării se rezolvă analog atît pentru sistemele continue, cît și pentru cele discrete în timp, ne vom referi în continuare numai la cazul sistemelor continue în timp.

Fie sistemul dinamic liniar invariant și continuu în timp

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m, \tag{2.1}$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbf{R}^p, \tag{2.2}$$

și legea de reglare

$$u = -Kx + Mv, \quad v \in \mathbf{R}^q, \tag{2.3}$$

unde K este matricea reacției după stare, v este noua mărime de intrare și M este o matrice prin care se poate realiza o anumită relație intrare-ieșire impusă în regim staționar.

Înlocuind (2.3) în (2.1) se obține

$$\dot{x} = (A - BK)x + BMv, \tag{2.4}$$

ceea ce înseamnă că matricea de evoluție a noului sistem (2.4), (2.2), a cărui structură este reprezentată în fig. IV.14, este $A - BK$.

Definiția 1. Sistemul dinamic (1.31), (1.32) se numește *stabilizabil* dacă există o matrice K astfel încît sistemul (2.4), (2.2) să fie asimptotic stabil.

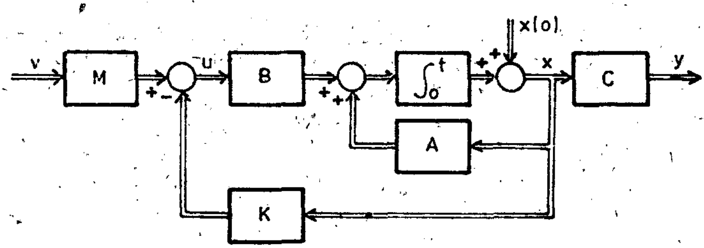


Fig. IV.14. Structura sistemului cu reacţie după stare (ecuaţiile (2.1)–(2.3)).

Se remarcă de la bun început că, întrucît matricea

$$F = A - BK \tag{2.5}$$

trebuie să satisfacă anumite condiţii relative la stabilitatea asimptotică a sistemului, este de aşteptat ca existenţa matricii K să depindă într-un mod specific de perechea de matrici A, B.

1° Polinomul caracteristic al matricii F este dat (evident, el este hurwitzian în cazul sistemelor continue în timp sau convergent în al celor discrete în timp). În această situaţie stabilizarea unui sistem dinamic liniar constituie un caz particular al unei probleme mai generale, şi anume a *alocării valorilor proprii*, [W 4].

2° Matricea F este dată (evident, ea este hurwitziană sau convergentă, după caz). În această situaţie stabilizarea unui sistem dinamic liniar constituie o problemă de existenţă a unei soluţii K a ecuaţiei matriceale (2.5).

2.1.1. Alocarea valorilor proprii

Fie

$$\mathcal{C} = [B,\ AB,\ A^2B,\ \dots,\ A^{n-1}B] \tag{2.6}$$

matricea de controlabilitate a sistemului (2.1), (2.2) (sau a perechii de matrici A, B). S-a arătat că perechea A, B este complet controlabilă dacă şi numai dacă rang $\mathcal{C} = n$ (v. I. 6.3.2).

Fie

$$\Delta_F(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{2.7}$$

un polinom oarecare cu coeficienţi reali.

Teorema 1 (Wonham). Dacă perechea A, B este complet controlabilă atunci pentru orice polinom $\Delta_F(s)$ există o matrice F astfel încît F are ca polinom caracteristic pe $\Delta_F(s)$.

D. Pentru simplificarea demonstrației vom considera $m = 1$, ceea ce înseamnă că B este o matrice $n \times 1$ (sistemul are o singură intrare scalară) și K este o matrice $1 \times n$.

Vom arăta mai întîi că dacă rang $\mathcal{C} = n$ atunci, folosind transformarea

$$\tilde{x} = Px, \tag{2.8}$$

cu

$$P = \begin{bmatrix} W_n \\ W_nA \\ \vdots \\ W_nA^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

în care W_n este ultima linie a matricii $\mathcal{C}^{-1}$, sistemul (2.1) poate fi adus la forma sa *canonică controlabilă*

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} \quad -\alpha_1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{2.10}$$

Constantele α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, în conformitate cu II.2.3.1, sînt coeficienții polinomului caracteristic al matricii A.

Pentru a putea folosi transformarea (2.8) trebuie ca $\det P \neq 0$. Demonstrația acestui fapt constă în a presupune că există constantele c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît

$$c_1W_n + c_2W_nA + \ldots + c_nW_nA^{n-1} = 0. \tag{2.11}$$

Multiplicînd în (2.11) la dreapta cu $B \neq 0$ se obține

$$c_1W_nB + c_2W_nAB + \ldots + c_nW_nA^{n-1}B = 0. \tag{2.12}$$

Avînd în vedere că $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C} = I$, că W_n este ultima linie a lui $\mathcal{C}^{-1}$ și că $\mathcal{C}$ are forma (2.6) rezultă că $W_nA^{i-1}B = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ca urmare, din (2.12) se obține $c_n = 0$.

Multiplicînd din nou în (2.11) la dreapta cu $AB \neq 0$ se obține

$$c_1W_nAB + c_2W_nA^2B + \ldots + c_{n-1}W_nA^{n-1}B = 0. \tag{2.13}$$

În aceleași condiții, avem $W_n A^i B = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, ceea ce din (2.13), implică $c_{n-1} = 0$.

Continuînd în acest mod se trage concluzia că $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ceea ce înseamnă că liniile matricii P, relația (2.9), sînt liniar independente.

Folosind transformarea (2.8) ecuația (2.1) devine

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u,$$

în care

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} W_n \\ W_n A \\ \vdots \\ W_n A^{n-1} \end{bmatrix} AP^{-1} = \begin{bmatrix} W_n A \\ W_n A^2 \\ \vdots \\ W_n A^n \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$\tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} W_n \\ W_n A \\ \vdots \\ W_n A^{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} W_n B \\ W_n AB \\ \vdots \\ W_n A^{n-1} B \end{bmatrix}.$$

Dacă p_k este coloana k a matricii P^{-1} atunci, ținînd seama de faptul că $PP^{-1} = I$ și că P are forma (2.9), elementele matricilor $\tilde{A}$ și $\tilde{B}$ sînt

$$W_n A^i p_k = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots, i, i+2, \ldots, n, \\ 1, & k = i+1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$W_n A^n p_k = -\alpha_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

și, respectiv,

$$W_n A^{i-1} B = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & i = n, \end{cases}$$

de unde rezultă că $\tilde{A}$ și $\tilde{B}$ au formele specificate în (2.10).

În aceste condiții putem scrie succesiv

$$F = A - BK = P^{-1}\tilde{A}P - P^{-1}\tilde{B}K = P^{-1}(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})P, \quad (2.14)$$

unde

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_n \tilde{k}_{n-1} \ldots \tilde{k}] = KP^{-1}. \quad (2.15)$$

Ţinînd seama de formele concrete ale matricilor $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ şi $\widetilde{K}$, din (2.14) rezultă că F este asemenea cu matricea de tip Frobenius

$$\widetilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \\ -\alpha_n - k_n & -\alpha_{n-1} - k_{n-1} & -\alpha_{n-2} - k_{n-2} \cdots - \alpha_1 - k_1 \end{bmatrix}, \qquad (2.16)$$

ceea ce înseamnă.

$$\det(Is - F) = \det(Is - \widetilde{F}) = s^n + (\alpha_1 + \widetilde{k}_1)s^{n-1} + \ldots + \alpha_n + \widetilde{k}_n. \qquad (2.17)$$

Acum este evident că teorema este adevărată deoarece pentru orice $\Delta_F(s)$ de forma (2.7) există $\widetilde{k}_i = a_i - \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectiv $K = \widetilde{K}P$ (v. relaţia (2.15)) astfel încît $\det(Is - F) = \Delta_F(s)$. ∎

Demonstraţia constructivă a *teoremei 1* pune în evidenţă şi un procedeu de calcul al matricii K. Evident, problema esenţială în cadrul acestui procedeu rămîne determinarea formei canonice controlabile a sistemului (2.1), (2.2). Proceduri numerice de determinare a formei canonice controlabile şi de alocare a valorilor proprii sînt expuse de exemplu în [V 1].

În ceea ce priveşte calculul matricii M, să observăm că matricea de transfer a sistemului (2.4), (2.2) are forma

$$G(s) = C[Is - (A - BK)]^{-1} BM. \qquad (2.18)$$

După cum se ştie relaţia intrare-ieşire în regim staţionar este determinată de $G(0)$. Dacă $G(0)$ trebuie să aibă o anumită formă atunci din ecuaţia matriceală

$$C(BK - A)^{-1}BM = G(0) \qquad (2.19)$$

se determină soluţia M care asigură realizarea efectivă a respectivului $G(0)$. Dacă matricea $C(BK - A)^{-1}B$ nu este pătratică atunci pentru rezolvarea ecuaţiei (2.19) se foloseşte noţiunea de *matrice inversă generalizată*, [B 11], în acelaşi mod în care va fi folosită la 2.1.2.

Pe baza *teoremei 1* se obţine imediat următorul rezultat privitor la problema stabilizării.

Teorema 2. Dacă sistemul (2.1), (2.2) este de stare complet controlabilă atunci el este stabilizabil.

D. Întrucît perechea A, B este complet controlabilă, conform *teoremei 1*, există K astfel încît F are ca polinom caracteristic un polinom de gradul n cu coeficienţi arbitrari. Impunînd condiţia ca acest polinom să fie hurwitzian (cu zerouri impuse sau cu coeficienţi impuşi) — în cazul sistemelor continue în timp, sau convergent în cazul sistemelor discrete în timp, rezultă că sistemul (2.4), (2.2) este asimptotic stabil. ■

Exemplul 2.1. Se consideră un ascensor de mină, cu schema funcțional-tehnologică din fig. IV.15, *a* și cu schema bloc din fig. IV.15, *b*, în care

$$G_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1};\quad k_1 = 10,\quad T_1 = 10,$$

$$G_2(s) = \frac{k_2\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2},\quad k_2 = 5,\quad \omega_0 = 0,1,$$

sînt funcțiile de transfer a sistemului de acționare (prevăzut cu reglaj automat de turație) și a ansamblului sarcină-contragreutate-cablu (ω_0 este pulsația naturală a acestui ansamblu, determinată de masa lui și de elasticitatea cablului).

Se cere să se stabilizeze acest sistem prin alocarea valorilor proprii în $-0,1$, soluție care asigură un răspuns indicial aperiodic.

Pentru determinarea ecuației intrare-stare se introduc variabilele $x_1 = \omega$, $x_2 = v$, $x_3 = \dot{v}$, $x_4 = h$. În aceste circumstanțe, ținînd seama de fig. IV.15, *b*, putem scrie ecuațiile

$$X_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}U(s),\quad X_2(s) = \frac{k_2\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}X_1(s),$$

$$X_3(s) = sX_2(s),\quad X_4(s) = \frac{1}{s}X_2(s).$$

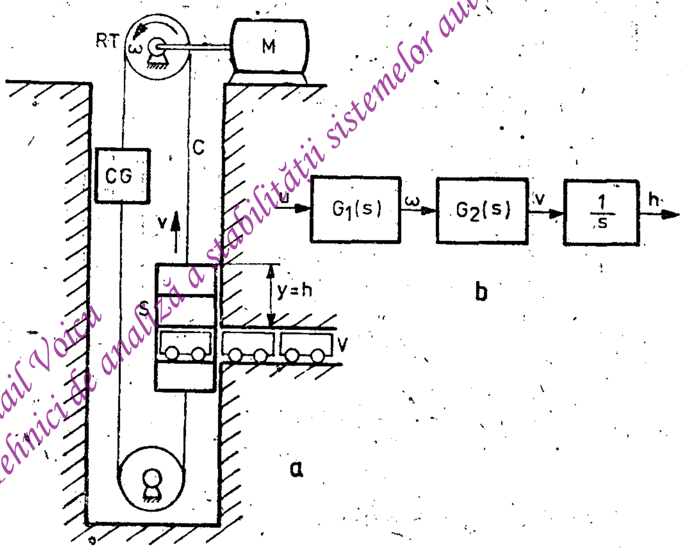


Fig. IV.15. *a* — Schema funcțional-tehnologică a unui ascensor de mină: *M* — motorul de acționare; *RT* — roata de tracțiune; *S* — sarcina; *V* — vagonet; *C* — cablul sarcinii; *CG* — contragreutatea; *b* — Schema bloc structurală a sistemului.

Acestora le corespunde în domeniul timpului următoarea ecuație intrare-stare

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1/T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k_1/T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

în care $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$ este vectorul de stare al sistemului.

Determinantul matricii de controlabilitate este

$$\det \mathcal{C} = -k_1^4 k_2^3 \omega_0^6 T_1^{-4} = -125 \cdot 10^{-6},$$

ceea ce înseamnă că sistemul considerat este de stare complet controlabilă. Pentru valorile numerice date ultima linie a inversei matricii de controlabilitate este $W_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 20]$.

Utilizînd transformarea (2.8) în care

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & -0{,}2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}01 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se obține forma canonică controlabilă (2.10), cu

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10^{-3} & -10^{-2} & -10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru valorile proprii impuse rezultă un polinom caracteristic $\Delta_F(s) = (s + 0{,}1)^4 = s^4 + 0{,}4s^3 + 0{,}06s^2 + 0{,}004s + 0{,}0001$, ceea ce implică $\tilde{k}_1 = 0{,}3$, $\tilde{k}_2 = 0{,}05$, $\tilde{k}_3 = 0{,}003$, $\tilde{k}_4 = 0{,}0001$.

Matricea de reacție după stare rezultă din $K = \widetilde{K}P = [\tilde{k}_4 \; \tilde{k}_3 \; \tilde{k}_2 \; \tilde{k}_1]\, P = [0{,}3 \quad 0 \quad 1 \quad 0{,}002]$.

2.1.2. Existența soluției ecuației (2.5)

O altă posibilitate de a aborda existența și determinarea unei matrici K în problema stabilizării constă în a rezolva ecuația matriceală (2.5), în care K este necunoscuta și A, B, F sînt matrici date. Soluția se bazează pe folosirea inversei generalizate a unei matrici (în cazul de față B). Definiția corespunzătoare este: orice matrice B^g care satisface condiția

$$BB^gB = B \tag{2.20}$$

nu numește o *inversă generalizată* a matricii B, [B 11].

În aceste circumstanțe ecuația (2.5) admite o soluție în condițiile următoarei afirmații.

Teorema 3. Ecuația (2.5) admite o soluție

$$K = B^g(A - F) + (I_m - B^gB)\,Z, \tag{2.21}$$

în care I_m este matricea unitate de ordinul m și Z este o matrice $m \times n$ reală arbitrară, dacă și numai dacă are loc condiția de consistență

$$(BB^g - I_n)\,(A - F) = 0, \tag{2.22}$$

în care I_n este matricea unitate de ordinul n.

Demonstrația este imediată și constă în a verifica faptul că (2.21) este soluție a ecuației (2.5) dacă și numai dacă are loc (2.22); evident, se ține seama și de definiția (2.20).

În conformitate cu (2.22) rezultă că ecuația (2.5) nu admite o soluție pentru orice F. Aceasta înseamnă că alegerea lui F nu este în întregime arbitrară, în sensul că anumite elemente ale sale sînt determinate de perechea A, B în timp ce altele pot fi arbitrare. Acest lucru rămîne valabil și în condițiile *teoremei 1*, care poate fi demonstrată folosind condiția (2.22).

În cazul în care rang $B = m$ (uzual $m \leqslant n$), matricea B admite o mulțime de inverse generalizate la stînga B^s, care satisfac condiția

$$B^sB = I_m. \tag{2.23}$$

Dintre acestea cel mai simplu de calculat este inversa Moore-Penrose

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T. \tag{2.24}$$

Înlocuind (2.24) în (2.21) și (2.22) soluția și, respectiv, condiția de consistență devin

$$K = (B^T B)^{-1} B^T(A - F), \tag{2.25}$$

$$[B(B^T B)^{-1} B^T - I_n]\,(A - F) = 0. \tag{2.26}$$

Comparativ cu modul de determinare a matricii K pus în evidență la demonstrația *teoremei 1*, care presupune determinarea formei canonice controlabile a sistemului, utilizarea ecuațiilor (2.25), (2.26) (sau (2.21), (2.22) în cazul rang $B < m$) poate asigura, în unele situații, rezolvarea mai simplă a problemei stabilizării.

Aspectul esențial al utilizării soluției (2.25) (sau (2.21)) este acela al alegerii acelei matrici F, compatibilă cu condiția de consistență (2.26) (sau 2.22)), care are proprietățile de stabilitate asimptotică impuse. Ca soluții parțiale ale acestui aspect al problemei se pot cita [L 5], [V4]. Se poate aprecia că o soluționare satisfăcătoare privind alegerea matricii F se obține pe baza rezultatelor din [G 4] privitoare la localizarea zerourilor unui polinom sau a valorilor proprii ale unei matrici într-o anumită regiune algebrică a planului complex.

2.1.3. Aplicație: stabilizarea unui pod rulant

Se consideră podul rulant de la I.1.4.3, descris de ecuațiile liniarizate (I.1.66), (I.1.67). Se folosește pentru acționare un motor electric de curent continuu prevăzut cu reglaj automat de turație și cu un reductor mecanic adecvat. Acest ansamblu este descris de ecuația

$$\dot{x}_5 = -\frac{1}{T_M}x_5 + \frac{k_M}{T_M}u, \tag{2.27}$$

în care x_5 este forța de tracțiune (notată cu u în (I.1.66)) dezvoltată de sistemul de acționare, u este tensiunea de comandă și k_M, T_M sînt factorul de amplificare, respectiv constanta de timp ale acestui subsistem.

Se cere să se stabilizeze sistemul descris de ecuațiile (I.1.66), (2.27), (I.1.67) printr-o reacție proporțională adecvată după stare.

Reunind ecuațiile (I.1.66), (I.1.67) (în care se face schimbarea $u \to x_5$) cu ecuația (2.27), pentru valorile numerice considerate la *exemplul 1.8* de la II.1.1.6 se obțin următoarele ecuații ale sistemului

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} u, \tag{2.28}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

S-a arătat la *exemplul 1.8* de la II.1.1.6 că acest sistem este instabil IMEM. S-a arătat de asemenea în [V 10] că deşi sistemul este stabilizabil prin procedee clasice nu este posibilă obţinerea unor performanţe acceptabile. Acest aspect major privitor la calitatea reglării automate se poate rezolva într-un mod simplu şi satisfăcător prin alocarea valorilor proprii. Aplicarea acestui procedeu este posibilă deoarece, după calculul matricii de controlabilitate, se constată că rang $\mathcal{C} = 5$ şi conform *teoremei 2* sistemul considerat este stabilizabil.

Întrucît ecuaţiile sistemului sînt „foarte aproape" de forma sa canonică controlabilă, vom determina elementele matricii K prin calcul direct. Într-adevăr, folosind (2.5) se obţine

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -10^{-4} \\ -100k_5 & -100k_4 & -100k_3 & -100k_2 & -100k_1-1 \end{bmatrix},$$

cu

$$\Delta_F(s) = \det(Is - F) = s^5 + (100k_1 + 1)s^4 + 100k_2 s^3 + \\ + 100k_3 s^2 + 100k_4 s + 100k_5. \tag{2.30}$$

Pentru determinarea parametrilor $k_1, \ldots, k_5$ ne propunem să alocăm valorile proprii în felul următor: $\lambda_{1,2,3} = -1$ şi $\lambda_{4,5}$ să fie dominanţi şi să asigure o suprareglare de 5% şi un timp de răspuns la 5% de 15 s. Conform fig. I.20 rezultă $\zeta = 0{,}707$ şi $\omega_n = 0{,}2$ (din $\omega_n\, 15 \approx 3$). Aceasta înseamnă că $\lambda_{4,5} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{1-\zeta^2}) = -0{,}1414 \pm \mathrm{j}\,0{,}1414$. Aşadar trebuie să avem

$$\Delta_F(s) = (s+1)^3(s^2 + 0{,}2828s + 0{,}04) = \\ = s^5 + 3{,}2828s^4 + 3{,}8885s^3 + 1{,}9685s^2 + 0{,}4028s + 0{,}04. \tag{2.31}$$

Identificînd coeficienţii literali din (2.30) cu cei numerici din (2.31) se obţine

$$K = [0{,}4 \quad 4{,}028 \quad 1448{,}56 \quad 151{,}42 \quad 0{,}0428].$$

2.1.4 Estimarea stării

În rezolvarea problemei stabilizării prin reacţia după stare s-a presupus în mod tacit că toate componentele stării sistemului (2.1), (2.2) sînt direct măsurabile, ceea ce a permis formularea legii de reglare după stare (2.3).

În numeroase situaţii, semnificative din punct de vedere practic, nu toate componentele vectorului de stare al unui sistem sînt direct măsurabile sau dacă ele sînt măsurabile, numărul şi costul traductoarelor necesare nu justifică implementarea legii de reglare (2.3). În astfel de cazuri se poate proceda în două moduri:

1° Să se estimeze cu ajutorul unui sistem dinamic suplimentar, special introdus, toate componentele vectorului de stare al sistemului care urmează să fie stabilizat;

2° Să se utilizeze o lege de reglare mai complicată bazată pe măsurarea unui număr redus de mărimi dependente de componentele stării (de exemplu, măsurînd mărimea de ieşire).

Ne vom ocupa în continuare de prima modalitate.

Un sistem dinamic cu ajutorul căruia se obţine o aproximaţie a stării unui alt sistem dinamic se numeşte *estimator de stare.*

Pînă în prezent s-au pus în evidenţă numeroase posibilităţi de definire matematică şi de realizare practică a estimatoarelor de stare, [L 6], [H 5]. O calitate definitorie comună a acestora, în afară de aceea că toate asigură estimarea stării sau a altor mărimi ale unui sistem, este că toate sînt sisteme dinamice asimptotic stabile. Prima definiţie a unui estimator asimptotic de stare a fost următoarea.

Definiţia 2 (Luenberger). Se numeşte *estimator asimptotic de stare* al sistemului (2.1) (2.2) un sistem dinamic liniar constant dat prin ecuaţia

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \quad t \in \mathbf{R}_+, \ \hat{x} \in \mathbf{R}^n, \ \hat{x}(0) = 0, \qquad (2.32)$$

cu proprietatea

$$\lim_{t\to\infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0, \qquad (2.33)$$

unde L este o matrice $(n\times p)$.

Pentru a vedea în ce condiţii există matricea L, vom evalua eroarea de estimaţie

$$x_\varepsilon = x - \hat{x} \qquad (2.34)$$

folosind (2.1), (2.2) şi (2.32). Se obţine

$$\dot{x}_\varepsilon = (A - LC)\, x_\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că L trebuie ales (dacă există) astfel încît matricea $A-LC$ să fie hurwitziană, în cazul sistemelor dinamice liniare invariante și continue în timp, sau să fie convergentă în cazul sistemelor dinamice liniare invariante și discrete în timp. Prin analogie cu cazul stabilizării unui sistem dinamic liniar constant se poate formula următoarea definiție.

Definiția 3. Sistemul dinamic (2.1), (2.2) se numește *detectabil* dacă există un estimator asimptotic de stare, respectiv dacă există o matrice L astfel încît sistemul (2.32) să fie asimptotic stabil.

Detectabilitatea sistemului (2.1), (2.2) depinde de observabilitatea perechii (A, C), respectiv de rangul matricii de observabilitate

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Pe baza dualismului *stabilizabilitate-detectabilitate* se poate enunța următorul rezultat.

Teorema 4. Dacă sistemul (2.1), (2.2) este de stare complet observabilă atunci el este detectabil.

D. Întrucît perechea (A, C) este complet observabilă rezultă că perechea (A^T, C^T) este complet controlabilă. În virtutea *teoremei 2* există o matrice L^T astfel încît $A^T - C^T L^T$ să fie hurwitziană — în cazul sistemelor continue în timp, sau convergentă — în cazul sistemelor discrete în timp. Întrucît matricile $A^T - C^T L^T$ și $A - LC$ au aceeași natură rezultă că teorema este adevărată. ■

Dualismul *stabilizabilitate-detectabilitate* (și în subsidiar *controlabilitate-observabilitate*) sugerează și modul de construcție efectivă a matricii L, și anume prin alocarea valorilor proprii sau prin rezolvarea ecuației matriceale $LC = A - F$, unde F este o matrice cu proprietăți de stabilitate impuse. În ceea ce privește proprietățile de stabilitate ale matricii A, nu se formulează nici o prescripție, ceea ce înseamnă că din acest punct de vedere, ea poate fi arbitrară.

În ipoteza că sistemul (2.1), (2.2) este stabilizabil și detectabil problema stabilizării sale se poate rezolva prin implementarea legii de reglare

$$u = -K\hat{x} + Mv, \tag{2.36}$$

care este de același tip cu (2.3) dar în care s-a înlocuit x cu $\hat{x}$ furnizat de sistemul (2.32). Structura ansamblului astfel obținut are imaginea din fig. IV.16.

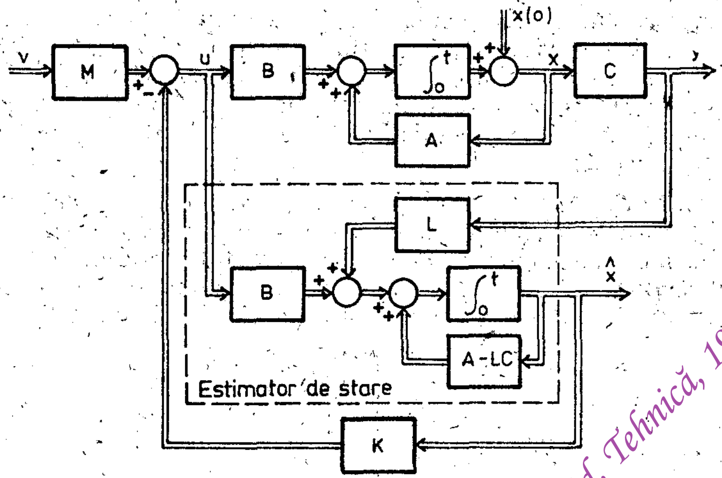


Fig. IV.16. Structura sistemului cu reacție după starea estimată (ecuațiile (2.1), (2.2), (2.32), (2.36)).

În aplicații alegerea matricii L se face astfel încît valorile proprii ale matricii $A-LC$ să fie situate suficient de mult la stînga valorilor proprii ale matricii A. O astfel de alegere asigură, după cum este de așteptat, o anulare rapidă a erorii de estimare (2.34). În ceea ce privește alegerea matricii K, se procedează ca la 2.1.1 sau 2.1.2. Aceste afirmații sînt justificate de următoarea teoremă de separare a valorilor proprii ale sistemului din fig. IV.16.

Teorema 5. Polinomul caracteristic al sistemului (2.1), (2.2), (2.32), (2.36) este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricilor $A-BK$ și $A-LC$.

D. Înlocuind (2.36) în (2.1) și apoi (2.2), (2.36) în (2.32) se obțin ecuațiile

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + BMv$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\,\hat{x} + LCx - BK\hat{x} + BMv.$$

Substituind $\hat{x} = x - x_\varepsilon$ (v. (2.34)) în ecuațiile de mai sus se obține pentru sistemul considerat următoarea ecuație intrare-stare

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & \vdots & BK \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BM \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} v, \qquad (2.37)$$

în care vectorul de stare de ordinul $2n$ este format din x şi x_e.

Folosind o formulă a lui Schur (v. anexa E) se constată că

$$\det\begin{bmatrix} Is-(A-BK) & \vdots & -BK \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & Is-(A-LC) \end{bmatrix} = \det[Is-(A-BK)]\times \times\det[Is-(A-LC)],$$

adică ceea ce trebuia de demonstrat. ■

Exemplul 2.2. Pentru ascensorul de mină de la *exemplul 2.1* se consideră

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\, x.$$

Se cere să se determine un estimator de stare cu valorile proprii localizate în $-0{,}5$. Determinantul matricii de observabilitate este

$$\det \Theta = -k_2\omega_0^2 = -0{,}05,$$

ceea ce înseamnă că sistemul este de stare complet observabilă.

Fie

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4]^T,$$

unde l_i, $i = 1, \ldots, 4$, urmează să se determine astfel încît matricea

$$F = A - LC = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 1 & -l_2 \\ 0{,}05 & -0{,}01 & 0 & -l_3 \\ 0 & 1 & 0 & -l_4 \end{bmatrix}$$

să aibă polinomul caracteristic

$$\Delta_F(s) = (s+0{,}5)^4 = s^4 + 2s^3 + 1{,}5s^2 + 0{,}5s + 0{,}0625.$$

Pentru matricea F de mai sus se obţine

$$\det(Is - F) = \begin{bmatrix} s+0{,}1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & s & -1 & l_2 \\ -0{,}05 & 0{,}01 & s & l_3 \\ 0 & -1 & 0 & s+l_4 \end{bmatrix} = s^4 + (l_4 + 0{,}1)\, s^3 +$$

$$+ (0{,}1\, l_4 + l_2 + 0{,}01)\, s^2 + (0{,}01\, l_4 + l_3 + 0{,}1\, l_2 + 0{,}001)\, s + 0{,}001\, l_4 + + 0{,}1\, l_3 + 0{,}05\, l_1.$$

Identificînd coeficienţii celor două polinoame se obţine soluţia $l_1 = 0{,}512$, $l_2 = 1{,}3$, $l_3 = 0{,}35$, $l_4 = 1{,}9$.

2.2. Reacția după ieșire

2.2.1. Reacția proporțională după ieșire

Este firesc să ne întrebăm în ce măsură este posibilă stabilizarea sistemului (2.1), (2.2) utilizînd o lege de reglare de forma

$$u = -Ky + Mv, \quad v \in \mathbf{R}^q, \tag{2.38}$$

adică o reacție după ieșire, evitîndu-se în acest fel utilizarea unui estimator de stare.

Un rezultat relativ la această problemă a fost demonstrat în [D5] și are următorul enunț.

Teorema 6. Dacă sistemul (2.1), (2.2) este de stare complet controlabilă, de stare complet observabilă și rang $B = m$, rang $C = p$ atunci există o matrice K pentru aproape orice pereche (B, C), astfel încît sistemul (2.1), (2.2), (2.38) să posede $r = \min\,(n, m + p - 1)$ valori proprii localizate oricît de aproape de r valori proprii prescrise.

S-a arătat în [F4] că este posibilă și o alocare a tuturor valorilor proprii. Fie s un număr complex și mulțimile $M_1(s) = \{v \in \mathbf{R}^n;\ (A - sI)v \in D(B)\}$, $M_2(s) = \{w \in \mathbf{R}^n;\ (A^T - sI)w \in D(C^T)\}$, unde $D(.)$ este domeniul operatorului liniar definit de matricea (.).

Teorema 7. Există o matrice K astfel încît matricea $A - BKC$ să aibă valorile proprii s_i, $i = 1, \ldots, n$, dacă și numai dacă există vectorii $v_i \in M_1(s_i)$ și $w_j \in M_2(s_j)$, cu $w_j^T v_i = \delta_{ij}$ (simbolii lui Kronecker), $i, j = 1, \ldots, n$, astfel încît $\bar{v}_a = v_b$, $\bar{w}_a = w_b$ dacă $\bar{s}_a = s_b$.

Utilizarea reacției proporționale după ieșire nu asigură întotdeauna stabilizarea dorită a sistemului (2.1), (2.2). În astfel de cazuri se pot urma numeroase alte căi, [I 2], dintre care vom aminti următoarele două.

1° Utilizarea criteriilor Rosenbrock sau Nyquist generalizat (Mac Farlane-Postlethwaite), posibilitate ilustrată anterior prin *exemplul 1.5* și aplicația de la 1.2.3.

2° Decuplarea sistemului deschis, respectiv transformarea sistemului deschis, prin introducerea unor subsisteme adecvate, în m sisteme total decuplate între ele și rezolvarea problemei stabilizării prin metodele cunoscute de la sistemele monovariabile. Există numeroase procedee de realizare a decuplării. Cel mai simplu dintre ele este procedeul decuplării serie formulat încă din 1949 de către Boksenbom și Hood [apud P1].

2.2.2. Decuplarea serie

Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.2, în care $w \in \mathbf{R}^m$, ceea ce înseamnă că $G_R(s)$ și $G_F(s)$ sînt matrici pătratice de ordinul m.

Obiectivul esențial al decuplării serie este acela al determinării unei matrici $G_R(s)$ astfel încît matricea $G(s) = G_F(s)G_R(s)$ să fie o matrice diagonală de forma

$$G(s) = \operatorname{diag}\,[R_1(s)G_{F1}(s), \ldots, R_m(s)\,G_{Fmm}(s)], \tag{2.39}$$

în care $G_{Fii}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, sînt elementele diagonalei principale a matricii $G_F(s)$ și $R_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, sînt funcțiile de transfer ale regulatoarelor sistemelor monovariabile obținute, cu ajutorul cărora se va rezolva problema stabilizării prin metode specifice sistemelor automate monovariabile.

Așadar trebuie să aibă loc egalitatea

$$G_F(s)G_R(s) = \operatorname{diag}\,[R_1(s)\,G_{F11}(s), \ldots, R_m(s)\,G_{Fmm}(s)], \tag{2.40}$$

din care se obține

$$G_R(s) = G_F^{-1}(s)\ \operatorname{diag}\,[R_1(s)\,G_{F11}(s), \ldots, R_m(s)\,G_{Fmm}(s)]. \tag{2.41}$$

Notînd cu

$$G_D(s) = G^{-1}_F(s)\ \operatorname{diag}\,[G_{F11}(s), \ldots, G_{Fmm}(s)] \tag{2.42}$$

aceea parte a regulatorului $G_R(s)$ care realizează decuplarea și cu

$$R(s) = \operatorname{diag}\,[R_1(s), \ldots, R_m(s)] \tag{2.43}$$

regulatorul propriu-zis, rezultă că (2.41) are forma

$$G_R(s) = G_D(s)R(s), \tag{2.44}$$

ceea ce înseamnă că sistemul cu structura din fig. IV.2 are acum structura din fig. IV.17, *a*, care este echivalentă cu cea din fig. IV.17, *b*.

Exemplul 2.3. Se consideră servomecanismul de poziționare de la 1.2.3, a cărui schemă bloc, pentru partea de reglare automată a turației este reprezentată în fig. IV. 12

Se cere să se rezolve problema stabilizării prin procedeul decuplării serie.

Examinînd schema bloc din fig. IV. 12 rezultă că sistemul are o parte decuplată (constituită din $G_1(s)$ și $G_2(s)$) și o parte cuplată (constituită din cele două sumatoare). Partea cuplată se caracterizează prin matricea de transfer

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

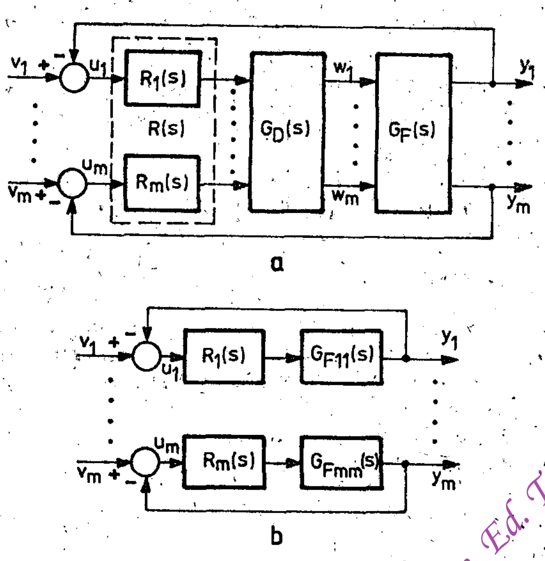


Fig. IV. 17. Schema bloc structurală a unui sistem automat multivariabil decuplat:
a — $G_D(s)$ — matricea de transfer decuplantă, $R_1(s), \ldots, R_m(s)$ — regulatoarele; *b* — schema bloc structurală echivalentă.

În aceste circumstanțe decuplarea se realizează cu ajutorul unui regulator (2.44) de forma

$$G_R(s) = M^{-1}R(s) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1(s) & 0 \\ 0 & R_2(s) \end{bmatrix}.$$

Structura sistemului decuplat este reprezentată în fig. IV. 18. Se obțin astfel două sisteme automate monovariabile ale căror funcții de transfer în circuit deschis, pentru valorile numerice de la 1.2.3 și $R_1(s) = k_1$, $R_2(s) = k_2$, au expresiile

$$G^1(s) = \frac{1}{2} R_1(s)\, G_1(s) = \frac{k_1\,(s^2 + 4s + 1)}{0{,}6\, s(0{,}5s^2 + 4s + 1)}$$

$$G^2(s) = \frac{1}{2} R_1(s)\, G_2(s) = \frac{10\, k_2 s}{s^2 + 4s + 1}.$$

Aplicînd criteriul Hurwitz (*teorema 5* de la II.1.1.2) polinoamelor polilor

$$P_0^1(s) = 0{,}3\, s^3 + (k_1 + 2{,}4)\, s^2 + (4\, k_1 + 0{,}6)\, s + k_1$$

$$P_0^2(s) = s^2 + (10\, k_2 + 4)\, s + 1$$

se obțin condițiile de stabilitate IMEM $k_1 \in (0,\ +\infty)$, $k_2 \in (-0{,}4,\ +\infty)$.

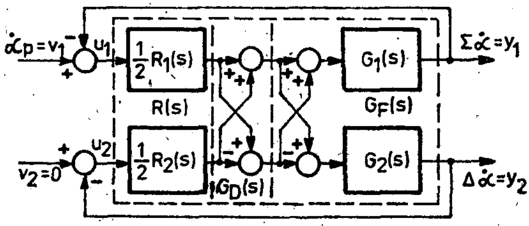


Fig. IV. 18. Schemă bloc structurală a sistemului automat multivariabil decuplat de la *exemplul* 2.3.

3. Sisteme automate multivariabile neliniare

3.1. Hiperstabilitatea

3.1.1. Structura sistemului automat multivariabil

Se consideră sistemul automat multivariabil neliniar cu schema bloc structurală din fig. IV.19, în care $G(s)$ este matricea de transfer a părţii liniare şi $F(t, y)$ este o funcţie vectorială neliniară, dependentă de timp. În situația în care v, u, w şi y sînt vectori m-dimensionali, matricea $G(s)$ este pătratică.

Fie

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; t \in \mathbf{R}_+, \; x \in \mathbf{R}^n, \; u \in \mathbf{R}^m, \tag{3.1}$$

$$y = Cx + Du, \; y \in \mathbf{R}^m, \tag{3.2}$$

o reprezentare intrare-stare-ieşire a părţii liniare, cu proprietatea că perechea (A, B) este complet controlabilă şi perechea (A, C) este complet observabilă, reprezentare numită *realizare minimală* a matricii $G(s)$.

Neliniaritatea $w = F(t, y)$ satisface inegalitatea de tip Popov

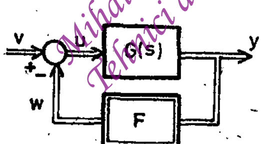


Fig. IV. 19. Schema bloc structurală a unui sistem automat multivariabil neliniar.

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t) w(t) \mathrm{d}t \geqslant -\gamma_0^2 \text{ pentru toţi } t_1 \geqslant t_0, \tag{3.3}$$

unde γ_0 este o constantă dependentă de condiţiile iniţiale şi independentă de t_1.

Relaţiile care descriu sistemul din fig. IV.19 sînt următoarele

$$Y(s) = G(s)\ U(s), \tag{3.4}$$

$$u = v - w, \tag{3.5}$$

$$w = F(t, y). \tag{3.6}$$

Întrucît noţiunea de hiperstabilitate se sprijină pe aceea de stabilitate internă, este necesar ca sistemul considerat să fie liber, adică $v = 0$. Dacă $v \neq 0$, dar cunoscut, prin schimbările $\widetilde{w} = w - v$ şi $\widetilde{F}(t, y) = F(t, y) - v$, ecuaţiile (3.5), (3.6) devin

$$u = -\widetilde{w} \tag{3.7}$$

$$\widetilde{w} = \widetilde{F}(t, y), \tag{3.8}$$

ceea ce înseamnă că sistemul (3.4), (3.7), (3.8) este liber.

3.1.2. Definiţii şi condiţii de hiperstabilitate

Conceptul de hiperstabilitate introdus în [P6] se concretizează în următoarele două definiţii.

Definiţia 1. Sistemul automat cu structura din fig. IV.19 se numeşte ***hiperstabil*** dacă are o stare de echilibru global stabilă pentru orice neliniaritate (3.6) care satisface inegalitatea (3.3).

Definiţia 2. Sistemul automat cu structura din fig. IV.19 se numeşte ***asimptotic hiperstabil*** dacă are o stare de echilibru global asimptotic stabilă pentru orice neliniaritate (3.6) care satisface inegalitatea (3.3).

Întrucît condiţiile de hiperstabilitate şi hiperstabilitate asimptotică pretind ca partea liniară a sistemului cu structura din fig. IV.19 să posede anumite proprietăţi, vom da în continuare încă două definiţii în acest sens.

Definiţia 3. Matricea $G(s)$ se numeşte *real pozitivă* dacă:

1° nu are nici un pol în semiplanul $\mathrm{Re}\ s > 0$;

2° polii de pe axa imaginară (atunci cînd există) sînt simpli şi matricea hermitică a reziduurilor corespunzătoare este pozitiv semidefinită;

3° $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ este o matrice hermitică pozitiv semidefinită (v. anexa E) pentru $\omega \in \mathbf{R}$, exceptînd acei ω_p pentru care $j\omega_p$ sînt poli ai matricii $G(s)$.

Definiţia 4. Matricea $G(s)$ se numeşte *strict real pozitivă* dacă:

1° Nu are nici un pol în semiplanul $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$;

2° $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ este o matrice hermitică pozitiv definită (v. anexa E) pentru toţi $\omega \in \mathbf{R}$.

Cu aceste elemente pregătitoare se pot enunţa următoarele rezultate, pentru a căror demonstraţie recomandăm consultarea lucrării [P6].

Teorema 1. O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. IV.19 să fie hiperstabil este ca matricea de transfer $G(s)$ să fie real pozitivă.

Un rezultat echivalent cu acesta, dar care se referă la realizarea minimală (3.1), (3.2), este următorul.

Teorema 2. O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. IV.19 să fie hiperstabil este ca să existe matricile P, simetrică şi pozitiv definită, şi Q, simetrică şi pozitiv semidefinită, astfel încît

$$PA + A^T P = -Q \quad \text{(ecuaţia Liapunov)} \tag{3.9}$$

şi matricea

$$M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

să fie pozitiv semidefinită, în care

$$S = C^T - PB \tag{3.11}$$

$$R = D + D^T. \tag{3.12}$$

În termenii *teoremei 2* se poate explicita o condiţie de tip inegalitate pentru partea liniară a sistemului automat. Într-adevăr, ţinînd seama de (3.1), (3.2), putem scrie succesiv

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T(t)\, u(t)\, dt = \frac{1}{2}\, x^T(t) P x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [(Cx + Du)^T u - \dot{x}^T P x] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\, x^T(t)\, P x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [-x^T (PA + A^T P)\, x + 2x^T (C^T - PB)\, u +$$

$$+ u^T (D + D^T)\, u]\, dt = \frac{1}{2}\, x^T(t)\, P x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + x^T S u +$$

$$+ u^T S^T x + u^T R u]\, dt = \frac{1}{2}\, x^T(t)\, P x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T \;\; u^T]\, M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\, x^T(t_0) P x(t_0),$$

deoarece P este pozitiv definită şi M este pozitiv semidefinită.

În virtutea relațiilor (3.3) și (3.5), în care $v = 0$, rezultă că partea liniară a sistemului din fig. IV.19 satisface dubla inegalitate

$$-\frac{1}{2}\, x^T(t_0)\, Px(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t_1} y^T(t)\, u(t)\, dt \leqslant \gamma_0^2, \qquad t_1 > t_0.$$

Exemplul *3.1.* Fie sistemul automat neliniar cu partea liniară

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s} \\[2ex] b & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul automat să fie hiperstabil.

Matricea $G(s)$ are un pol simplu $s = 0$ pe axa imaginară și matricea corespunzătoare a reziduurilor este

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Această matrice este pozitiv semidefinită numai pentru $a = 0$, deoarece pentru $a \neq 0$ ea nu este simetrică. În continuare, matricea

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\omega^2 + 1} & b \\[2ex] b & \dfrac{6}{\omega^2 + 9} \end{bmatrix}$$

trebuie să fie pozitiv semidefinită, fapt care are loc numai dacă $b = 0$.

Teorema 3. O condiție necesară și suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. IV.19 să fie asimptotic hiperstabil este ca matricea de transfer $G(s)$ să fie strict real pozitivă.

Exemplul *3.2.* Fie sistemul automat neliniar cu partea liniară

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s+2} \\[2ex] \dfrac{a}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Să se determine parametrul $a \in R$ astfel încît sistemul automat să fie asimptotic hiperstabil.

Matricea

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\omega^2+1} & \dfrac{4a}{\omega^2+4} \\ \dfrac{4a}{\omega^2+4} & \dfrac{2}{\omega^2+1} \end{bmatrix}$$

este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$|a| < \min_{\omega \in \mathbf{R}} \frac{\omega^2+4}{2(\omega^2+1)} = \lim_{\omega \to \pm\infty} \frac{\omega^2+4}{2(\omega^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Sistemele hiperstabile au proprietatea remarcabilă că la conectarea lor în paralel sau într-o structură cu reacţie negativă se obţin de asemenea sisteme hiperstabile. Această proprietate nu are loc la conectarea în serie a sistemelor hiperstabile, [P6].

3.2. Sisteme autoadaptive hiperstabile

O aplicaţie remarcabilă a teoriei hiperstabilităţii o constituie sinteza comenzii de autoadaptare a unui sistem automat pe baza erorii dintre starea unui *model de referinţă* şi *starea sistemului ajustabil*, fig. IV.20, [F5], [L7].

3.2.1. Procedeul de autoadaptare

Pentru explicarea schemei bloc structurale din fig. IV.20 şi implicit a procedeului de autoadaptare se porneşte de la ecuaţia modelului de referinţă

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m u, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.13}$$

şi a sistemului ajustabil

$$\dot{x} = A(e, t)x + B(e, t)u, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.14}$$

unde

$$e = x_m - x \tag{3.15}$$

este eroarea între starea modelului şi a sistemului ajustabil.

În aceste condiţii ecuaţia diferenţială a erorii are expresia

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A(e, t)]\, x + [B_m - B(e, t)]\, u. \tag{3.16}$$

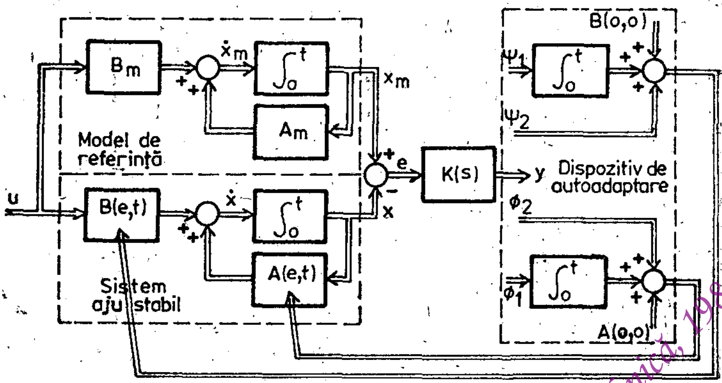


Fig. IV.20. Structura sistemului autoadaptiv hiperstabil.

Condiția de stabilitate asimptotică globală

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $e(0)$, orice $A_m - A(e, t)$ și orice $B_m - B(e, t)$, implică faptul că atunci cînd $u \neq 0$ trebuie să aibă loc $x \neq 0$ și $x_m \neq 0$. De aici rezultă că mecanismul de autoadaptare trebuie să conțină un element integrator care să memoreze $A(e, t)$ și $B(e, t)$ pentru $e(t) = 0$. În virtutea acestui fapt se poate scrie

$$A(e, t) = A(0, 0) + \int_0^t \Phi_1[y(\tau), t]\, d\tau + \Phi_2[y(t), t], \quad t \geqslant 0, \tag{3.17}$$

$$B(e, t) = B(0, 0) + \int_0^t \Psi_1[y(\tau), t]\, d\tau + \Psi_2[y(t), t], \quad t \geqslant 0, \tag{3.18}$$

unde Φ_1 și Ψ_1 realizează memorarea și Φ_2 și Ψ_2 se anulează pentru $y = 0$. Funcțiile matriceale Φ_1, Φ_2 și Ψ_1, Ψ_2, deocamdată necunoscute, urmează să se determine pe baza condiției de hiperstabilitate asimptotică a întregului sistem.

Mărimea y este ieșirea unui element corector liniar cu matricea de transfer $K(s)$. Acesta se introduce deoarece partea liniară a sistemului autoadaptiv trebuie să îndeplinească condiția de reală pozitivitate strictă impusă de *teorema 3*. Întrucît este posibil ca matricea de transfer a părții liniare să nu îndeplinească condițiile cerute, se alege un astfel de $K(s)$ încît respectivele condiții să fie satisfăcute.

3.2.2. Sinteza comenzilor de autoadaptare

Pentru realizarea sintezei se parcurg următorii trei paşi.

1° Se transfigurează schema bloc structurală din fig. IV. 20 astfel încît să se pună în evidenţă, conform schemei bloc structurale din fig. IV.19, partea liniară şi partea neliniară. Acest lucru este posibil introducînd funcţia

$$v(t) = [A_m - A(e, t)]x + [B_m - B(e, t)]u. \tag{3.19}$$

În aceste condiţii partea liniară a sistemului este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + v \\ Y(s) &= K(s)\ E(s), \end{aligned} \tag{3.20}$$

iar partea neliniară, ţinînd seama de (3.17) şi (3.18), de ecuaţia

$$w(t) = \left\{\int_0^t \Phi_1[y(\tau), t]\,d\tau + \Phi_2[y(t), t] + A(0, 0) - A_m\right\}x(t) +$$

$$+ \left\{\int_0^t \Psi_1[y(\tau), t]\,d\tau + \Psi_2[y(t), t] + B(0, 0) - B_m\right\}u(t). \tag{3.21}$$

Reacţia se realizează prin

$$v = -w. \tag{3.22}$$

Schema bloc structurală corespunzătoare ecuaţiilor (3.19) —(3.22) este reprezentată în fig. IV.21.

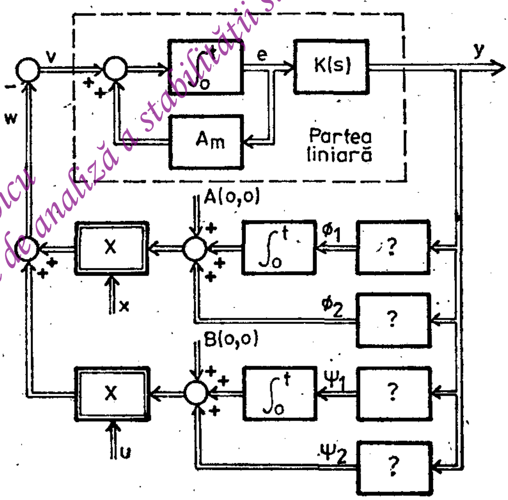


Fig. IV.21. O formă echivalentă a sistemului din fig. IV.20.

2° Se determină partea neliniară (blocurile marcate cu ? în fig. IV.21) rezolvînd inecuaţia integrală (3.3), în care $w(t)$ are expresia (3.21). Pentru determinarea funcţiilor Φ_1, Φ_2 şi Ψ_1, Ψ_2 se descompune inecuaţia (3.3), cu (3.21), în următoarele patru inecuaţii integrale parţiale:

$$\int_0^{t_1} y^T(t)\left\{\int_0^t \Phi_1[y(\tau), t]\,\mathrm{d}\tau + A(0,0) - A_m\right\} x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\gamma_1^2, \tag{3.23}$$

$$\int_0^{t} y^T(t)\Phi_2[y(t), t]\, x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\gamma_2^2, \tag{3.24}$$

$$\int_0^{t_1} y^T(t)\left\{\int_0^t \Psi_1[y(\tau), t]\,\mathrm{d}\tau + B(0,0) - B_m\right\} u(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\gamma_3^2, \tag{3.25}$$

$$\int_0^{t_1} y^T(t)\,\Psi_2[y(\tau), t]\, u(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\gamma_4^2 \tag{3.26}$$

cu condiţia ca $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 \leqslant \gamma_0^2$; evident, s-a considerat $t_0 = 0$.

În viziunea unei implementări cît mai simple a comenzilor de autoadaptare se caută pentru (3.23)—(3.26) soluţii de forma

$$\Phi_1[y(\tau), t] = M_A y(\tau)\,[N_A x(\tau)]^T, \tag{3.27}$$

$$\Psi_1[y(\tau), t] = M_B y(\tau)\,[N_B u(\tau)]^T, \tag{3.28}$$

$$\Phi_2[y(t), t] = P_A y(t)\,[Q_A x(t)]^T, \tag{3.29}$$

$$\Psi_2[y(t), t] = P_B y(t)\,[Q_B u(t)]^T, \tag{3.30}$$

unde M_A, N_A, M_B, N_B şi P_A, Q_A, P_B, Q_B sînt matrici constante adecvat alese.

Înlocuind (3.27), (3.29) şi (3.28), (3.30) respectiv în (3.17) şi (3.18) se obţin comenzile de autoadaptare

$$A(e, t) = A(0,0) + M_A\int_0^t y(\tau)\, x^T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, N_A^T + P_A y(t)\, x^T(t)\, Q_A^T, \quad t \geqslant 0, \tag{3.31}$$

$$B(e, t) = B(0,0) + M_B\int_0^t y(\tau)\, u^T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, N_B^T + P_B y(t)\, u^T(t)\, Q_B^T, \quad t \geqslant 0. \tag{3.32}$$

Avînd în vedere forma relațiilor (3.31), (3.32), se spune că s-a realizat o autoadaptare de tip PI.

Se mai poate arăta că inecuațiile integrale (3.24) și (3.26) admit și soluțiile

$$\Phi_2[y(t), t] = [\operatorname{sgn}\ y(t)][Q_A x(t)]^T, \tag{3.33}$$

$$\Psi_2[y(t), t] = [\operatorname{sgn}\ y(t)][Q_B\, u(t)]^T, \tag{3.34}$$

ceea ce duce la modificări corespunzătoare în expresiile comenzilor de autoadaptare și anume

$$A(e, t) = A(0, 0) + M_A \int_0^t y(\tau)\, x^T(\tau)\, d\tau\, M_A^T + \\ + [\operatorname{sgn}\ y(t)]\, x^T(t)\, Q_A^T, \quad t \geqslant 0, \tag{3.35}$$

$$B(e, t) = B(0, 0) + M_B \int_0^t y(\tau)\, u^T(\tau)\, d\tau\, M_B^T + \\ + [\operatorname{sgn}\ y(t)]\, u^T(t)\, Q_B^T, \quad t \geqslant 0. \tag{3.36}$$

Avînd în vedere forma relațiilor (3.35), (3.36) se spune că s-a realizat o autoadaptare de tip RI (releu + integral).

3° Se determină elementul de corecție $K(s)$ astfel încît partea liniară a sistemului cu structura din fig. IV.21, descrisă de matricea de transfer

$$G_K(s) = K(s)(Is - A_m)^{-1}, \tag{3.37}$$

să fie strict real pozitivă (*teorema 3* și *definiția 4*).

În final, facem observația că vectorul eroare e poate fi de dimensiuni mai mici decît dimensiunea lui x_m (sau x), în sensul că el poate fi obținut prin compararea numai a anumitor componente omoloage ale vectorilor x_m și x, după cum se arată în exemplul următor.

3.2.3. Aplicație: sistem de urmărire autoadaptiv hiperstabil

Se consideră sistemul automat de urmărire cu schema bloc structurală din fig. IV.22, în care $T = \text{const.}$, k_v este un parametru variabil în funcție de perturbațiile externe și k_x este un parametru ajustabil care trebuie modificat astfel încît $k_x k_v \approx 1$.

Adoptînd un model de referință cu funcția de transfer

$$G_m(s) = \frac{1}{Ts^2 + s + 1} \tag{3.38}$$

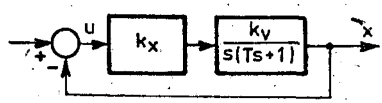


Fig. IV.22. Schema bloc structurală a unui sistem automat de urmărire.

ne propunem să sintetizăm o comandă autoadaptivă de ajustare a parametrului k_x pentru realizarea scopului propus.

Întrucît funcţia de transfer a sistemului ajustabil este

$$G_0(s) = \frac{k_x k_v}{Ts^2 + s + k_x k_v} \approx \frac{k_x k_v}{Ts^2 + s + 1}, \tag{3.39}$$

în care aproximaţia făcută nu introduce erori prea mari dacă $|\dot{k}_x|$ este suficient de mare, [C7], ecuaţia diferenţială a erorii

$$e = x_m - x$$

este

$$T\ddot{e} + \dot{e} + e = (1 - k_x k_v)\, u.$$

Comanda autoadaptivă are forma

$$k_x k_{v0} = k_{x0} k_{v0} + \int_0^t \Psi[y(\tau), t]\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.40}$$

unde k_{v0} = const. pe durata procesului de ajustare.

Introducînd notaţia

$$v(t) = (1 - k_x k_{v0})\, u(t)$$

şi ţinînd seama de (3.3) cu $w = -v$, se ajunge la inecuaţia

$$\int_0^{t_1} u(t) y(t) \left\{ \int_0^t \Psi[y(\tau), t]\, \mathrm{d}\tau + k_{x0} k_{v0} - 1 \right\} \mathrm{d}t \geqslant -\gamma_0^2, \quad t_1 > 0,$$

a cărei cea mai simplă soluţie este

$$\Psi[y(\tau), t] = k_0 u(\tau)\, y(\tau), \quad k_0 \geqslant (k_{x0} k_{v0} - 1)^2 / 2\gamma_0^2. \tag{3.41}$$

În aceste condiţii din (3.40) şi (3.41) rezultă

$$k_x = k_{x0} + \frac{k_0}{k_{v0}} \int_0^t u(\tau)\, y(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{3.42}$$

Partea liniară a sistemului este descrisă de funcţia de transfer

$$G_K(s) = \frac{1}{Ts^2 + s + 1} K(s). \tag{3.43}$$

Adoptînd

$$K(s) = a + bs \tag{3.44}$$

din condiția Re $G_K(j\omega) > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$, se obține

$$\frac{a + (b - aT)\,\omega^2}{(1 - T\omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

care este satisfăcută pentru $b > aT$, $a > 0$.

Vom remarca în final că legea de autoadaptare (3.42) și elementul de corecție PD (3.44) se obțin exact în aceeași formă dacă se face o sinteză pe baza metodei directe Liapunov, [C7].

Transformarea Laplace

Definiția 1. Fie $f(t)$ o funcție de variabilă reală, numită *funcție original*, care satisface următoarele condiții: 1° $f(t) = 0$, $t < 0$; 2° $f(t)$ este derivabilă pe porțiuni; 3° există $M > 0$ și $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $|f(t)| \leqslant Me^{at}$, $t \geqslant 0$. Funcția de variabilă complexă

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

se numește *transformata Laplace* sau *funcția imagine* a funcției $f(t)$.

Teoreme importante. Fie

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

1. *Liniaritatea*

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 F(s) + c_2 G(s), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \tag{A.1}$$

2. *Transformata derivatei originalului*

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(-0).$$

În general

$$\mathcal{L}\{\overset{(n)}{f}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - \ldots - \overset{(n-1)}{f}(-0). \tag{A.2}$$

Prin $\overset{(k)}{f}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, s-a notat derivata generalizată (în sens distribuții) de ordinul k a funcției $f(t)$ și

$$\overset{(k)}{f}(-0) = \lim_{t \nearrow 0} \overset{(k)}{f}(t).$$

3. *Transformata integralei originalului*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} F(s).$$

În general

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{t_n} \cdots \int_0^t f(t)\,dt^n\right\} = \frac{1}{s^n} F(s).$$

4. *Transformata translatei originalului*

$$\mathfrak{L}\{f(t-\tau)\} = \mathrm{e}^{-\tau s}F(s), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

5. *Translata imaginii*

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} \right\} = F(s-\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

6. *Transformata produsului de convoluție*

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = F(s)\,G(s).$$

7. *Valoarea inițială*

Dacă există $f(+0) = \lim\limits_{t \searrow 0} f(t)$ atunci

$$f(+0) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$$

8. *Valoarea finală*

Dacă există $f(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ atunci

$$f(+\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

9. *Teorema dezvoltării*

Dacă $F(s) = Q(s)/P(s)$, unde $P(s)$ și $Q(s)$ sînt două polinoame relativ prime între ele, cu grad $P = n >$ grad $Q = m$, atunci

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!}\, t^{q_i - j}\, \mathrm{e}^{s_i t},$$

în care

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}s^{j-1}} \left[(s - s_i)^{q_i} F(s)\right] \right\}_{s=s_i},$$

$$i = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, q_i,$$

și s_i, $i = 1, \ldots, r$, sînt polii distincți, fiecare de multiplicitate q_i, ai funcției $F(s)$, cu $q_1 + \ldots + q_r = n$.

Noțiunea de funcție de transfer. Fie un sistem dinamic liniar continuu și invariant în timp, descris de ecuația diferențială ordinară cu coeficienți constanți

$$a_n \overset{(n)}{y} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_0 y = b_m \overset{(m)}{u} + b_{m-1} \overset{(m-1)}{u} + \ldots + b_0 u, \quad t \geqslant 0 \tag{A.3}$$

cu condițiile

$$u(t) = 0, \quad y(s) = 0, \quad t < 0. \tag{A.4}$$

Aplicînd (A.1) și (A.2) pentru (A.3), sub condițiile (A.4), se obține

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

în care

$$Y(s) = L\{y(t)\}, \quad U(s) = L\{u(s)\},$$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{A.5}$$

Definiția 2. Funcția $G(s)$, de forma (A.5), care definește relația *intrare-ieșire* a sistemului (A.3) în domeniul funcțiilor imagine, se numește *funcția de transfer* a respectivului sistem.

ANEXA B

Transformarea $\mathscr{Z}$

După cum s-a văzut la I.1.4.8 în procesul de δ-eșantionare, din funcția $f(t)$ continuu variabilă, se obține seria de impulsuri Dirac

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta(t - kT),$$

unde T este perioada de eșantionare, $f_k = \lim_{t \searrow kT} f(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, și $f(t)$ este o funcție original (anexa A).

Transformata Laplace a funcției $f^*(t)$ are expresia

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, e^{-kTs}. \tag{B.1}$$

Introducînd variabila complexă $z = e^{Ts}$ din (B.1) se obține

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

Definiţia 1. Funcţia de variabilă complexă $F(z) = \mathcal{Z}\{f^*(t)\} = \mathcal{L}\{f^*(t)\}\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$

se numeşte transformata $\mathcal{Z}$ a seriei de impulsuri $f^*(t)$.

Întrucît seria de impulsuri se obţine din $f(t)$, se mai poate scrie $\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$, dar nu trebuie să se piardă din vedere că pentru a se putea determina $F(z)$ trebuie să se obţină mai întîi $f^*(t)$ sau şirul de valori f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. În aplicaţii poate fi mai avantajoasă această ultimă posibilitate, după cum se va vedea din următoarele două exemple.

Exemple

a) Pentru $f(t) = \sigma(t)$ — funcţia treaptă unitară, avem $f_k = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, şi $F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots$. Aceasta este o serie geometrică infinită cu raţia z^{-1}. Pentru $|z| > 1$ ea este convergentă şi are suma $\mathcal{Z}\{\sigma(t)\} = z/(z-1)$.

b) Pentru $f(t) = e^{at}$, $t \geqslant 0$, cu $a \in \mathbf{C}$, avem $f_k = e^{akT}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

şi
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z^{-1})^k = \frac{z}{z - e^{aT}}, \quad |z| > e^{T \operatorname{Re} a}.$$

Teoreme importante. Fie

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}, \quad G(z) = \mathcal{Z}\{g(t)\}.$$

1. *Liniaritatea*

$$\mathcal{Z}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 F(z) + c_2 G(z), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \tag{B.2}$$

2. *Transformata translatei originalului*

$$\mathcal{Z}\{f(t - mT)\} = z^{-m}\left[F(z) + \sum_{k=1}^{m} f_{-k} z^k\right], \quad m \in \mathbf{N},$$

$$\mathcal{Z}\{f(t + mT)\} = z^{m}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k}\right], \quad m \in \mathbf{N}. \tag{B.3}$$

3. *Teorema amortizării*

$$\mathcal{Z}\{f(t)\, e^{at}\} = F(e^{-aT} z), \quad a \in \mathbf{C}.$$

4. *Transformata „diferenţialei" originalului*

$$\mathcal{Z}\{f(t) - f(t - T)\} = \frac{z-1}{z} F(z) - f_{-1},$$

$$\mathcal{Z}\{f(t + T) - f(t)\} = (z - 1) F(z) - f_0 z.$$

5. *Transformata „integralei" originalului*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{k} f_i\right\} = \frac{z}{z-1} F(z).$$

6. *Transformata produsului de convoluţie*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}\right\} = F(z)\,G(z).$$

7. *Valoarea iniţială*
Dacă există $f_0 = \lim\limits_{t \searrow 0} f(t)$ atunci

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

8. *Valoarea finală*
Dacă există $f(+\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ atunci

$$f(+\infty) = \lim_{z \searrow 1} (z - 1)\,F(z).$$

Noţiunea de funcţie de transfer în z. Fie un sistem dinamic liniar discret şi invariant în timp descris de ecuaţia cu diferenţe cu coeficienţi constanţi

$$a_n y(t - nT) + a_{n-1} y(t - (n - 1)T) + \ldots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u\,(t - mT) + b_{m-1} u\,(t - (m - 1)\,T) + \ldots + b_0 u(t), \quad t = kT, \quad k \in \mathbf{N}, \qquad \text{(B.4)}$$

cu condiţiile

$$u\,(t) = 0, \quad y\,(t) = 0, \quad t < 0. \qquad \text{(B.5)}$$

Aplicînd (B.2) şi (B.3) pentru (B.4), sub condiţiile (B.5), se obţine

$$Y(z) = G(z)\,U(z),$$

în care

$$Y\,(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\}, \quad U\,(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\},$$

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{U(z)}. \qquad \text{(B.6)}$$

Definiţia 2. Funcţia $G(z)$, de forma (B.6), care defineşte relaţia *intrare-ieşire* a sistemului (B.4), se numeşte *funcţia de transfer în* z *a* respectivului sistem.

Tabel de transformate $\mathcal{Z}$ *şi de transformate Laplace uzuale*

$f(t)$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	1
$\sigma(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	$\dfrac{1}{s^2}$

t^n	$Tz\dfrac{z^{n-1}+\ldots}{(z-1)^{n+1}}$	$\dfrac{n}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{z \sin \omega T}{z^2-2z\cos \omega T+1}$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{z-\cos \omega T}{z^2-2z\cos \omega T+1}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{z\,e^{-aT}\sin \omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos \omega T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{\omega}{s^2+2as+\omega^2+a^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$z\,\dfrac{z-e^{-aT}\cos \omega T}{z^2-2z\,e^{-aT}\cos \omega T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{s+a}{s^2+2as+\omega^2+a^2}$
$t^{n-1}\,e^{-aT}$	$T^{n-1}z\,e^{-aT}\,\dfrac{z^{n-2}+\ldots}{(z-e^{-aT})^n}$	$\dfrac{(n-1)}{(s+a)^n}$

Calculul transformatei $\mathcal{Z}$ cu ajutorul transformatei Laplace. Tabelul de mai sus sugerează posibilitatea determinării transformatei $\mathcal{Z}$ cu ajutorul transformatei Laplace. Acest lucru este indicat mai ales atunci cînd se dispune de tabele de transformate Laplace detaliate și atunci cînd sistemul studiat conține elemente de transfer liniare invariante și continue în timp.

Dacă $F(s)$ este o fracție rațională este posibilă dezvoltarea ei în fracții simple. Conform tabelului de transformate $\mathcal{Z}$ de mai sus fiecărei fracții simple în s îi corespunde o anumită transformată $\mathcal{Z}$. Pe baza acestei corespondențe determinarea lui $F(z)$ nu implică calcule complicate.

De exemplu pentru $F(s) = \dfrac{1}{s(s+a)}$ putem scrie

$$F(z) = \mathcal{Z}\{F(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{as} - \frac{1}{a(s+a)}\right\} = \frac{1}{a}\left[\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}\right) = \frac{(1-e^{-aT})\,z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}.$$

Pentru $F(s) = e^{-T_m s}G(s)$ conform anexei A putem scrie $F(s) = \mathcal{L}\{g(t-T_m)\}$. Dacă $T_m = \alpha T$, $\alpha \in \mathbb{N}$, atunci, conform cu (B.3), obținem

$$F(z) = \mathcal{Z}\{F(s)\} = \mathcal{Z}\{g(t-\alpha T)\} = z^{-\alpha}G(z),$$

în condițiile în care $g(t) = 0$, $t < 0$.

Pentru o documentare completă asupra transformărilor Laplace și $\mathcal{Z}$ se pot consulta [A 2], [D 7], [N 2], [S 2], [J 2], [K 2], [K 4].

Spaţii vectoriale (liniare) normate

Definiţia 1. O mulţime X are structură de spaţiu vectorial (liniar) peste un corp K dacă $(X, +)$ este *grup comutativ* şi aplicaţia $\varphi : K \times X \to X$, numită *operaţie binară externă* şi notată multiplicativ (" · "), satisface următoarele condiţii: 1° $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$; 2° $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$; 3° $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$; 4° $1 \cdot x = x$ (1 este elementul unitar din K), oricare ar fi $x, y \in X$ şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$. Elementele din X se numesc *vectori*, iar elementele din K se numesc *scalari*. Operaţia binară externă se numeşte *înmulţire cu un scalar*.

Definiţia 2. Elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui spaţiu vectorial X se numesc *liniar independente* dacă din $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ rezultă $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. În caz contrar elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *liniar dependente*.

Definiţia 3. O submulţime $X_b \subseteq X$ a unui spaţiu vectorial se numeşte *bază* dacă fiecare $x \in X$ se exprimă univoc printr-o combinaţie liniară $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ a unui număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_b$. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se numesc *coordonatele vectorului* x.

Teorema 1. Orice spaţiu vectorial are o bază X_b. Fiecare bază X_b din X este formată din elemente liniar independente.

Teorema 2. Dacă un spaţiu vectorial X are o bază finită X_b atunci oricare altă bază X'_b are acelaşi număr de elemente ca şi X_b. Acest număr se numeşte dimensiunea spaţiului vectorial X.

Definiţia 4. O funcţie reală $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ se numeşte *normă* dacă satisface condiţiile: 1° $\|x\| > 0$ oricare ar fi $x \in X$, cu $x \neq 0$; 2° $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $\alpha \in K$; 3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ oricare ar fi $x, y \in X$; în cazul normelor de matrici se mai adaugă 4° $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ oricare ar fi $x, y \in X$.

Definiţia 5. Un spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu vectorial în care s-a definit o normă.

Exemple de norme

a) Norme de vectori

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|.$$

b) Norme de matrici

$$\|A\| = \max_{k} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|, \quad \|A\| = \max_{i} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad \|A\| = \max_{i,\,k} |a_{ik}|,$$

$$\|A\| = \left(\sum_{i,\,k=1}^{m,\,n} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2}.$$

Prin ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, și a_{ik}, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, s-au notat respectiv componentele lui x și elementele matricii A.

ANEXA D

Forme pătratice și hermitice. Criteriul Sylvester

Fie A o matrice reală de ordinul n, simetrică.
Prin definiție

$$y = x^T A x, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{D.1}$$

este o formă pătratică și A este matricea formei pătratice.

Definiția 1. Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt ***pozitiv definite*** dacă $y > 0$ pentru $x \neq 0$ și $y = 0$ pentru $x = 0$.

Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt ***negativ definite*** dacă $-y$ și, respectiv, $-A$ sînt pozitiv definite.

Definiția 2. Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt ***pozitiv semidefinite*** dacă $y \geqslant 0$ pentru $x \neq 0$ și $y = 0$ pentru $x = 0$.

Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt ***negativ semidefinite*** dacă, y și, respectiv, matricea $-A$ sînt pozitiv semidefinite.

Definiția 3. Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt ***nedefinite*** dacă (D.1) nu satisface condițiile *Definițiilor 1 și 2.*

Criteriul Sylvester, [B 5], [C 8], [G 1], [K 5]. Forma pătratică (D.1) și, respectiv, matricea A sînt:

1° pozitiv definite dacă și numai dacă toți minorii principali diagonali ai matricii A sînt pozitivi;

2° negativ definite dacă și numai dacă toți minorii principali diagonali ai matricii A sînt, cei de ordin impar — negativi, iar cei de ordin par — pozitivi;

3° pozitiv semidefinite dacă şi numai dacă $\det A = 0$ şi toţi minorii principali diagonali sînt nenegativi;

4° negativ semidefinite dacă şi numai dacă $\det A = 0$ şi toţi minorii principali diagonali sînt, cei de ordin impar — nepozitivi, iar cei de ordin par — nenegativi;

5° nedefinite dacă şi numai dacă nu au loc condiţiile 1° — 4°.

Fie A o matrice complexă de ordinul n cu proprietatea $A = A^*$, unde $(\ )^*$ reprezintă operaţia de conjugare şi transpunere. Matricea A se numeşte *matrice hermitică*. Prin definiţie

$$y = x^*Ax, \quad x \in \mathbf{C}^n, \tag{D.2}$$

este o *formă hermitică*.

Întrucît y ia valori pe $\mathbf{R}$, *definiţiile 1—3* se extind în mod corespunzător şi pentru D.2). În acest caz se poate aplica *criteriul Sylvester*, care îşi păstrează valabilitatea.

ANEXA E

O formulă a lui Schur

Fie M o matrice pătratică de ordinul n, cu partiţionarea

$$M = \left[\begin{array}{c:c} M_{11} & M_{12} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right],$$

în care M_{11} este o matrice pătratică de ordinul m, cu $\det M_{11} \neq 0$, M_{22} este o matrice pătratică de ordinul $n - m$ $(n > m)$ şi M_{12}, M_{21} sînt matrici de dimensiuni adecvate.

În aceste condiţii are loc

$$\det M = \det M_{11} \det (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1} M_{12}). \tag{E.1}$$

Demonstraţia acestei formule se bazează pe calculul determinantului produsului de matrici

$$\left[\begin{array}{c:c} M_{11}^{-1} & 0 \\ \hdashline -M_{21}M_{11}^{-1} & I_{n-m} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} M_{11} & M_{12} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right], \tag{E.2}$$

în care I_{n-m} este matricea unitate de ordinul $n - m$.

Într-adevăr, trecînd la determinanţi în (E.2) se obţine

$$\det M_{11}^{-1} \det M = \det \left[\begin{array}{c:c} I_m & M_{11}^{-1}M_{12} \\ \hdashline 0 & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{array}\right], \tag{E.3}$$

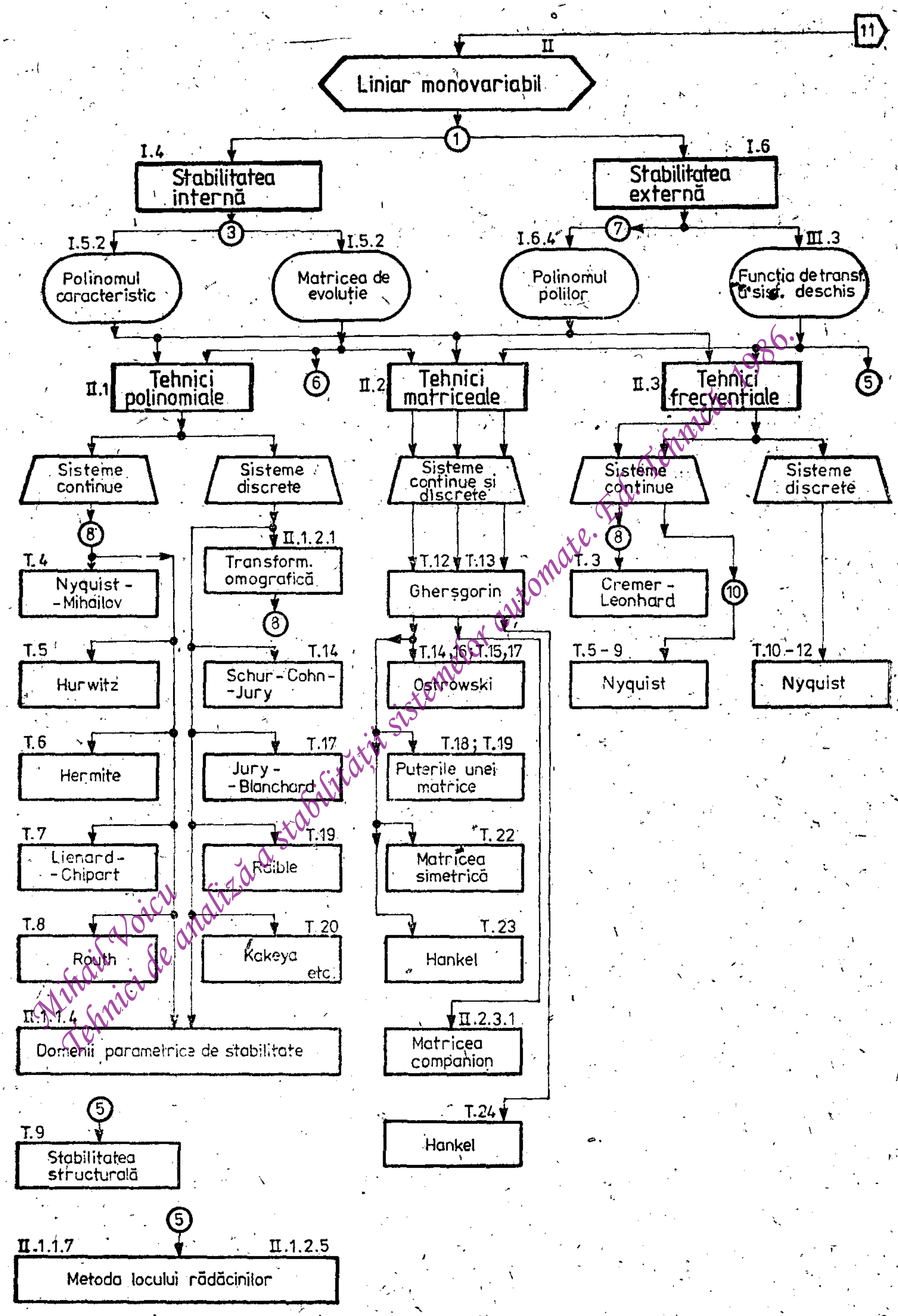
unde I_m este matricea unitate de ordinul m. După calcule elementare, din (E.3) se obţine (E.1).

Schema analizei stabilității sistemelor automate

Această schemă este o structură ierarhică de tip graf orientat (arborescent cu legături între ramuri) și reprezintă o imagine globală a conținutului cărții. Ea constituie un suport util pentru evidențierea conexiunilor și confluențelor existente între conceptele și rezultatele din sfera stabilității și, în acest context, pentru facilitarea unui studiu sistematic al tehnicilor de analiză a stabilității sistemelor automate, care permite abordarea chestiunilor de detaliu în condițiile menținerii unei vederi de ansamblu asupra întregului sistem de concepte și rezultate din cuprinsul cărții. Totodată, pentru cititorul familiarizat cu conținutul cărții sau cu problematica stabilității sistemelor automate, schema alăturată poate constitui un ghid util în utilizarea respectivelor concepte și rezultate.

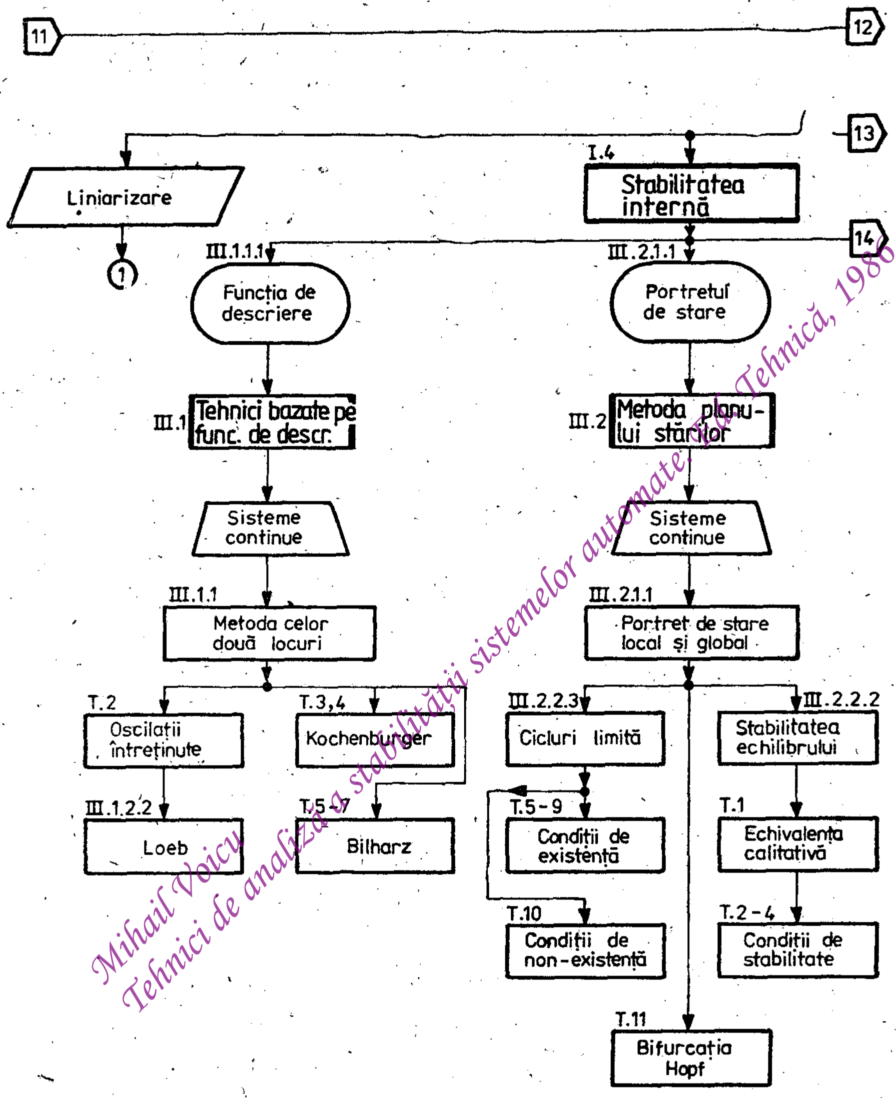
Evident, această schemă nu este exhaustivă și ea poate fi completată și cu alte rezultate existente în bogata literatură consacrată stabilității sistemelor automate.

Se remarcă cu ușurință că nivelele ierarhice din cadrul schemei se disting prin formele diferite ale blocurilor, conexiunile între ramuri sînt marcate prin cercuri numerotate și blocurile care se referă la rezultate din cuprinsul cărții sînt însoțite de trimiteri corespunzătoare la subcapitole, paragrafe și teoreme.

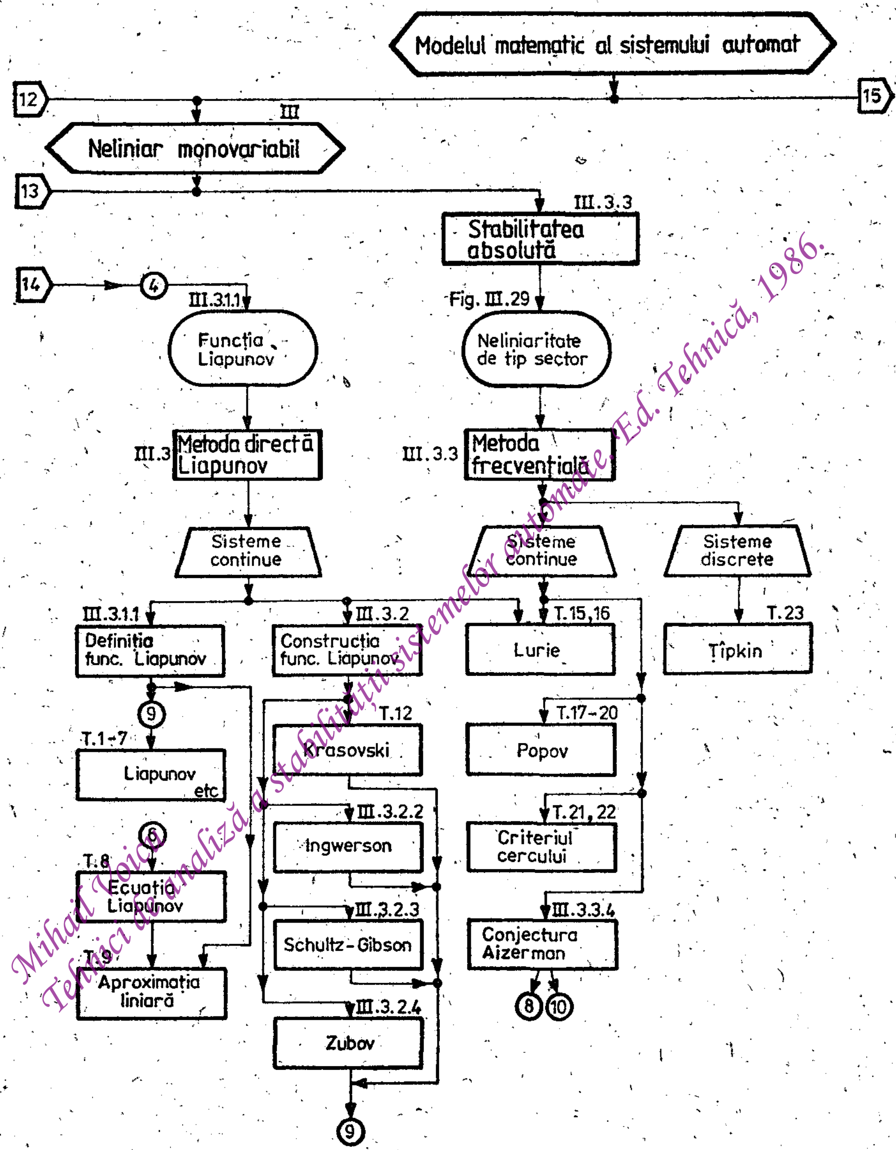


11
II
Liniar monovariabil
1
I.4
Stabilitatea internă
I.6
Stabilitatea externă
3
7
I.5.2
I.5.2
I.6.4
III.3
Polinomul caracteristic
Matricea de evoluție
Polinomul polilor
Funcția de transf. a sist. deschis
II.1
Tehnici polinomiale
6
II.2
Tehnici matriceale
II.3
Tehnici frecvențiale
5
Sisteme continue
Sisteme discrete
Sisteme continue și discrete
Sisteme continue
Sisteme discrete
8
T.4
Nyquist - - Mihailov
II.1.2.1
Transform. omografică
8
T.12 T.13
Ghersgorin
8
T.3
Cremer - Leonhard
10
T.5
Hurwitz
T.14
Schur - Cohn - - Jury
T.14,16 T.15,17
Ostrowski
T.5 - 9
Nyquist
T.10 - 12
Nyquist
T.6
Hermite
T.17
Jury - - Blanchard
T.18; T.19
Puterile unei matrice
T.7
Lienard - - Chipart
T.19
Raible
T.22
Matricea simetrică
T.8
Routh
T.20
Kakeya etc.
T.23
Hankel
II.1.1.4
Domenii parametrice de stabilitate
II.2.3.1
Matricea companion
5
T.9
Stabilitatea structurală
T.24
Hankel
5
II.1.1.7
II.1.2.5
Metoda locului rădăcinilor

a

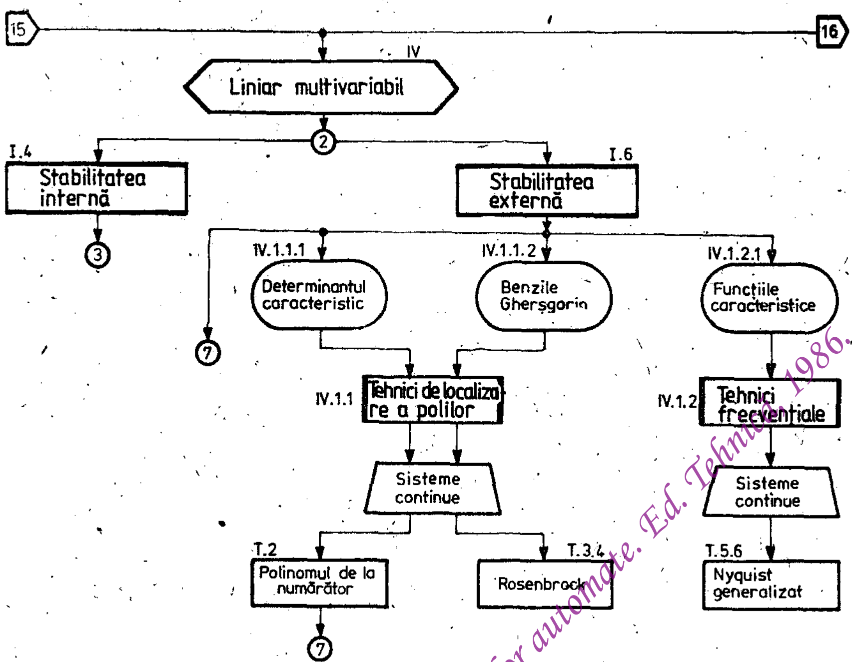

11
12
13
14
Liniarizare
1
I.4
Stabilitatea internă
III.1.1.1
Funcția de descriere
III.2.1.1
Portretul de stare
III.1
Tehnici bazate pe func. de descr.
III.2
Metoda planului stărilor
Sisteme continue
Sisteme continue
III.1.1
Metoda celor două locuri
III.2.1.1
Portret de stare local și global
T.2
Oscilații întreținute
T.3,4
Kochenburger
III.2.2.3
Cicluri limită
III.2.2.2
Stabilitatea echilibrului
III.1.2.2
Loeb
T.5-7
Bilharz
T.5-9
Condiții de existență
T.1
Echivalența calitativă
T.10
Condiții de non-existență
T.2-4
Condiții de stabilitate
T.11
Bifurcația Hopf

b

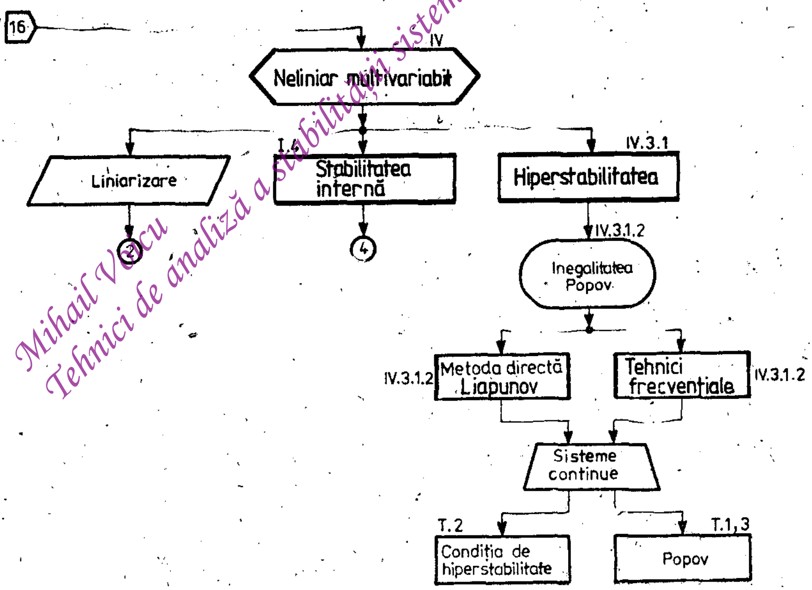


Modelul matematic al sistemului automat
12
15
III
Neliniar monovariabil
13
III.3.3
Stabilitatea absolută
14
4
III.3.1.1
Funcţia Liapunov
Fig. III.29
Neliniaritate de tip sector
III.3
Metoda directă Liapunov
III.3.3
Metoda frecvenţială
Sisteme continue
Sisteme continue
Sisteme discrete
III.3.1.1
III.3.2
T.15,16
T.23
Definiţia func. Liapunov
Construcţia func. Liapunov
Lurie
Ţîpkin
9
T.12
T.17–20
T.1÷7
Krasovski
Popov
Liapunov etc
III.3.2.2
T.21, 22
6
Ingwerson
Criteriul cercului
T.8
Ecuaţia Liapunov
III.3.2.3
III.3.3.4
T.9
Schultz-Gibson
Conjectura Aizerman
Aproximaţia liniară
8
10
III.3.2.4
Zubov
9

c


15
16
IV
Liniar multivariabil
2
I.4
Stabilitatea internă
3
I.6
Stabilitatea externă
IV.1.1.1
Determinantul caracteristic
IV.1.1.2
Benzile Ghersgorin
IV.1.2.1
Funcțiile caracteristice
7
IV.1.1
Tehnici de localizare a polilor
IV.1.2
Tehnici frecvențiale
Sisteme continue
Sisteme continue
T.2
Polinomul de la numărător
T.3.4
Rosenbrock
T.5.6
Nyquist generalizat
7

d


16
IV
Neliniar multivariabil
Liniarizare
I.4
Stabilitatea internă
IV.3.1
Hiperstabilitatea
2
4
IV.3.1.2
Inegalitatea Popov
IV.3.1.2
Metoda directă Liapunov
Tehnici frecvențiale
IV.3.1.2
Sisteme continue
T.2
Condiția de hiperstabilitate
T.1,3
Popov

e

Bibliografie

A. 1. *Angheluță, T.* **Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă.** Ed. Tehnică, București, 1957.

2. *Angot, A.* **Complemente de matematici.** Ed. Tehnică, București, 1961.

3. *Aizerman, M. A., Gantmaher, F. R.* **Uslovja suscestvovanja oblasti ustoicivosti dlja odnokonturnoi sistemî avtomaticeskogo regulirovanja.** Prikl. mat. i meh, 1, 1954.

4. *Aizerman, M. A.* **Teorja avtomaticeskogo regulirovanja.** Nauka, Moskva, 1966.

5. *Arrowsmith, K. D., Place, M. C.* **Ordinary Differential Equations.** Chapman & Hall, London, 1982.

6. *Aizerman, M. A.* **O shodimosti protessa regulirovanja posle bolșîh nacialnîh otklonenii.** Avt. i telemeh., 7 (1946), 2—3, 148—169.

7. *Aizerman, M. A., Gantmaher, F. R.* **Die absolute Stabilität von Regelsystemen.** R. Oldenbourg, München, 1965.

8. *Amann, H.* **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Gruyter, Berlin, 1983.

B. 1. *Bulucea, C., Vais, M., Profeta, H.* **Circuite integrate liniare.** Ed. Tehnică, București, 1975.

2. *Barnett, S.* **Polynomials and Linear Control Systems.** Dekker, New York, 1983.

3. *Barmish, B. R.* **Invariance of the Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients.** IEEE Trans. AC-29 (1984), 10, 935—936.

4. *Becker, C., Litz, L., Siffling, G.* **Regelungstechnik,** Übungsbuch. AEG — Telefunken, Berlin, 1982.

5. *Bellman, R.* **Introduction to Matrix Analysis.** McGraw, New York, 1960.

6. *Belea, C.* **Automatica neliniară.** Ed. Tehnică, București, 1984.

7. *Belea, C.* **Teoria sistemelor: sisteme neliniare.** Ed. Did. și Ped., București, 1985.

8. *Bilharz, H.* **Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz.** ZAMM, 24 (1944), 77—82.

9. *Barbasin, E. A., Krasovski, N. N.* **Ob ostoicivosti dvijenia v țelom.** Dokl. Akad. Nauk., 86 (1952), 13, 453—456.

10. *Barnett, S.* **Introduction to Mathematical Control Theory.** Clarendon, Oxford, 1975.

11. *Boullion, T. L., Odell, P. L.* **Generalized Inverse Matrices.** Wiley, New York, 1971.

12. *Bejan, I., Balaban, G.* **Automatizări și telecomenzi în electroenergetică.** Ed. Did. și Ped., București, 1976.

13. *Budișan, N.* **Automatizări și telecomenzi.** Ed. Did. și Ped., București, 1968.

14. *Brocket, R. W.* **Finite Dimensional Linear Systems.** Wiley, New York, 1970.

C. 1. *Călin, S.* **Regulatoare automate.** Ed. Did. și Ped., București, 1976.

2. *Cernețki, V. I., Diduk, G. A., Potapenko, A. A.* **Metode matematice și algoritmi în studiul sistemelor automate.** Ed. Tehnică, București, 1973.

3. *Csaki, F.* **Modern Control Theories.** Akad. Kiado, Budapest, 1972.

4. *Crandall, M. G.* **A generalization of Peano's existence theorem and flow invariance.** Proc. AMS, 36 (1972), 151—155.
5. *Cronin, J.* **Differential Equations.** Dekker, New York, 1980.
6. *Cetaev, N. G.* **The Stability of Motion.** Pergamon, Oxford, 1961.
7. *Călin, S., Belea, C.* **Sisteme automate adaptive și optimale.** Ed. Tehnică, București, 1971.
8. *Creangă, I., Haimovici, C.* **Algebră liniară.** Ed. Did. și Ped., București, 1962.
9. *Corduneanu, A.* **Ecuații diferențiale cu aplicații în electrotehnică.** Facla, Timișoara, 1981.

D. 1. *Dongara, I. I., Bunch, I. R., Moler, C. B., Stewart, C. W.* **LINPACK, User's Guide.** SIAM, Philadelphia, 1979.
2. *Dodescu, Gh.* **Metode numerice în algebră.** Ed. Tehnică, București, 1979.
3. *Datta, N. B.* **Generalized Hankel matrices of Markov parameters and their application to control problems.** Lin. Algebra and Appl., 62 (1984), 139—154.
4. *Datta, N. B.* **Applications of Hankel matrices of Markov parameters to the solutions of the Routh — Hurwitz and Schur — Cohn problems.** J. Math. Anal. Appl., 68 (1979), 276—290.
5. *Davison, E. J., Wang, S. H.* **On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback.** IEEE Trans. AC-20 (1975), 516—518.
6. *Dumitrache, I.* **Tehnica reglării automate.** Ed. Did. și Ped., București, 1980.
7. *Doetsch, C.* **Handbuch der Laplace Transformation,** I—III. Birkhäuser, Basel, 1950—1956.
8. *Dranfield, P., Haber, F. D.* **Instruire programată în metoda locului rădăcinilor.** Ed. Tehnică, București, 1980.

F. 1. *Föllinger, O.* **Regelungstechnik.** AEG — Telefunken, Berlin, 1980.
2. *Föllinger, O.* **Lineare Abtastsysteme.** Oldenbourg, München, 1974.
3. *Föllinger, O.* **Nichtlineare Regelungen.** Oldenbourg, München, 1970 (ediția I); 1979 (ediția II).
4. *Fletcher, L. R.* **On pole placement in liniar multivariable systems with direct feedthrough**: I. Theoretical considerations, Int. J. Control, 33, (1981), 739—749; II. Computational consideration, Int. J. Control, 33 (1981), 1147—1154.
5. *Faure, P., Clarget, M., Germain, F.* **Opérateurs rationnels positifs.** Dunod, Paris, 1979.

G. 1. *Gantmaher, F. R.* **Teoria matriț.** Nauka, Moskva, 1966.
2. *Gourlay, R. A., Watson, A. G.* **Computational Methods for Matrix Eigenproblems.** Wiley, New York, 1973.
3. *Gibson, J. E.* **Sisteme automate neliniare.** Ed. Tehnică, București, 1967.
4. *Gutman, S., Jury, I. E.* **A general theory for matrix root-clustering in subregions of complex plane.** IEEE Trans. AC-26 (1981), 4, 853—863.
5. *Göldner, K., Kubik, S.* **Nichtlineare Systeme der Regelungstechnik.** Technik, Berlin, 1978.

H. 1. *Haimovici, A.* **Ecuații diferențiale și ecuații integrale.** Ed. Did. și Ped., București, 1965.
2. *Hautus, M. L. J.* **Optimal control of differential systems with discontinuous right-hand side.** Ph. D. Thesis, Techn. University, Eidhoven, 1970.
3. *Hartman, P.* **Ordinary Differential Equations.** Wiley, New York, 1964.
4. *Hahn, W.* **Stability of Motion.** Springer, Berlin, 1967.
5. *Hautus, M. L. J.* **Strong detectability and observers.** Lin. Algebra and Appl., 50 (1983), 353—368.
6. *Hăngănuț, M.* **Automatica.** Ed. Did. și Ped., București, 1971.
7. *Hormann, K.* **Direkte Methoden der Stabilitätsprüfung.** Technik, Berlin, 1975.

I. 1. *Ionescu, Vl.* **Sisteme liniare.** Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1973.

2. *Ionescu, Vl.* **Sinteza structurală a sistemelor liniare.** Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1979.

3. *Ingwerson, R. D.* **A modified Lyapunov method for nonlinear stability analysis.** Trans. IRE AC-6 (1961), 199–210.

4. *Iakubovici, V. A.* **Absoliutnaja ustoicivosti nelineinîh reguliruemîh sistem v criticeskih sluciaiah.** Avt. i telemeh., 24 (1963), 3, 273–282; 24 (1964), 6, 655–668; 25 (1965), 5.

5. *Ionescu, Vl.* **Teoria sistemelor; sisteme liniare.** Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1985.

J. 1. *Jury, E. I.* **A simplified stability criterion for linear discrete systems.** Proc. IRE, 50 (1962), 1493–1500.

2. *Jury, E. I.* **Theory and Application of the z - Transforme Method.** Wiley, New York, 1964.

K. 1. *Kalman, R. E., Falb, P. L., Arbib, M. A.* **Teoria sistemelor dinamice.** Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976.

2. *Kuo, B. C.* **Sisteme automate cu eşantionare.** Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

3. *Krasovski, N. N.* **O globalnoi ustoicivosti sistem nelineinîh differenţialnîh uravnenii.** Prikl. mat. i meh. 18 (1954), 735–737.

4. *Kuo, B. C.* **Digital Control Systems.** Holt-Sauders, New York, 1981.

5. *Kurosh, A.* **Higher Algebra.** Mir, Moscow, 1980.

6. *Kokotovic, V. P.* **Control theory in the 80's: trends in feedback design.** 9th World Congress of IFAC, Budapest, 2–6 July, 1984.

L. 1. *Lehnigk, S. H.* **Stability Theorems for Linear Motions with an Introduction to Liapunov's Direct Method.** Prentice-Hall, New Jersey, 1966.

2. *Litz, L.* **Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren.** Hochschul Verlag, Stuttgart, 1979.

3. *Liapunov, A. M.* **Problème general de la stabilité du mouvement.** Ann. Fac. Sci., Toulouse, 9 (1947).

4. *Lurie, E. A.* **Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung.** Akad. Verlag, Berlin, 1957.

5. *Lovass-Nagy, V., O'Kennon, R. M., Rabson, G.* **Pole assignment using matrix generalized inverses.** Int. J. Syst. Sci., 12 (1981), 3, 383–392.

6. *Luenberger, G. D.* **Observing the state of linear system.** IEEE Trans. AC-11 (1964), 2, 74–80.

7. *Landau, D. I., Courtiol, B.* **Design of multivariable adaptive model following control systems.** Automatica, 10 (1974), 483–494.

8. *Lefschetz, S.* **Stability of nonlinear control systems.** Academic Press, New York, 1965.

9. *Leipholz, H.* **Stability Theory.** Academic Press. New York, 1970.

10. *Luenberger, G. D.* **Introduction to Dynamic Systems.** Wiley, New York, 1979.

11. *Lunze, J.* **Robust Multivariable Feedback Control.** Akad. der Wiss. der DDR, ZKI Inf. 3/84, 1–101.

M. 1. *Martin jr., R. H.* **Differential equations on closed subsets of a Banach space.** Trans. AMS, 179 (1973), 399–414.

2. *Marsden, J. E., McCracken, M.* **The Hopf Bifurcation and Its Applications.** Appl. Math. Sci., vol. 19, Springer, Berlin, 1976.

N. 1. *Nejmark, I. J.* **Ob apredelenii parametrov, pri kotorîh sistema avtomaticeskogo regulirovanja ustoiciva.** Avt. i telemeh., 1943, 3.

2. *Nixon, F.* **Handbook of the Laplace Transformation.** Tables and Exemples. Prentice-Hall, New Jersey, 1960.

O. 1. *Ostrowski, M. A.* **Notes on bounds for determinants with dominant principal diagonals.** Proc. AMS, 3 (1952), 26–30.

F. 1. *Postlethwaite, I., Mac Farlane, J. G. A.* **A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems.** Springer, Berlin, 1979.

2. *Pavel, N., Vrabie, I.* **Differential equations associated with continuous and dissipative time-dependent domain operators.** Lecture Notes in Math., 737, Springer, Berlin, 1979, 236–250.

3. *Pavel, H. N.* **Differential Equations, Flow Invariance and Applications.** Pitman, Boston, 1984.

4. *Popov, V. M.* **Criterii de stabilitate pentru sisteme neliniare de reglare automată bazate pe utilizarea transformatei Laplace.** Stud. şi cercetări de energ., 9 (1959), 1, 119–135.

5. *Popov, V. M., Halanay, A.* **Ob ustoicivosti nelineinîh sistem avtomaticeskogo regulirovanja s zapazdîvaiuşcim argumentom.** Avt. i telemeh., 23 (1962), 7.

6. *Popov, V. M.* **Hiperstabilitatea sistemelor automate.** Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1966. Hyperstability of Automatic Control Systems. Springer, Berlin, 1973.

7. *Popov, V. M.* **Ob absolutnoi ustoicivosti nelineinîh sistem avtomaticeskogo regulirovanja.** Avt. i telemeh., 22 (1961), 961–979.

8. *Popov, V. M.* **Kriterii kacestva nelineinîh reguliruemîh sistem.** 1-Kongr. AFAK, Izd. AN SSSR, Moskva, 1961.

9. *Porter, B.* **Synthesis of Dynamical Systems.** Nelson, London, 1969.

10. *Parks, C. P., Hahn, V.* **Stabilitätstheorie.** Springer, Berlin, 1981.

R. 1. *Roth, H.* **Ein neues Verfahren zur Ordnungsreduktion und Reglerentwurf auf der Basis der reduzierten Modells.** VDI, Düsseldorf, 1984.

2. *Răsvan, Vl.* **Stabilitatea absolută a sistemelor automate cu întîrziere.** Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1975.

3. *Rosenbrock, H. H.* **State Space and Multivariable Theory.** Nelson London, 1970.

S. 1. *Smith, B. T., Boyle, J.M., Dongara, I. I., Garbow, B. S., Ikebe, Y. Klema, V. C., Maler, C. B.* **Matrix Eigensystem Routines.** EISPACK Cuide. Springer, Berlin, 1976.

2. *Sabac, I.* **Matematici speciale.** Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1965.

3. *Schulz, G. D., Gibson, E. J.* **The variable gradient method for generating Ljapunov functions.** Trans. AIEE, 81 (1962), 203–210.

4. *Siljak, D. D.* **Nonlinear Systems.** Wiley, New York, 1969.

5. *Siljak, D. D.* **Connective stability of competitive equilibrium.** Automatica, 11 (1975) 389–400.

6. *Savin, Gh., Rosman, H.* **Circuite electrice neliniare şi parametrice.** Ed. Tehnică, Bucureşti, 1973.

7. *Sebastian, L.* **Automatica,** Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1974.

T. 1. *Tsypkin, Ya. Z.* **Über den Zusammenhang zwischen des Kennlinie eines nichtlinearen Gliedes und seiner Beschreibungsfunktion.** Regelungstechnik, 6 (1958), 285.

2. *Tsypkin, Ya. Z.* **Absolutnîi ustoicivosti polojenia ravnovenia i proţessov v nelineinîh sistemah.** Avt. i telemeh., 24 (1963), 12, *1601–1615.*

3. *Truxal, G. J.* **Automatic Fedback Control System Synthesis.** McGraw, New York, 1955.

4. *Teodorescu, D.* **Sisteme automate deterministe.** Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984.

U. 1. *Utkin, V. I.* **Sliding Modes.** Mir, Moscow, 1982.

2. *Unbehauen, R.* **Systemtheorie.** Oldenbourg, München, 1983.

V. 1. *Varga, A., Sima, V.* **BIMAS — A basic mathematical package for computer — aided systems analysis and design.** 9th World Congress of IFAC, Budapest, July 2–6, 1984, Preprints, VIII, 202–207.

2. *Voicu, M.* **Componentwise asymptotic stability of linear constant dynamical systems.** IEEE Trans. AC-29 (1984), 10, 937–939.

3. *Voicu, M.* **Free response characterization via flow invariance.** 9th World Congress of IFAC, Budapest, July 2—6, 1984, Preprints, V, 12—17.
4. *Voicu, M.* **On the determination of the linear state feedback matrix.** 5th Int. Conf. on Control Syst. and Comp. Sci., Polytech. Inst. of Bucharest, June 8—11, 1983, I, 119—123.
5. *Voicu, M.* **Evolution on control and state hyperintervals.** 6th Int. Conf. on Control Syst. and Comp. Sci., Politech. Inst. of Bucharest, May 22—25, 1985, I, 81—83.
6. *Voicu, M.* **Gerschgorinsche Kreise und die komponentenweise Stabilisierung.** Bul. Inst. politehn. Iași, 1985, 45—50.
7. *Voicu, M.* **Ein Anwendungsbeispiel der komponentenweisen Stabilisierung.** Bul. Inst. politehn. Iași, 1985, 57—60.
8. *Voicu, M.* **Structural properties of the spatial manipulating systems in connection with the state and control constraints.** IFAC Symposium on Robot Control, Barcelona, November 6—8, 1985, Preprints, 425—428.
9. *Vazaca, Cr.* **Analiza și sinteza sistemelor automate liniare.** Ed. Acad. RSR, București, 1961.
10. *Voicu, M., Păstrăvanu, O.* **Stabilizarea sistemelor automate cu obiect instabil IMEM**; studiu de caz. Sesiunea șt. a Fac. de electrot., Iași, 16—17 mai 1986, vol. III, 127—134.
11. *Voicu, M.* **Stabilitatea sistemelor dinamice.** Lucrare de diplomă, Facultatea de matematică, Univ. „Al. I. Cuza", Iași, 1977.
12. *Voicu, M.* **Teoria sistemelor.** Inst. Politehnic, Iași, 1980.
13. *Voicu, M.* **On the application of the flow-invariance method in control theory and desing** 10th World Congress of IFAC, München.

W. 1. *Wilkinson, J. H.* **The Algebraic Eigenvalue Problem.** Oxford Univ. Press, 1965.
2. *Wilkinson, J. H., Reinsch, C.* **Handbook for Automatic Computation.** Springer, Berlin, 1971.
3. *Willems, J. L.* **Stability Theory of Dynamical Systems.** Nelson, London, 1970.
4. *Wonham, M. W.* **On pole assignment in multiinput controllable linear systems.** IEEE Trans. AC-12 (1967), 660—665.

Z. 1. *Zamfirescu, M., Oprescu, I.* **Automatizarea cuptoarelor industriale.** Ed. Tehnică, București, 1971.
2. *Zubov, V.* **Mathematical Methods of the Study of Automatic Control.** Academic Press, New York, 1962.
3. *Zypkin, J. S.* **Theorie der linearen Impulssysteme.** Oldenbourg, München, 1967.
4. *Zoubov, V.* **Theorie de la commande**, Mir, Moscou, 1978.

Sistemul de serii și colecții în automatică-informatică-electronică-management

BIBLIOTECA DE AUTOMATICĂ-INFORMATICĂ-ELECTRONICĂ-MANAGEMENT

I. *Seria* FUNDAMENTE

— Teme cuprinzătoare, reprezentative
— Formalism matematic cu expunere concisă, riguroasă, dar accesibilă
— Traduceri de mare notorietate
— Lucrări originale ale profesorilor, cercetătorilor, specialiștilor români de prestigiu
— Abordare multidisciplinară, sistemică

II. *Seria* PRACTICĂ

— Tematici teoretico-aplicative
— Situații tipice în proiectare, tehnologie
— Material tabelar și grafic
— Îndrumar al activității după criterii metodice și eficiente

III. *Seria* INIȚIERE

— Informare-instruire în domenii noi ce depășesc pregătirea clasică
— Introduceri adresate specialiștilor; un ciclu separat de ABC-uri pentru cadre medii sau nespecialiști
— Tratare sugestivă, grafică, cu aparat matematic accesibil
— Sistematizarea preocupărilor ulterioare

IV. *Seria* AUTOMATICĂ-MANAGEMENT-CALCULATOARE (AMC)

— Reflectarea evenimentelor vieții tehnico-științifice: congrese, manifestări internaționale etc.
— Ciclu de instruire

— Articole de sinteză originale și traduse, teme cu dezvoltare explozivă
— Abordarea sistemică a celor trei domenii tematice
— Articole cu bibliografii ample, idexabile multiplu
— Auxiliar prețios de cultură tehnică modernă

V. *Colecția* **AUTOMATICĂ-INFORMATICĂ**

— Monografii succinte
— Documentare adîncită, variată
— Teme conturate
— Instrumente de lucru

VI. *Seria* **ELECTRONICĂ APLICATĂ**

— Profil similar cu colecția anterioară

VII. *Colecția* **RADIO și TELEVIDEO**

— Cărți cu volum mic, în tiraj de masă, pentru radioamatori, constructori, automatiști și ciberneticieni.

Lei 24

Izvorită din mecanica clasică, *problema stabilității* sistemelor dinamice a evoluat ascendent pe o traiectorie care intersectează variate discipline științifice, culminînd cu automatica, domeniu în care capătă o deplină maturitate alături de o maximă generalitate.

Pe parcursul evoluției sale, *stabilitatea* a constituit o permanentă provocare teoretică, prilejuind o continuă extindere a sferei de cuprindere a analiticului și o rafinare corespunzătoare a puterii de predicție a acestuia.

În prezent, *stabilitatea* și-a cucerit recunoașterea statutului de concept nodal, ca punct de confluență al cunoașterii teoretice cu praxisul ingineresc.

Punînd sub control dinamica proceselor, automatica este ea însăși cenzurată de cerințe foarte severe privind evoluția echilibrului ansamblului. Prin focalizarea unui vast aparat matematic, automatica reușește portretizări ale dinamicii proceselor într-un cadru de maximă generalitate și semnificanță pentru stabilitatea acestora.

Cadrul normativ pe care *stabilitatea sistemelor automate* îl prescrie practicii inginerești se finalizează în criterii eficiente de sinteză și acordare, fără de care proiectarea unor arhitecturi complexe de sisteme mecanice, electrice, electronice sau combinații ale acestora nu ar fi posibilă, iar funcționalitatea lor ar fi precară.

EDITURA TEHNICĂ

Lucrarea de față, consacrată în totalitate problematicii stabilității (ceea ce constituie o premieră în literatura noastră), se remarcă printr-o maximă concizie, putere de selecție și consecvență în centrarea pe obiectivele proprii automaticii.

Cu acuratețǎ și într-un context aplicativ sînt prezentate un mare număr de tehnici, metode și algoritmi de calcul referitor la analiza stabilității sistemelor automate mono- și multivariabile liniare, neliniare, continue sau discrete.

Modul de tratare pune în evidență calitatea și dozajul fin al argumentării, în cadrul căreia intuiția inginerească este întotdeauna recuperată în fața fundamentării deductive.

Solidar cu derularea conținutului, aspectul metodologic-operațional al analizei sau sintezei stabilității este fixat printr-un lot numeros de exemple numerice extrase din practica inginerească, tratate comparativ prin mai multe tehnici și proceduri.

Dacă anexele tind a conferi un caracter autonom lucrării, trimiterile bibliografice stabilesc conexiunile acesteia într-un context bibliografic relevant.

Ultima anexă surprinde deosebit de sugestiv conținutul lucrării sub forma unei scheme logice care sistematizează sinoptic întreaga matrice a relațiilor dintre concepte-metode-rezultate, permițînd un ghidaj de tip sistem expert în alegerea căilor celor mai eficiente de atac pentru rezolvarea unor probleme concrete.

Lucrarea se adresează inginerilor automatiști din concepție-proiectare, precum și celor din exploatare, constituind totodată — prin claritatea expunerii — un excelent manual pentru pregătire sau reciclare în automatică. Dat fiind portabilitatea metodologiei de analiză și sinteză a stabilității expuse în lucrare pentru diferite domenii ale tehnicii, ea este utilă interdisciplinar ingineriei de proiectare din întreg profilul mecanic și electric.