Mihail Voicu

TEORIA SISTEMELOR

Editura
Academiei
Române

TEORIA SISTEMELOR

SYSTEMS THEORY

MIHAIL VOICU

TEORIA SISTEMELOR

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
București, 2008

Adresa: EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
Calea 13 Septembrie, nr. 13, sector 5,
050711, Bucureşti, România
Tel.: 4021-318 81 46, 4021-318 81 06
Fax: 4021-318 24 44
E-mail: edacad@ear.ro
Internet: www.ear.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
VOICU, MIHAIL
Teoria sistemelor / Mihail Voicu . - Bucureşti :
Editura Academiei Române, 2008
ISBN 978-973-27-1673-1

681.5(075.8)

Redactor: IRINA FILIP
Tehnoredactor: LUIZA DOBRIN
Coperta: NICOLETA NEGRUȚ

Bun de tipar: 09.06.2008. Format 16/70×100.
Coli de tipar: 26
C.Z. pentru biblioteci mari: 621-501.1
C.Z. pentru biblioteci mici: 62

P r e f a ţ ă

Cu toate că formalismul riguros al *concepţiei sistemice* a fost elaborat în cadrul ştiinţelor exacte, principiile de bază ale acestei noi concepţii au apărut simultan în mai multe domenii ştiinţifice: teoria circuitelor electrice, electronică, automatică, biologie, neurofiziologie, psihologie, sociologie, ştiinţe economice etc.

În secolul al XIX-lea, în perioada de avânt a tuturor ştiinţelor, sub influenţa mecanicii *newtoniene*, a spiritului *laplacean* şi ca urmare a complexităţii fenomenelor, cercetarea ştiinţifică a avut un *caracter analitic*. S-a obţinut astfel un volum considerabil de cunoştinţe în toate ştiinţele. Când aceste cunoştinţe au depăşit un anumit nivel, în câteva domenii ştiinţifice s-a constatat că oricât de abundente ar fi cunoştinţele asupra unor elemente disparate, acestea nu permit înţelegerea funcţionării ansamblului pe care elemente îl formează. *Ansamblul sau sistemul posedă proprietăţi noi care nu pot fi puse în evidenţă numai în elementele componente luate separat*.

Un sistem este *un complex de elemente în interacţiune*. El se evidenţiază prin structura şi conexiunile sale interne, care constituie o unitate relativ delimitată faţă de mediu. Comportarea unui sistem depinde nu numai de proprietăţile elementelor sale ci, mai ales, de *interacţiunile* dintre ele. Relevant în acest sens este faptul că s-a ajuns la idei şi concepte similare, simultan şi autonom, în diverse domenii ştiinţifice. Progresele din aceste domenii au condus la conceptul de sistem, la formularea legilor care le guvernează şi la descoperirea *izomorfismelor* dintre diverse sisteme existente în natură.

Sistemele reale procesează *substanţă*, *energie* şi *informaţie*. Ele sunt conectate cu mediul prin *mărimi cauze* sau *de intrare* şi *mărimi efecte* sau *de ieşire*. Între aceste mărimi există o relaţie cauzală, reprezentabilă abstract printr-un *operator de transfer*. Studiul experimental al sistemelor reale implică interacţiunea cu obiectul analizat şi are, în unele situaţii, aplicabilitate limitată. În mod obişnuit, alături de procedurile experimentale se folosesc *metodele de modelare* care permit explicitarea operatorului de transfer printr-un *model matematic*.

Un sistem fiind *un complex de elemente în interacţiune*, urmează că modelul matematic, ca *imagine* perfectibilă a sistemului real, este el însuşi un sistem – un *sistem abstract. Sistemele abstracte* reprezintă forma cea mai eficientă de cunoaştere profundă a sistemelor reale. Sistemele abstracte, grupate în clase care le conferă un anumit grad de generalitate, constituie obiectul de studiu al *teoriei matematice a sistemelor*. Diferenţa faţa de disciplinele convenţionale rezidă în gradul de abstractizare şi de generalizare: *sistemul abstract* se referă la caracteristici foarte generale ale unei mari clase de entităţi, tradiţional tratate de discipline diferite. De aici rezultă de fapt natura inter- şi multi-disciplinară a teoriei sistemelor.

În acest context disciplina ***teoria sistemelor*** constituie rezultatul simbiozei între matematicile aplicate şi ştiinţa şi ingineria sistemelor. Originile ei se situează în teoria circuitelor electrice, electronică şi telecomunicaţii, şi în mod special în automatică.

Această carte are ca scop prezentarea, într-un mod riguros şi inteligibil, a principalelor rezultate privind descrierea matematică a sistemelor dinamice liniare, transferul intrare – stare – ieşire, controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor dinamice liniare, stabilitatea şi stabilizarea sistemelor dinamice liniare, stabilitatea sistemelor automate liniare multivariabile, stabilitatea sistemelor dinamice neliniare (inclusiv metoda invarianţei de flux), şi conducerea optimală a sistemelor dinamice. Tratarea este atât sistemic – teoretică, prin abordarea matematică adecvată obţinerii unor soluţii generale riguroase, cât şi aplicativă, prin exemple diseminate pe parcursul întregii cărţi.

Conform scopului cărţii problematica este abordată sintetic, tratarea fiind structurată pe definiţii, teoreme (majoritatea demonstrate), exemple rezolvate şi, după caz, observaţii. Toate acestea, ca şi relaţiile matematice, sunt numerotate cu două cifre arabe: prima indică subcapitolul şi a doua numărul de ordine în cadrul subcapitolului. Trimiterile la alte rezultate din carte se identifică utilizând adecvat şi colontitlurile (pagini pare – capitole, pagini impare – subcapitole). Semnificaţia simbolurilor şi abrevierilor utilizate se prezintă în lista aflată la finalul cărţii. Pentru cursivitatea expunerii, se fac trimiteri bibliografice numai dacă este strict necesar. În acelaşi timp, lista bibliografică cuprinde o parte generală şi cinci diviziuni pe domenii: sisteme liniare, sisteme automate liniare multivariabile, sisteme automate neliniare, metoda invarianţei de flux şi conducerea optimală.

Prin concepţie şi prin paleta problemelor abordate, cartea se adresează specialiştilor în ingineria sistemelor, automatică, ştiinţa calculatoarelor, electrotehnică, electronică, în informatica de proces, dar şi în matematici aplicate, în biologia matematică şi în ştiinţele economice, specialişti care lucrează în învăţământ, în cercetare, în proiectare şi în industrie. Totodată, cartea deschide studenţilor în domeniile amintite calea spre cunoştinţe avansate de teoria sistemelor, care fac posibile sinteze teoretice şi soluţii practice eficiente bazate pe produsele oferite de ştiinţa şi tehnologia informaţiei.

Iaşi, martie 2008 Mihail Voicu

Capitolul I
MODELE MATEMATICE ALE SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

1. Noțiuni introductive

1.1. Terminologie şi definiții

a. Sisteme

Un sistem este un complex de elemente în interacțiune. El constituie *o unitate relativ delimitată față de mediu*, delimitarea fiind evidențiată de *structura* şi de *conexiunile interne*. Comportarea unui sistem nu depinde numai de proprietățile elementelor componente, ci, mai ales, de *interacțiunile* dintre elementele sale.

În acest sens, relevant este faptul că s-a ajuns la aceleaşi idei şi concepte, simultan şi independent, în diverse domenii ştiințifice: teoria circuitelor electrice, electronică, automatică, dar şi în biologie, neurofiziologie, psihologie, sociologie, ştiințe economice. Progresele din aceste domenii au marcat începutul evoluțiilor conceptuale pentru a se ține seama de sisteme, de legile care le guvernează şi de izomorfismele dintre sistemele reale, care pot fi de naturi foarte diferite.

Sistemele reale – naturale sau tehnice – sunt studiate în:

- *ştiințele sistemelor* – dedicate sistemelor fizico-chimice, biologice, organismice, social-ecologice, socio-culturale şi organizaționale;
- *ingineria sistemelor* – dedicată sistemelor tehnice.

În cadrul sistemelor reale *cunoaşterea ştiințifică* se bazează pe două categorii de metode: *metode experimentale* şi *metode de modelare*.

Metodele experimentale implică interacțiunea directă cu obiectul de studiu şi au, în unele situații, aplicabilitate limitată. Se pot face experimente în fizică, chimie, biologie, psihologie, inginerie, dar acestea sunt limitate sau imposibile în astronomie, economie, sociologie. În general, există sisteme reale pentru care anumite experimente nu pot fi realizate. În aceste cazuri, alături de metodele experimentale, se folosesc metodele de modelare. Sistemele reale asupra cărora se pot face observații experimentale sunt, principial, modelabile. Experimentele care nu pot fi realizate cu sistemele reale, pot fi desfăşurate pe modelele acelor sisteme.

Sistemele reale procesează *substanță*, *energie* şi *informație*. Ele sunt conectate cu mediul ambiant prin două categorii de variabile:

- *mărimile cauze* – numite *de intrare* – notate vectorial prin u, şi
- *mărimile efecte* – numite *de ieşire* – notate vectorial prin y.

Între u şi y, vectori reali definiți pe *mulțimea de timp* $\mathbb{T}$, există o *relație de la cauză la efect*, simbolizată de *operatorul de transfer* $\mathcal{S}$. Suportul ei material este sistemul considerat, fig. I.1.1. Mulțimea de timp $\mathbb{T}$ este *ordonată* în sensul că timpul evoluează continuu şi uniform din trecut, prin prezent, spre viitor.

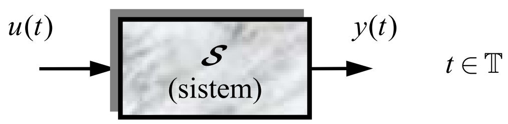

Fig. I.1.1. Reprezentarea grafică simbolică a unui sistem

b. Modelarea sistemelor

Expresia matematică a relației dintre $u(t)$ şi $y(t)$, simbolizată prin operatorul de transfer $\mathcal{S}$, este *modelul matematic* al sistemului. El este o imagine, mai mult sau mai puțin perfectă, a sistemului real. Într-o formă simplă *transferul intrare – ieşire* realizat de sistem se exprimă prin:

$$y(t) = \mathcal{S} \circ u(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.1}$$

în care „$\circ$" simbolizează *operația* de transformare prin $\mathcal{S}$ a lui u în y.

Modelarea sistemelor se bazează pe construcția – prin sistematizarea observațiilor, experimente, interpretarea măsurătorilor şi cunoaşterea şi explicitarea legilor generale ale naturii – a unei *imagini*, de regulă idealizate şi esențializate, a fenomenelor din sistemele reale. Această imagine, având o formă perfectibilă şi eficient utilizabilă pentru cunoaştere şi în aplicații, este *modelul matematic*.

Conform definiției noțiunii de sistem, modelul matematic este el însuşi un sistem – un *sistem abstract* – prin care se reprezintă un sistem real. Conceptual, noțiunile de sistem real şi de sistem abstract sunt distincte. Ele desemnează entități distincte. Sistemul abstract este o *imagine*, mai mult sau mai puțin idealizată şi /

sau simplificată, dar perfectibilă, a sistemului real. Distincția dintre sistemul real şi imaginea sa este ilustrată în fig. I.1.2. În ea se evidențiază *procesul de modelare* (însoțit de *identificarea structurii şi parametrilor*) şi, implicit, rolul analistului de sisteme. Acesta elaborează modelul (EM), concepe experimente (CE) – când este posibil, efectuează experimente (E_{SR}, E_{SA}), validează modelul (VM) pe baza erorii (*e*) dintre rezultatele similare obținute în E_{SR}, E_{SA} şi repetă procedurile CE, E_{SR}, E_{SA}, VM şi EM ori de câte ori este necesar. În acest fel este posibilă perfecționarea sistemului abstract în conformitate cu scopurile modelării matematice: cunoaştere, sinteza unor structuri de monitorizare şi / sau de conducere a sistemului real etc.

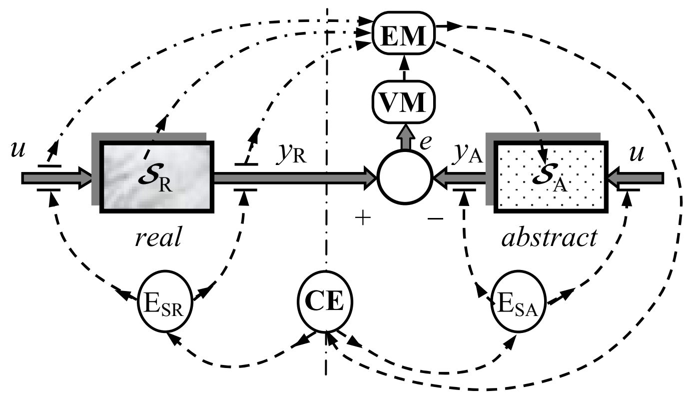

Fig. I.1.2. Procesul de modelare; $\mathcal{S}_R$ *– sistem real*, $\mathcal{S}_A$ *– sistem abstract*,
u – mărime cauză, y_R, y_A *– mărimi efect*, $e = y_R - y_A$ *– eroare*; EM – *elaborarea modelului*,
CE – *concepere de experimente*, E_{SR}, E_{SA} – *experimente*, VM – *validarea modelului*;
– prelevare de informații, *– operații de modelare*

c. Obiectul teoriei sistemelor

Sistemele abstracte reprezintă forma cea mai eficientă şi perfectibilă (ori de câte ori este necesar şi / sau posibil) de cunoaştere a sistemelor reale. Sistemele abstracte, grupate în clase care le conferă un anumit grad de generalitate, constituie obiectul de studiu al ***teoriei sistemelor***.

Originile teoriei sistemelor se situează în teoria circuitelor electrice, electronică şi, mai ales, în automatică. Se poate afirma că *automatica*, prin *viziunea intrinsec sistemică*, prin factura inter-, trans- şi multidisciplinară şi prin utilizarea naturală a instrumentului şi limbajului matematic, este matricea în care s-a constituit şi din care a evoluat teoria (matematică a) sistemelor.

În cadrul teoriei sistemelor, un *sistem* este un model de natură generală şi abstractă, adică o analogie conceptuală între anumite caracteristici universale ale faptelor observate. Diferenţa faţa de disciplinele convenţionale rezidă în gradul de generalizare şi de abstractizare: *sistemul abstract* se referă la caracteristici generale ale unor clase de entităţi, tradiţional tratate de discipline diferite. De aici rezultă natura interdisciplinară a teoriei sistemelor şi aplicabilitatea ei în diverse domenii concrete.

d. Sisteme continue în timp şi sisteme non-anticipative

Definiţia 1.1

A. Un sistem se numeşte *continuu în timp* dacă $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{T}$ este izomorfă cu $\mathbb{R}$ şi variabilele sistemului sunt definite pentru orice $t\in\mathbb{T}$.

B. Un sistem se numeşte *discret în timp* dacă $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{T}$ este izomorfă cu $\mathbb{Z}$; raportat la timpul fizic, ca o componentă intrinsecă a realităţii, variabilele sistemului sunt definite numai pentru anumite momente ale timpului, de obicei echidistante. □

Sistemele reale (naturale sau tehnice) satisfac *principiul non-anticipării* care, într-o exprimare lapidară, are următoarea formulare: *efectul nu anticipează cauza*. Cu alte cuvinte, pentru orice moment $\tau\in\mathbb{T}$ evoluţia ieşirii y până în momentul τ depinde numai de evoluţia intrării u până în momentul τ.

Definiţia 1.2

A. Un sistem se numeşte *non-anticipativ* (satisface principiul non-anticipării) dacă evoluţia în *trecut* şi în *prezent* a lui y nu depinde de evoluţia în *viitor* a lui u. În cadrul transferului intrare – ieşire (1.1), *principiul non-anticipării* are forma:

$$\mathcal{S}^{\tau}\circ(\mathcal{S}\circ u(t))=\mathcal{S}^{\tau}\circ(\mathcal{S}\circ(\mathcal{S}^{\tau}\circ u(t))),\quad \mathcal{S}^{\tau}\circ\mathcal{S}=\mathcal{S}^{\tau}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{S}^{\tau}),\tag{1.2}$$

în care $\mathcal{S}^{\tau}$, $\tau\in\mathbb{T}$, este *operatorul de trunchiere tempo*rală. Prin acest operator o mărime v se transformă într-o altă mărime w după cum urmează:

$$w(t)=\mathcal{S}^{\tau}\circ v(t)\triangleq\begin{cases}v(t), & t\le\tau,\\ 0, & t>\tau,\quad t,\tau\in\mathbb{T}.\end{cases}\tag{1.3}$$

B. Un sistem se numeşte *anticipativ* dacă evoluţia în *trecut* şi în *prezent* a lui y depinde de evoluţia în *viitor* a lui u, respectiv relaţiile (1.2) nu au loc. □

Observația 1.1

Deşi în lumea reală a spațiului macroscopic sublunar, actualmente cunoscut, nu au fost identificate sisteme anticipative, această noțiune este foarte utilă mai cu seamă în aplicații. De exemplu, ea creează contrastul conceptual necesar pentru evaluarea pertinentă a modelelor matematice, care pot fi anticipative sau nu.

Evident, este de dorit ca modelul matematic al unui sistem real să fie non-anticipativ. Această calitate nu este asigurată în mod automat. Explicația este că pe parcursul modelării matematice a unui sistem real se uzează de simplificări / idealizări care nu rămân fără consecințe sub aspectul non-anticipativității modelului matematic obținut. (Pentru alte detalii v. Observațiile 2.1 şi 4.1.) □

Observația 1.2

Există şi situații în care, din motive de simplitate a tratării, se lucrează cu modele matematice anticipative. Rezultatele care se obțin în astfel de împrejurări trebuie interpretate adecvat şi anume în concordanță cu idealizările / simplificările care au condus la respectivele modele matematice. □

1.2. Sisteme dinamice

Un *sistem dinamic* se caracterizează prin aceea că ieşirea $y(t)$, în care $t \in \mathbb{T}$ este momentul curent, depinde de întreaga *evoluție internă* a sistemului, sub influența intrării *u*, pe parcursul istoriei sale pe intervalul de timp $[t_0, t] \subseteq \mathbb{T}$, $t_0 \le t$; t_0 este momentul inițial, al începerii observației relației dintre u şi y. În acest context, un concept cardinal este *starea sistemului*, notată vectorial prin x, care descrie *evoluția internă* (a substanței, energiei şi informației), pentru $t \ge t_0$, generate de acțiunea intrării $u(\theta)$, $\theta \in [t_0, t]$. Se afirmă că $y(t)$ depinde de starea $x(t)$, care se determină pe sine (prin propria sa evoluție) sub influența lui $u(\theta), \theta \in [t_0, t]$, respectiv de întreaga istorie a evoluției stării pe $[t_0, t]$.

Definiția 1.3

A. Un sistem se numeşte *dinamic* dacă transferul intrare – ieşire (1.1) se exprimă sub forma:

$$x(t) = \varphi\left(t; t_0, x_0, u_{[t_0,t]}\right), \ \ t \ge t_0, \ x \in \mathbb{X}, \ u \in \mathbb{U}, \tag{1.4}$$

$$y(t) = g\left(t, x(t), u(t)\right), \quad y \in \mathbb{Y}, \tag{1.5}$$

în care

(a) φ este *funcția de tranziție* adică aplicația vectorială prin care, în cadrul sistemului, are loc *tranziția* din *starea inițială*

$$x_0 = x(t_0) \tag{1.6}$$

în *starea curentă* $x(t)$, $t \geq t_0$, sub acțiunea *segmentului de intrare*

$$u_{[t_0,t]} \triangleq \left\{u(\theta);\ \theta \in [t_0, t]\right\};$$

(b) g este aplicația vectorială a transformării mărimii de stare curente $x(t)$ şi mărimii de intrare curente $u(t)$ în mărimea de ieşire curentă $y(t), t \geq t_0$.

(c) $\mathbb{U}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sunt respectiv *spațiul întrărilor*, *spațiul stărilor*, *spațiul ieşirilor*.

(d) $x(t)$ depinde de segmentul de intrare $u_{[t_0,t]}$, din *clasa de funcții de intrare*:

$$\Omega \triangleq \{\omega : \mathbb{T} \to \mathbb{U}\}. \tag{1.7}$$

Aceasta cuprinde evoluțiile *admisibile* ale mărimii de intrare u, descrise de:

$$\omega \triangleq \{u(t);\ t \in \mathbb{T},\ u(t) \in \mathbb{U}\}. \tag{1.8}$$

Valoarea în momentul t a evoluției (1.8) se obține cu

$$u(t) = \pi_t\, \omega \triangleq \omega(t), \tag{1.9}$$

în care π_t este operatorul de extragere a valorii lui ω în momentul t.

(e) Funcția de tranziție φ are, prin definiție, următoarele patru proprietăți:

1^0 *Orientabilitate*. $\varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,t]})$ este definită pentru orice $t \geq t_0$.

2^0 *Consistență*. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{T}$ şi $t = t_0$ are loc:

$$\varphi(t_0;\, t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t_0]}) = x_0. \tag{1.10}$$

3^0 *Compozabilitate*. Pentru orice $t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{T}$, cu $t_1 < t_2 < t_3$, are loc:

$$\varphi(t_3;\, t_1,\, x(t_1),\ u_{[t_1,\, t_3]}) = \varphi(t_3;\, t_2,\, \varphi(t_2;\, t_1,\, x(t_1),\ u_{[t_1,\, t_2]}),\ u_{[t_2,\, t_3]}). \tag{1.11}$$

4^0 *Cauzalitate*. Pentru orice $t_0, t \in \mathbb{T}, t \geq t_0$, şi orice $u_{[t_0,\, t]},\ \tilde{u}_{[t_0,\, t]} \in \Omega$ are loc:

$$u_{[t_0,\, t]} = \tilde{u}_{[t_0,\, t]} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}) = \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, \tilde{u}_{[t_0,\, t]}). \tag{1.12}$$

B. Un sistem se numeşte *static* dacă transferul intrare – ieşire are loc instantaneu, în sensul că $y(t)$ depinde numai de $u(t)$ pentru $t \geq t_0$, $t_0, t \in \mathbb{T}$. □

Definiția 1.4

A. Un sistem se numeşte *finit dimensional* dacă $\mathbb{U}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sunt spații liniare (vectoriale) finit dimensionale (v. Anexa A).

B. Un sistem se numeşte *infinit dimensional* dacă în sistem există variabile infinit dimensionale. □

În cazul finit dimensional, uzual, $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m, \mathbb{X} = \mathbb{R}^n, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^p$, cu m, n, p numere naturale. n, numit *ordinul sistemului* / *modelului*, este numărul acumulatoarelor de substanță / energie / informație, independente şi relevante, conținute de sistem.

Definiția 1.5

Un sistem dinamic de forma (1.4), (1.5) se numeşte *neted* dacă $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (adică este continuu), $\mathbb{U}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sunt spații topologice, şi φ are derivata continuă în t şi este continuă în variabilele t_0, x_0, u. □

Teorema 1.1

Funcția de tranziție a unui sistem dinamic neted de forma (1.4), (1.5), în care $u(t)$ este continuă pe porțiuni, şi $\mathbb{U}, \mathbb{X}$ şi Ω sunt spații normate, este soluția unei ecuații diferențiale de forma:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), u(t)\right), \ t \geq t_0 . \tag{1.13}$$

$\mathscr{D}$. Topologizarea spațiilor $\mathbb{U}, \mathbb{X}$ şi Ω este asigurată respectiv de normele definite pe aceste spații (v. Anexa A). Fie aplicația $F_t : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \times \Omega \to \mathbb{X}$ definită prin

$$F_t(t_0, x_0, \omega) \triangleq \frac{d}{dt} \varphi(t; t_0, x_0, \omega) , \tag{1.14}$$

în care intrarea are forma $\omega = u_{[t_0, t]}$ şi $x_0 = x(t_0)$. Fie $t_0 = t$ şi fie prin definiție $f\left(t, x(t), u(t)\right) \triangleq F_t\left(t, x(t), u_{[t,t]}\right)$. În această situație, din (1.14) se obține:

$$\frac{d}{dt} \varphi\left(t; t, x(t), u_{[t,t]}\right) = F_t\left(t, x(t), u_{[t,t]}\right) = f\left(t, x(t), u(t)\right) . \tag{1.15}$$

f este continuă în raport cu t, x, u deoarece sistemul dinamic este neted. Din (1.15), cu proprietatea de consistență $\varphi\left(t; t, x(t), u_{[t,t]}\right) = x(t)$ (obținută din (1.10) pentru $t_0 = t$), rezultă ecuația diferențială (1.13). □

Prin urmare, *sistemele dinamice netede sunt descrise de ecuații diferențiale*.

Modelul matematic (1.13), (1.5) este un *model recursiv* deoarece ecuația diferențială (1.13), în mod evident, exprimă de fapt numai *tendința de evoluție în timp a stării* $x(t)$ (respectiv a sistemului). Spre deosebire de aceasta, modelul matematic (1.4), (1.5), în care (1.4) este soluția ecuației diferențiale (1.13), este un *model nerecursiv* care explicitează *evoluția în timp a stării* $x(t)$ a sistemului.

În mod obişnuit, procesul de modelare prezentat în fig. I.2, se finalizează, în cazul sistemelor dinamice netede, cu modele recursive. Fapt lesne explicabil prin aceea că legile generale ale naturii, de care se face uz în procesul de modelare matematică, se formulează îndeobşte în termenii *tendințelor de evoluție în timp ale fenomenelor*. Urmează că o problemă cardinală este aceea a trecerii de la modelul recursiv (1.13), (1.5) la modelul nerecursiv (1.4), (1.5), respectiv a existenței şi unicității soluției *problemei Cauchy* constituită din ecuația diferențială (1.13) şi condiția inițială (1.6). În acest sens un rezultat clasic este următorul.

Teorema 1.2 (de existență şi unicitate, v. [3])

Dacă pentru orice $u(t)$, cunoscut pe $[t_0, t] \subseteq \mathbb{T}$, f este continuă, satisface condițiile de mărginire şi respectiv Lipschitz (într-o normă $\|\bullet\|$ definită pe $\mathbb{X}$):

$$\begin{cases} \left\| f\left(t, x(t), u(t)\right) \right\| \le M, & t \in \mathbb{T}, \quad x \in \mathbb{X}, \\ \left\| f(t, x, u) - f(t, \tilde{x}, u) \right\| < L \left\| x - \tilde{x} \right\|, & t \in \mathbb{T}, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{1.16}$$

în care M şi L sunt două constante pozitive, atunci există o soluție unică (1.4) a *problemei Cauchy* (1.13), (1.6). □

1.3. Sisteme dinamice invariante în timp

Definiția 1.6

A. Un sistem se numeşte *invariant în timp* sau *constant* dacă evoluția sa este invariantă în raport cu translațiile temporale. În cadrul transferului intrare – ieşire (1.1) invarianța în timp se exprimă prin:

$$y(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}} \circ u(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}}_\tau \circ (\boldsymbol{\mathcal{S}} \circ (\boldsymbol{\mathcal{S}}_{-\tau} \circ u(t))) , \quad \boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{S}}_\tau \circ (\boldsymbol{\mathcal{S}} \circ \boldsymbol{\mathcal{S}}_{-\tau}) , \tag{1.17}$$

în care $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\tau$, $\tau \in \mathbb{T}$, este *operatorul de translație temporală*. Prin acest operator v se transformă în w după cum urmează: $w(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}}_\tau \circ v(t) \triangleq v(t+\tau)$.

B. Un sistem se numeşte *variant în timp* dacă (1.17) nu are loc. □

Teorema 1.3

Fie un sistem dinamic neted de forma (1.4), (1.5), invariant în timp, în care $u(t)$ este continuă pe porțiuni, şi $\mathbb{U}, \mathbb{X}$ şi Ω sunt spații normate. Funcția de tranziție este soluția ecuației diferențiale (1.13) şi transformarea lui $x(t)$ şi $u(t)$ în $y(t)$ este descrisă de (1.5), cu f şi g independente de t, respectiv:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x(t), u(t)\right), \; t \geq t_0 , \tag{1.18}$$

$$y = g\left(x(t), u(t)\right) . \tag{1.19}$$

$\mathcal{D}$. Conform Definiției 1.6, pentru orice $t, t_0, \tau \in \mathbb{R}$ are loc:

$$x(t) = \varphi\Big(t;\, t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big) = \varphi\Big(t+\tau;\, t_0+\tau,\, x_0,\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{-\tau} \circ u_{[t_0+\tau,\, t+\tau]}\Big) . \tag{1.20}$$

Întrucât $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{-\tau} \circ u_{[t_0+\tau,\, t+\tau]} = u_{[t_0,\, t]}$, din (1.14) şi (1.20), pentru $\tau = -t_0$, se obțin:

$$F_t\Big(t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big) = \frac{d}{dt}\varphi\Big(t;\, t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big), \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} F_t\Big(t_0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big) &= \frac{d}{dt}\varphi\Big(t+\tau;\, t_0+\tau,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big)\Big|_{\tau=-t_0} = \\ &= \frac{d}{dt}\varphi\Big(t-t_0;\, 0,\, x_0,\, u_{[t_0,\, t]}\Big). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Pentru $t_0 = t$ rezultă imediat că $F_t(t, x(t), u_{[t,\, t]})$ nu depinde explicit de t deoarece din (1.21), (1.22) urmează că are loc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi\Big(t;\, t,\, x(t),\, u_{[t,\, t]}\Big) &= F_t\Big(t,\, x(t),\, u_{[t,\, t]}\Big) \equiv \\ &\equiv F_t\Big(x(t),\, u_{[t,\, t]}\Big) = \frac{d}{dt}\varphi\Big(0;\, 0,\, x(t),\, u_{[t,\, t]}\Big). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Se defineşte $f\left(x(t), u(t)\right) \triangleq F_t\left(x(t), u_{[t,\,t]}\right)$. Din (1.23) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(t;\, t,\, x(t),\, u_{[t,\,t]}\right) = F_t\left(x(t),\, u_{[t,\,t]}\right) = f\left(x(t),\, u(t)\right). \qquad (1.24)$$

f este continuă în raport cu x şi u deoarece sistemul dinamic este neted. Din (1.24), cu proprietatea de consistenţă $\varphi\left(t;\, t,\, x(t),\, u_{[t,\,t]}\right) = x(t)$ (obţinută din (1.10) pentru $t_0 = t$), rezultă ecuaţia diferenţială (1.18).

Procedând similar pentru (1.5) se obţine $g(t, x, u) \equiv g(x, u)$, respectiv ecuaţia (1.19). □

Exemplul 1.1

Schema motorului electric de curent continuu (c.c.) cu dublă comandă (pe indus şi pe inductor) este reprezentată în fig. I.1.3. Pentru modelare se consideră numai fenomenele electrice, magnetice, mecanice şi interacţiunile corespunzătoare. Se face abstracţie de fenomenele termice. Ecuaţiile care descriu sistemul sunt:

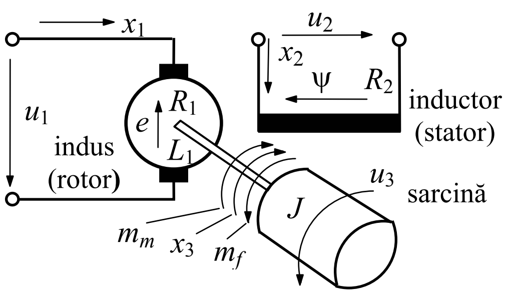

Fig. I.1.3. Schema motorului electric de c.c.; u_1, u_2 – tensiunile de comandă, x_1, x_2– cureţii rotoric şi statoric, e – tensiunea contra-electromotoare, R_1, L_1 – rezistenţa şi inductanţa rotorice, R_2 – rezistenţa statorică, x_3 – viteza unghiulară, u_3 – cuplul de sarcină, m_m – cuplul motor, m_f – cuplul de frecare, J – momentul de inerţie al rotorului, ψ – fluxul de excitaţie

- pe circuitul indusului:

  $u_1 = e + R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1$,

  $e = c_1 \psi x_3$;

- pe circuitul inductorului:

  $u_2 = R_2 x_2 + \dot{\psi}$,

  $\psi = h(x_2)$;

- pe partea electro-mecanică:

  $J\dot{x}_3 = m_m - m_f - u_3$,

  $m_m = c_2 \psi x_1$,

  $m_f = c_3 x_3$.

Funcţia h reprezintă curba de primă magnetizare a circuitului magnetic şi cu $c_{1,2,3}$ s-au notat constantele constructive ale motorului.

Sistemul este de ordinul trei, adică egal cu numărul acumulatoarelor de energie conținute de sistem: două acumulatoare electromagnetice (reprezentate de inductanțele L_1, L_2) şi un acumulator mecanic (reprezentat de momentul de inerție J). Se alege mărimea de stare formată din variabilele x_1, x_2, x_3. Mărimea de intrare este formată din variabilele externe u_1, u_2, u_3. Eliminând variabilele e, ψ, m_m, m_f între ecuațiile de mai sus şi explicitând rezultatele în raport cu derivatele $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$, în final se obține un sistem de ecuații diferențiale intrare – stare de forma (1.13) şi anume:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{c_1}{L_1}h(x_2)x_3 + \frac{1}{L_1}u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{h'(x_2)}x_2 + \frac{1}{h'(x_2)}u_2,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{c_2}{J}f(x_2)x_1 - \frac{c_3}{J}x_3 - \frac{1}{J}u_3.$$

La aceste ecuații se adaugă ecuația ieşirii. De pildă, în cazul reglării turației motorului de c.c., de regulă, ieşirea avută în vedere este viteza unghiulară:

$$y = x_3. \ \square$$

1.4. Sisteme dinamice liniare

Definiția 1.7

A. Un sistem se numeşte *liniar* dacă orice combinație liniară de mărimi de intrare se transformă într-o combinație liniară similară de mărimi de ieşire. În cadrul transferului intrare – ieşire (1.1), pentru orice u^i, cu $y^i(t) = \mathcal{S} \circ u^i(t)$, şi orice constante $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ (I – mulțime de indici, finită / numărabilă), are loc:

$$\mathcal{S} \circ \left(\sum_{i\in I} c_i u^i(t) \right) = \sum_{i\in I} c_i (\mathcal{S} \circ u^i(t)) = \sum_{i\in I} c_i\, y^i(t). \qquad (1.25)$$

B. Un sistem se numeşte *neliniar* dacă (1.25) nu este îndeplinită. □

Relația (1.25) ilustrează binecunoscutul *principiu al suprapunerii efectelor.*

Teorema 1.4

Ecuațiile (1.13), (1.5) ale unui sistem dinamic neted, finit dimensional şi liniar au forma:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.26}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{1.27}$$

în care $A(t),\ B(t),\ C(t),\ D(t)$ sunt matrice de dimensiuni adecvate.

$\mathscr{D}$. Sistemul este neted; uzual $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Finitudinea şi liniaritatea (1.25) implică faptul că $\mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{Y}$ sunt spații liniare identice / izomorfe respectiv cu $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p$; n, m, p se stabilesc adecvat în procesul de modelare matematică.

Funcția de tranziție φ este liniară pe $\mathbb{X} \times \Omega$. Aceasta înseamnă că pentru

$$x_0 = \sum_{i \in I} c_i x_0^i, \quad u_{[t_0, t]} = \sum_{i \in I} c_i u_{[t_0, t]}^i, \text{ cu orice } (x_0^i,\ u_{[t_0, t]}^i) \in \mathbb{X} \times \Omega,$$

şi orice constante $c_i \in \mathbb{R}, i \in I$ (I – mulțime de indici, finită / numărabilă), funcția de tranziție φ (din Definiția 1.3) are proprietatea:

$$\varphi(t; t_0, \sum_{i \in I} c_i x_0^i, \sum_{i \in I} c_i u_{[t_0, t]}^i) = \sum_{i \in I} c_i \varphi(t; t_0, x_0^i, u_{[t_0, t]}^i).$$

În particular, pentru $x_0 = x_0 + 0,\ u_{[t_0, t]} = 0_{[t_0, t]} + u_{[t_0, t]}$ se scrie:

$$\varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) = \varphi(t; t_0, x_0, 0_{[t_0, t]}) + \varphi(t; t_0, 0, u_{[t_0, t]}).$$

De aici urmează că φ este formată din următoarele două componente:

- $x_L(t) = \varphi(t; t_0, x_0, 0_{[t_0, t]})$ – *componenta de regim liber*, determinată de *cauze interne*, respectiv de acumulările explicitate prin starea inițială x_0;
- $x_F(t) = \varphi(t; t_0, 0, u_{[t_0, t]})$ – *componenta de regim forțat*, determinată de *cauze externe*, respectiv de mărimea de intrare u.

În continuare, în virtutea liniarității şi finitudinii dimensionale se pot scrie:

$$x_L(t) = \varphi(t; t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0)x_0, \tag{1.28}$$

$$x_F(t) = \varphi(t; t_0, 0, u_{[t_0, t]}) = \Psi(t, t_0)u_{[t_0, t]}, \tag{1.29}$$

în care $\Phi(t, t_0)$ este *matricea de tranziție*, determinantă pentru evoluția în *regim liber* din starea inițială x_0, și $\Psi(t, t_0)$ este *operatorul de transfer*, determinant pentru evoluția în *regim forțat* sub acțiunea segmentului de intrare $u_{[t_0, t]}$; în cazul continuu în timp, $\Psi(t, t_0)$ este un operator de integrare (v. Observația 1.6).

În același timp $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$ este soluția unei ecuații diferențiale de forma (1.13) în care $f(t, x, u)$ are semnificația evidențiată în cadrul demonstrației Teoremei 1.1. Liniaritatea funcției φ implică și liniaritatea funcției f astfel că se poate scrie:

$$f(t, x, u) \equiv A(t)x + B(t)u \ ,$$

ceea ce conduce la ecuația (1.26) cu $A(t)$, $B(t)$ matrice de dimensiuni adecvate.

Condiția de liniaritate (1.25) include și ecuația (1.5). Ca urmare,

$$y = g(t, x, u) \equiv C(t)x + D(t)u \ ,$$

din care rezultă ecuația (1.27) cu $C(t)$, $D(t)$ matrice de dimensiuni adecvate. □

Explicit, vectorii și matricele din ecuațiile (1.26), (1.27) au formele:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \tag{1.30}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}, \tag{1.31}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}. \tag{1.32}$$

Aceste matrice se numesc respectiv: *matricea* (*de evoluție a*) *sistemului*, *matricea intrării*, *matricea ieșirii*, și *matricea conexiunii directe intrare – ieșire*.

Problema trecerii de la modelul recursiv (1.26), (1.27) la modelul nerecursiv (1.4), (1.5) se rezolvă arătând că soluția unică a *problemei Cauchy* (1.26), (1.6) este o funcție de tranziție. Se soluționează această problemă în cadrul următoarelor rezultate: Teoremele 1.5 – 1.8 și Observațiile 1.3 – 1.5.

a. Matricea fundamentală şi matricea de tranziţie

Corespunzător ecuaţiei (1.26) se consideră mai întâi ecuaţia omogenă:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.33}$$

pentru care se utilizează următoarele două rezultate din teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Teorema 1.5 (de existenţă şi unicitate, v. [3])

Dacă $A(t)$ este continuă pentru $t \geq 0$, atunci pentru problema Cauchy (1.33), (1.6) cu momentul iniţial $t_0 = 0$ şi starea iniţială $x(0)$ există soluţia unică:

$$x(t) = X(t)x(0), \ \ t \geq 0, \tag{1.34}$$

în care $X(t)$ este *matricea fundamentală* a ecuaţiei (1.33). $X(t)$ este nesingulară, cu $\det X(t) = e^{\int_0^t \mathrm{Tr} A(\theta) d\theta} \neq 0$ (Tr – urma matricei). Ea este soluţia unică a ecuaţiei:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \ \ t \geq 0, \tag{1.35}$$

cu condiţia iniţială:

$$X(0) = I_n, \tag{1.36}$$

în care I_n este matricea unitate de ordinul n. □

Teorema 1.6 (seria Peano – Baker, v. [57])

Şirul de matrice

$$X_0 = I_n, \ X_k(t) = I_n + \int_0^t A(\theta) X_{k-1}(\theta) d\theta, \ t \geq 0, \ \ k = 1,2,3,\ldots,$$

converge uniform pe intervalul $[0, t]$ şi limita este matricea fundamentală $X(t)$. □

Folosind acest rezultat se poate calcula aproximativ $X(t)$. Pentru $A(t)$ derivabilă, este posibil şi calculul exact al matricei $X(t)$, [113].

Utilizând soluţia (1.34), este uşor de verificat că, pentru orice alt moment iniţial t_0, soluţia unică a problemei Cauchy (1.33), (1.6) are forma:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0, \ \ t \geq t_0; \ \ \ t, t_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.37}$$

În legătură cu această soluţie se va demonstra următorul rezultat.

Teorema 1.7

Soluția (1.37) a ecuației omogene (1.33) este funcția de tranziție a unui sistem dinamic neted, finit dimensional şi liniar, iar $X(t)X^{-1}(t_0),\ t \geq t_0$, este matricea de tranziție corespunzătoare.

$\mathscr{D}$. Pentru a arăta că

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, 0) \equiv X(t)X^{-1}(t_0)x_0,\ \ t \geq t_0\,, \tag{1.38}$$

este funcție de tranziție, se verifică cele patru proprietăți din Definiția 1.3 şi anume:

(i) *Orientabilitatea*. $\varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, 0)$ este definită pentru orice $t \geq t_0$.

(ii) *Consistența*. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ şi $t = t_0$ are loc:

$$\varphi(t_0;\, t_0,\, x_0,\, 0) = x_0\,,\ \ X(t_0)X^{-1}(t_0)x_0 = x_0\,.$$

(iii) *Compozabilitatea*. Pentru orice $t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{R}$, cu $t_1 < t_2 < t_3$, au loc:

$$\varphi(t_3;\, t_1,\, x(t_1),\ 0) = \varphi(t_3;\, t_2,\, \varphi(t_2;\, t_1,\, x(t_1),\ 0),\ 0)\,,$$

$$X(t_3)X^{-1}(t_1)x(t_1) = X(t_3)X^{-1}(t_2)\,[X(t_2)X^{-1}(t_1)x(t_1)]\,.$$

(iv) *Cauzalitatea*. Este evidentă în cazul particular $u_{[t_0,\, t]} \equiv \tilde{u}_{[t_0,\, t]} \equiv 0_{[t_0,\, t]} \equiv 0$.

φ are derivata continuă în t , este continuă în variabilele t_0, x_0 şi este liniară în raport cu x_0. În plus, din (1.37) şi (1.28) rezultă şi matricea de tranziție:

$$\Phi(t,\, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0),\ \ t \geq t_0\,.\ \square \tag{1.39}$$

Observația 1.3

Folosind (1.39) se demonstrează imediat că matricea de tranziție $\Phi(t,\, t_0)$ are ea însăşi proprietățile (i) – (iii) din enumerarea de mai sus şi anume:

(i) *Orientabilitatea*. $\Phi(t,\, t_0)$ este definită pentru $t \geq t_0$.

(ii) *Consistența*. $\Phi(t_0,\, t_0) = X({}_0t)X^{-1}(t_0) = I_n,\ \ t_0 \geq 0\,.$ (1.40)

(iii) *Compozabilitatea*. Pentru orice $t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{R}$, cu $t_1 < t_2 < t_3$, are loc:

$$\Phi(t_3,t_1) = \Phi(t_3,t_2)\Phi(t_2,t_1),\ \ X(t_3)X^{-1}(t_1) = X(t_3)X^{-1}(t_2)X(t_2)X^{-1}(t_1)\,.\square \tag{1.41}$$

Observația 1.4

Similar cu (1.35), matricea de tranziție este soluția ecuației diferențiale:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \tag{1.42}$$

cu condiția inițială (1.40). Ecuația (1.42) rezultă din ecuația (1.35) prin înmulțire la dreapta cu $X^{-1}(t_0)$ după care se ține seama de egalitatea (1.39).

Relația (1.42) explicitează totodată regula de derivare a matricei $\Phi(t, t_0)$. □

Observația 1.5

Din (1.39) se obține imediat regula de inversare a matricei de tranziție:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) \equiv \Phi(t_0, t). \ \square \tag{1.43}$$

b. Soluția ecuației neomogene intrare – stare

Următoarea teoremă se va referi la faptul că soluția *problemei Cauchy* (1.26), (1.6) este o funcție de tranziție. Ținând seama de liniaritatea ecuației diferențiale (1.26) rezultă că soluția are forma:

$$x(t) = x_{om}(t) + x_{part}(t), \tag{1.44}$$

$$x_{om}(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \quad t \geq t_0, \tag{1.45}$$

$$x_{part}(t) = \Phi(t, t_0)z(t), \quad t \geq t_0; \tag{1.46}$$

- $x_{om}(t)$ este *soluția ecuației omogene* (1.33) (ecuația (1.26) cu $u(t) \equiv 0$);
- $x_{part}(t)$ este *soluția particulară* a ecuației (1.26), cu $x_0 = 0$; (1.46) este de forma (1.45), dar $x(t_0)$ s-a înlocuit cu $z(t)$ (*metoda variației constantelor*). Necunoscuta $z(t)$ se determină astfel ca $x_{part}(t)$ să satisfacă ecuația (1.26):

$$\dot{x}_{part}(t) = A(t)x_{part}(t) + B(t)u(t). \tag{1.47}$$

Înlocuind (1.46) în (1.47) şi ținând seama de (1.42) şi (1.43), din (1.47) şi apoi din (1.46) cu (1.41) se obțin succesiv:

$$\Phi(t, t_0)\dot{z}(t) = B(t)u(t),$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\theta, t_0)B(\theta)\, u(\theta)\, d\theta, \quad t \geq t_0,$$

$$x_{part}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \theta) B(\theta)\, u(\theta)\, d\theta, \quad t \geq t_0 . \qquad (1.48)$$

La obținerea acestui rezultat, conform egalității (1.39), s-a ținut seama de

$$\Phi(t, t_0)\Phi^{-1}(\theta, t_0) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \theta) = X(t)X^{-1}(t_0)X(t_0)X^{-1}(\theta) = \Phi(t, \theta) .$$

În aceste circumstanțe, conform cu (1.44) – (1.48), soluția unică a problemei Cauchy (1.26), (1.6) are expresia:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \theta) B(\theta)\, u(\theta)\, d\theta, \quad t \geq t_0 . \qquad (1.49)$$

Transferul intrare – ieşire, reprezentat de operatorul de transfer $\mathcal{S}$ (v. (1.1)), se obține acum din (1.49) şi (1.27):

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta + D(t)u(t), \; t \geq t_0 .(1.50)$$

Teorema 1.8

Soluția (1.49) a ecuației neomogene (1.26) este funcția de tranziție a unui sistem dinamic neted, finit dimensional şi liniar.

$\mathcal{D}$. Se va arăta mai întâi că soluția (1.49) a ecuației (1.26), respectiv:

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) \equiv \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta, \; t \geq t_0 ,(1.51)$$

este funcție de tranziție. Se verifică proprietățile (e) din Definiția 1.3 şi anume:

(*i*) *Orientabilitatea*. $\varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$ este definită pentru orice $t \geq t_0$.

(*ii*) *Consistența*. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ şi $t = t_0$ are loc:

$$\varphi(t_0; t_0, x_0, u_{[t_0, t_0]}) = \Phi(t_0, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta = x(t_0) = x_0 .$$

(iii) Compozabilitatea. Pentru orice $t_1, \; t_2, \; t_3 \in \mathbb{R}$, cu $t_1 < t_2 < t_3$, are loc:

$$\varphi(t_3; t_1, x(t_1), u_{[t_1, t_3]}) = \Phi(t_3, t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} \Phi(t_3, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta =$$

$$= \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} \Phi(t_3, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta = \Phi(t_3, t_2)\left(\Phi(t_2, t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \theta) B(\theta)u(\theta)d\theta\right) +$$

$$+\int_{t_2}^{t_3}\Phi(t_3,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta=\varphi(t_3;t_2,\varphi(t_2;t_1,x(t_1),\ u_{[t_1,t_2]}),\ u_{[t_2,t_3]})\,.$$

(*iv*) *Cauzalitatea*. Pentru orice $t_0, t \in \mathbb{R}$ şi orice $u_{[t_0,t]}, \tilde{u}_{[t_0,t]} \in \Omega$, egalitatea $u_{[t_0,t]} = \tilde{u}_{[t_0,t]}$ implică:

$$\varphi(t;t_0,x_0,u_{[t_0,t]})=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta=$$
$$=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\theta)B(\theta)\tilde{u}(\theta)d\theta=\varphi(t;t_0,x_0,\tilde{u}_{[t_0,t]}).$$

φ dat de (1.51) are derivata continuă în t şi este continuă în t_0, x_0, u .

φ dat de (1.51) este liniară în raport cu x_0, u . Într-adevăr, pentru

$$x_0=\sum_{i\in I}c_i x_0^i,\quad u_{[t_0,t]}=\sum_{i\in I}c_i u_{[t_0,t]}^i\text{, orice }(x_0^i,u_{[t_0,t]}^i)\in\mathbb{X}\times\Omega\,,$$

şi orice constante $c_i \in \mathbb{R}, i \in I$ (I – mulțime finită / numărabilă de indici), are loc:

$$\varphi(t;t_0,\sum_{i\in I}c_i x_0^i,\sum_{i\in I}c_i u_{[t_0,t]}^i)=$$
$$=\Phi(t,t_0)\sum_{i\in I}c_i x_0^i+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\theta)B(\theta)\sum_{i\in I}c_i u_{[t_0,t]}^i d\theta=$$
$$=\sum_{i\in I}c_i\left[\Phi(t,t_0)x_0^i+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\theta)B(\theta)\,u^i(\theta)d\theta\right]=$$
$$=\sum_{i\in I}c_i\,\varphi(t;t_0,x_0^i,u_{[t_0,t]}^i).\square$$

Evaluând acum în ansamblu Teoremele 1.4 – 1.8 se ajunge uşor la concluzia că rezultatele pe care le conțin pot fi reunite în cadrul enunțului următor.

Teorema 1.9

O condiție necesară şi suficientă ca sistemul dinamic neted, finit dimensional (1.4), (1.5) să fie liniar este ca să fie descris de ecuații intrare – stare – ieşire de forma (1.26), (1.27). □

Observația 1.6

În virtutea acestui rezultat se observă că (1.45) – *soluția ecuației omogene* – coincide cu *componenta de regim liber* (1.28), şi *soluția particulară* (1.48) coincide cu *componenta de regim forțat* (1.29). Totodată, rezultă cu claritate că *operatorul de transfer* $\Psi(t, t_0)$ din (1.29) are forma integralei din (1.48). □

1.5. Sisteme dinamice liniare invariante în timp

Teorema 1.10

O condiție necesară ca sistemul dinamic neted, finit dimensional şi liniar (1.26), (1.27) să fie invariant în timp (constant) este ca să aibă forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n,\, u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.52}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{1.53}$$

în care matricele A, B, C, D sunt invariante în timp (constante).

$\mathscr{D}$. Pentru $u_{[t_0,\, t]} \equiv 0$ funcția de tranziție (1.51) se reduce la componenta de *regim liber* (1.28), identică cu soluția ecuației omogene (1.33) (v. Observația 1.6):

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, 0) = \Phi(t,\, t_0)\, x_0, \quad t \geq t_0. \tag{1.54}$$

Sistemul fiind invariant în timp, pentru orice $t, t_0, \tau \in \mathbb{R}$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$, conform Definiției 1.6, φ şi Φ din (1.54) satisfac relațiile:

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, x_0,\, 0) = \varphi(t+\tau;\, t_0+\tau,\, x_0,\, 0), \quad t \geq t_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n;$$

$$x(t) = \Phi(t,\, t_0)\, x_0 \quad = \Phi(t+\tau,\, t_0+\tau)\, x_0, \quad t \geq t_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n;$$

$$\Phi(t,\, t_0) \quad = \Phi(t+\tau,\, t_0+\tau), \quad t \geq t_0.$$

Pentru $\tau = t_0$ din acestea se obțin:

$$\Phi(t,\, t_0) = \Phi(t - t_0,\, 0), \quad t \geq t_0, \tag{1.55}$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0,\, 0)\, x_0, \quad t \geq t_0. \tag{1.56}$$

Relația (1.56) pune în evidență soluția ecuației omogene (1.33), adică

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\Phi(t - t_0,\, 0)\, x_0. \tag{1.57}$$

Pentru $t_0 = t$, comparând (1.57) cu (1.33), rezultă:

$$A(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t - t_0,\, 0)\Big|_{t=t_0} \equiv A = \text{constant}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.58}$$

Pentru $x_0 = 0$ funcția de tranziție (1.51) se reduce la componenta de *regim forțat* (1.29), identică cu *soluția particulară* (1.48) (v. şi Observația 1.6):

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, 0,\, u_{[t_0,\, t]}) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\theta,\, 0)\, B(\theta) u(\theta) d\theta, \quad t \geq t_0\,, \quad (1.59)$$

în care s-a ținut seama de (1.55).

Sistemul fiind invariant în timp, pentru orice $t,\, t_0, \tau \in \mathbb{R}$ şi orice segment $u_{[t_0,\, t]} \in \Omega$ – translat adecvat, conform Definiției 1.6, funcția (1.59) satisface:

$$x(t) = \varphi(t;\, t_0,\, 0,\, u_{[t_0,\, t]}) \qquad = \varphi(t+\tau;\, t_0+\tau,\, 0,\, \mathcal{S}_{-\tau} \circ u_{[t_0+\tau,\, t+\tau]});$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\theta,\, 0)\, B(\theta) u(\theta)\, d\theta = \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} \Phi(t-\theta+\tau,\, 0)\, B(\theta) u(\theta-\tau)\, d\theta, \ t \geq t_0.$$

Făcând în integrala din membrul doi schimbarea $\theta - \tau \to \theta$, se continuă cu:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t-\theta,\, 0)\, B(\theta) u(\theta) d\theta = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\theta,\, 0)\, B(\theta+\tau) u(\theta) d\theta\,,$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t-\theta,\, 0) \left[B(\theta) - B(\theta+\tau)\right] u(\theta) d\theta = 0, \ t \geq t_0\,. \qquad (1.60)$$

Cu $\Phi(t-\theta,\, 0) \not\equiv 0,\, u(\theta) \not\equiv 0,\, \theta \in [t_0,\, t] \subseteq \mathbb{R}$, conform teoremei Titchmarsh, [78], privind anularea produsului de convoluție, din (1.60) rezultă că

$$B(\theta) = B(\theta+\tau), \ \ \theta \in [t_0,\, t] \subseteq \mathbb{R}, \ \ \tau \in \mathbb{R}\,.$$

Pentru $\theta = t, \ \tau = -t$, din relația precedentă se obține:

$$B(t) = B(0) \equiv B = \text{constant}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \qquad (1.61)$$

În fine, invarianța în timp (Definiția 1.6), aplicată ecuației ieşirii (1.27) implică în mod evident:

$$C(t) \equiv C = \text{constant}, \ \ t \in \mathbb{R}\,, \qquad (1.62)$$

$$D(t) \equiv D = \text{constant}, \ \ t \in \mathbb{R}\,. \ \square \qquad (1.63)$$

a. Matricea fundamentală şi matricea de tranziție

Se va arăta că Teorema 1.10 este şi o condiție suficientă. În acest scop se dau următoarele rezultate pregătitoare: Teoremele 1.11 – 1.15 şi Observațiile 1.7 – 1.8.

Teorema 1.11

Matricea fundamentală a ecuației (1.52) se exprimă sub forma:

$$X(t)=e^{At},\ t\geq 0. \tag{1.64}$$

$\mathscr{D}$. Conforma Teoremei 1.5, pentru $A=\text{constant}$, $X(t)$ se obține din:

$$\dot{X}(t)=A\,X(t),\ t\geq 0,\quad X(0)=I_n,\quad \text{cu}\ \det X(t)=e^{t\,\mathrm{Tr}\,A}\neq 0. \tag{1.65}$$

Se caută o soluție exprimată prin seria de puteri (v. Teorema 1.6):

$$X(t)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}X_k\,t^k, \tag{1.66}$$

în care X_k, $k=0,1,2,...$, sunt matrice necunoscute. Ele se determină din (1.65) prin derivări succesive, pentru $t=0$. Se scrie:

$$X(0)=I_n,\ \dot{X}(0)=A,\ \ddot{X}(0)=\frac{1}{2!}A^2,\ \dddot{X}(0)=\frac{1}{3!}A^3,....,\ \overset{(k)}{X}(0)=\frac{1}{k!}A^k,.... .$$

Cu acestea şi cu derivatele seriei (1.66), calculate pentru $t=0$, se obține:

$$X(t)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\,t^k\triangleq e^{At}. \tag{1.67}$$

Exponențiala matriceală e^{At} este notația pentru suma seriei de puteri (1.67). Notația o extinde natural pe cea a exponențialei scalare: $e^{at}=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k t^k$. □

Observația 1.7

Din (1.67), prin înmulțire cu A la stânga şi la dreapta, se obține:

$$Ae^{At}\equiv e^{At}A,\quad A\,X(t)\equiv X(t)A. \tag{1.68}$$

Din (1.65), (1.68) se obține regula de derivare a exponențialei matriceale e^{At}:

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}\equiv e^{At}A,\quad \dot{X}(t)=A\,X(t)\equiv X(t)A.\ \square \tag{1.69}$$

Teorema 1.12

Inversa matricei fundamentale (1.64) are expresia.:

$$\tilde{X}(t)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-A)^k\,t^k\triangleq e^{-At}. \tag{1.70}$$

$\mathcal{D}$. Cu (1.69) şi (1.70) (derivată după regula (1.69)), se scrie succesiv:

$$\frac{d}{dt}\Big(X(t)\tilde{X}(t)\Big) = \dot{X}(t)\tilde{X}(t) + X(t)\dot{\tilde{X}}(t) = A\,X(t)\tilde{X}(t) + X(t)\Big(-A\tilde{X}(t)\Big) =$$

$$= A\,X(t)\tilde{X}(t) - A\,X(t)\tilde{X}(t) = 0 \;\Rightarrow\; X(t)\tilde{X}(t) = I_n\,.$$

Rezultatul final s-a obţinut prin integrare, iar constanta din membrul drept s-a determinat din condiţiile iniţiale $X(0) = I_n$, $\tilde{X}(0) = I_n$. Prin urmare:

$$X^{-1}(t) \equiv e^{-At}\,. \square \tag{1.71}$$

Observaţia 1.7 şi Teorema 1.12 pun în evidenţă similitudinea cu regulile de derivare şi de inversare a exponenţialei scalare e^{at}, fapt care confirmă consistenţa notaţiei adoptate pentru seria de puteri (1.67).

Fie ecuaţia omogenă corespunzătoare ecuaţiei (1.52):

$$\dot{x} = Ax,\; t \geq t_0\,. \tag{1.72}$$

Se ştie că soluţia problemei Cauchy (1.72), (1.6) are forma (1.45).

Pentru explicitarea matricei de tranziţie $\Phi(t, t_0)$ se va utiliza următorul rezultat din analiza matriceală, [25], [26].

Teorema 1.13

Fie E, F oricare două matrice pătratice de acelaşi ordin. Egalitatea

$$e^{Et}e^{Ft} = e^{(E+F)t} \tag{1.73}$$

are loc dacă şi numai dacă $EF = FE$. □

Teorema 1.14

Matricea de tranziţie a sistemului (1.52) are expresia:

$$\Phi(t, t_0) \equiv \Phi(t - t_0, 0) = e^{A(t-t_0)},\, t \geq t_0;\; \det\Phi(t - t_0, 0) = e^{(t-t_0)\mathrm{Tr}\,A} \neq 0\,. \tag{1.74}$$

Ea este soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\dot{\Phi}(t - t_0, 0) = A\Phi(t - t_0, 0),\; t \geq t_0;\;\; \Phi(0, 0) = I_0\,, \tag{1.75}$$

şi are proprietatea de comutativitate:

$$Ae^{A(t-t_0)} \equiv e^{A(t-t_0)}A, \quad A\Phi(t-t_0, 0) \equiv \Phi(t-t_0, 0)A, \quad t \geq t_0 \,. \quad (1.76)$$

Cu ajutorul acesteia se obține următoarea soluție a ecuației omogene (1.72):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0, \quad t \geq t_0 \,. \qquad (1.77)$$

$\mathscr{D}$. Conform cu (1.39), (1.64), (1.71), (1.73) matricea de tranziție are forma:

$$\Phi(t, t_0) = e^{At}e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)} \equiv \Phi(t-t_0, 0), \quad t \geq t_0 \,.$$

Ecuația (1.75) (care furnizează şi regula de derivare), proprietatea (1.76), şi soluția (1.77) se obțin imediat din (1.65), (1.68) şi respectiv (1.45). □

Observația 1.8

Matricea de tranziție $\Phi(t-t_0, 0)$ (v. (1.74)) are proprietățile precizate în Observația 1.3 şi anume:

(i) *Orientabilitatea*. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$ este definită pentru $t \geq t_0$.

(ii) *Consistența*. Din (1.74) pentru $t = t_0$ rezultă:

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0 - t_0, 0) = \Phi(0, 0) = e^{A0} = I_n \,, \qquad (1.78)$$

care asigură *consistența* soluției (1.77) pentru $t = t_0$.

(iii) *Compozabilitatea*. Pentru orice $t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{R}$, cu $t_1 < t_2 < t_3$, au loc:

$$\Phi(t_3 - t_1, 0) = \Phi(t_3 - t_2, 0)\Phi(t_2 - t_1, 0), \quad e^{A(t_3-t_1)} = e^{A(t_3-t_2)}e^{A(t_2-t_1)}. \quad (1.79)$$

Pentru soluția (1.77) a ecuației omogene (1.72), relația (1.79) are următoarea semnificație: soluția

$$x(t_3) = \Phi(t_3 - t_2, 0)x(t_1), \ t_3 \geq t_1 \,,$$

este compozabilă, în mod unic, din soluțiile:

$$x(t_3) = \Phi(t_3 - t_2, 0)x(t_2), \ t_3 \geq t_2 \ \text{şi} \ x(t_2) = \Phi(t_2 - t_1, 0)x(t_1), \ t_2 \geq t_1 \,. \ \square$$

b. Soluția ecuației neomogene intrare – stare

Ținând seama de (1.49) şi (1.74), soluția *problemei Cauchy* (1.52), (1.6), care, totodată este funcția de tranziție a sistemului (1.52), (1.53), are expresia:

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) \equiv e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta, \ \ t \geq t_0 \,. \ (1.80)$$

Teorema 1.15

O condiție suficientă ca sistemul dinamic neted, finit dimensional şi liniar (1.26), (1.27) să fie invariant în timp este ca să aibă forma (1.52), (1.53).

$\mathscr{D}$. Soluția (1.80) fiind o funcție de tranziție (rezultă din Teorema 1.8), rămâne de demonstrat că ea este invariantă în timp (v. Definiția 1.6). Într-adevăr, pentru orice $t, t_0, \tau \in \mathbb{R}$, orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şi orice $u_{[t_0, t]} \in \Omega$, (1.80) satisface:

$$\varphi(t; t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) = \varphi(t+\tau; t_0+\tau, x_0, u_{[t_0-\tau, t-\tau]}),$$

$$e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)\,d\theta = e^{A(t+\tau-t_0-\tau)}x_0 + \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} e^{A(t+\tau-\theta)}Bu(\theta-\tau)\,d\theta.$$

Reducând termenii asemenea şi făcând în membrul doi schimbarea de variabilă $\theta-\tau \to \theta$ se ajunge la o egalitate evidentă.

Demonstrația se finalizează ținând seama de faptul evident că (1.53) este invariantă în timp în sensul Definiției 1.6. Prin urmare, C, D sunt constante. □

Evaluând acum în ansamblu Teoremele 1.9 – 1.15 se ajunge uşor la concluzia că rezultatele pe care le conțin pot fi reunite în cadrul enunțului următor.

Teorema 1.16

O condiție necesară şi suficientă ca sistemul dinamic neted, finit dimensional şi liniar (1.26), (1.27) să fie invariant în timp este ca să fie descris de ecuații intrare – stare – ieşire de forma (1.52), (1.53). □

Transferul intrare – ieşire, reprezentat de operatorul de transfer $\mathscr{S}$ (v. (1.1)) şi ecuațiile (1.52) şi (1.53), se obține acum din (1.80) şi (1.53):

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)\,d\theta + Du(t), \quad t \geq t_0. \quad (1.81)$$

De notat că sistemele cu *parametrii constanții* (1.52), (1.53) se numesc şi sisteme dinamice liniare *constante* (v. Definiția 1.6), motivul fiind, evident, faptul că elementele matricelor A, B, C, D (i. e. parametrii sistemului) sunt constante.

c. Ecuațiile liniarizate ale unui sistem dinamic neliniar, neted, finit dimensional şi invariant în timp

Fie sistemul neliniar descris de ecuațiile (1.18), (1.19) şi fie vectorii constanți $\bar{u} \in \mathbb{R}^m, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}^p$ care definesc un *regim staționar* caracterizat de

$$\dot{x} = 0, \quad f(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad (1.82)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) . \tag{1.83}$$

Există situații în care sistemul evoluează, prin *mici variații* ale mărimilor u, x, y, în jurul regimului staționar definit prin vectorii constanți $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}$. În acest caz, pentru simplificarea tratării – dar fără a depăşi limitele unor *erori admisibile* de modelare, modelul (1.18), (1.19) se poate *liniariza* folosind *formula Taylor* de ordinul întâi. În ipoteza că funcțiile vectoriale f, g admit derivate de ordinul doi continue, conform formulei Taylor se scrie:

$$f(x, u) = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u})}_{=\dot{\bar{x}}=0} + f_x(\bar{x}, \bar{u})(x - \bar{x}) + f_u(\bar{x}, \bar{u})(u - \bar{u}) + \underbrace{F_1(v)}_{\approx 0} , \tag{1.84}$$

$$g(x, u) = \underbrace{g(\bar{x}, \bar{u})}_{=\bar{y}} + g_x(\bar{x}, \bar{u})(x - \bar{x}) + g_u(\bar{x}, \bar{u})(u - \bar{u}) + \underbrace{G_1(v)}_{\approx 0} , \tag{1.85}$$

în care, pentru primii termeni din membrul doi, s-a ținut seama de (1.82) şi (1.83).

În formulele (1.84) şi (1.85), matricele constante

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) \triangleq \bar{A} , \; f_u(\bar{x}, \bar{u}) \triangleq \bar{B} , \tag{1.86}$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) \triangleq \bar{C} , \; g_u(\bar{x}, \bar{u}) \triangleq \bar{D} \tag{1.87}$$

sunt derivatele de ordinul întâi (matricele jacobiene) în raport cu vectorii x şi respectiv u, ale funcțiilor vectoriale f și respectiv g, calculate pentru regimul staționar considerat, reprezentat de $\bar{x}$ și $\bar{u}$. Totodată, $F_1(v)$ și $G_1(v)$ sunt resturile de ordinul întâi, în care $v \triangleq [x^T \; u^T]^T$ este vectorul constituit din x şi u. Aceste resturi pot fi estimate. Ele sunt neglijabile (aşa cum se subliniază în formulele (1.84) şi (1.85)) pentru micile variații ale mărimilor u, x, respectiv în jurul valorilor staționare $\bar{u}, \bar{x}$, în conformitate cu proprietățile:

$$\lim_{v \to \bar{v}} \frac{\| F_1(v) \|}{\| v - \bar{v} \|^2} = 0 , \; \lim_{v \to \bar{v}} \frac{\| G_1(v) \|}{\| v - \bar{v} \|^2} = 0 , \text{ în care } \bar{v} \triangleq [\bar{x}^T \; \bar{u}^T]^T .$$

Se notează cu:

$$\tilde{u} = u - \bar{u} , \; \tilde{x} = x - \bar{x} , \; \tilde{y} = y - \bar{y} \tag{1.88}$$

micile variații ale mărimilor u, x, y respectiv în jurul valorilor $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}$.

În aceste circumstanțe, înlocuind adecvat (1.86) – (1.88) în (1.84), (1.85) şi apoi introducând adecvat rezultatele în (1.18), (1.19), cu (1.88), se obține următorul sistem dinamic neted, finit dimensional, invariant în timp şi liniar:

$$\dot{\tilde{x}} = \overline{A}\,\tilde{x} + \overline{B}\,\tilde{u}, \quad t \geq t_0, \tag{1.89}$$

$$\tilde{y} = \overline{C}\,\tilde{x} + \overline{D}\tilde{u}\,. \tag{1.90}$$

Acesta reprezintă acceptabil sistemul (1.18), (1.19) numai atâta timp cât erorile de aproximare, adică resturile de ordinul întâi satisfac condițiile:

$$\left\| F_1(v) \right\| \leq \varepsilon_F, \quad \left\| G_1(v) \right\| \leq \varepsilon_G, \tag{1.91}$$

în care $\varepsilon_F, \varepsilon_G$ sunt *erorile admisibile* corespunzătoare. Evident, din (1.91) urmează să se determine *limitele admisibile* ale micilor variații $\tilde{u}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

1.6. Reprezentări prin modele liniare invariante în timp

O problemă importantă care trebuie să se rezolve în analiza unui sistem este aceea a elaborării unui model matematic adecvat atât teoretic cât şi practic, până la un compromis acceptabil între acuratețea şi simplitatea reprezentării sistemului real. În acest sens o categorie semnificativă o reprezintă modelele liniare.

Cea mai mare parte a metodelor de analiză şi de sinteză ale sistemelor dinamice se sprijină pe ipoteza existenței unor modele matematice liniare finit dimensionale invariante în timp. Acest fapt este lesne explicabil. Pe de o parte, o mare varietate de sisteme reale sunt acceptabil reprezentabile prin astfel de modele. Pe de altă parte, existând o teorie consistentă şi coerentă a sistemelor liniare, aceste modele sunt relativ uşor tratabile matematic şi utilizabile în aplicații.

În studiul sistemelor dinamice se folosesc în prezent, în mod preponderent, următoarele patru categorii de modele matematice liniare, finit dimensionale şi invariante în timp:

- reprezentarea *intrare – stare – ieşire* sau *de stare*,
- reprezentarea prin *matricea de transfer*,
- reprezentarea prin matricea de transfer de tip *fracție matriceală* şi
- reprezentarea *polinomială* sau *de stare parțială*.

În continuare se prezintă aceste patru tipuri de modele matematice în cazul continuu în timp, proprietățile lor de transfer intrare – ieşire, şi relațiile dintre ele.

2. Reprezentarea de stare

2.1. Ecuațiile de stare

Pornind de la Teorema 1.16, se vor avea în vedere sisteme dinamice netede, finit dimensionale, liniare, constante descrise de următoarele ecuații de stare:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

$$y = Cx + D(\cdot)u, \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{2.2}$$

în care A, B, C sunt matrice reale constante, $D(\cdot)$ este un operator matriceal derivativ, şi m, n, p sunt numere naturale.

Aceste ecuații descriu:

- prin (2.1): tendința de evoluție a *stării interne* x a sistemului prin acțiunea *stării* asupra ei însăşi şi acțiunea *mărimii de intrare* u;
- prin (2.2): evoluția *mărimii de ieşire* y prin acțiunea instantanee simultană a *stării* x şi a *mărimii de intrare* u.

Numărul n este, după caz, *ordinul* sau *dimensiunea sistemului* / *reprezentării de stare* / *modelului*. Ordinul n reflectă faptul că starea este „acea parte a prezentului şi a istoriei trecute a sistemului care este semnificativă pentru determinarea ieşirii în prezent şi în viitor”, [27]. În practica modelării matematice această afirmație poate fi convertită într-un criteriu eficient numai în cazul sistemelor simple. În cazul sistemelor de dimensiuni mari, evaluarea *părții semnificative a istoriei sistemului*, respectiv estimarea valorii adecvate a dimensiunii n nu este facilă. Aceasta deoarece, în cazul identificării experimentale, creşterea dimensiunii modelului determină o creştere a complexității procedurii de identificare. Prin urmare, soluția problemei nu este creşterea dimensiunii modelului, ci reducerea ei până la un echilibru adecvat între *complexitatea* şi *simplitatea* modelului. Şi anume astfel încât în aplicații să se asigure un compromis între o *acuratețe acceptabilă* şi o *manevrabilitate eficientă* a modelului. În acest context este esențială delimitarea şi evaluarea corectă a elementelor acumulatoare de substanță, energie şi informație, independente şi relevante pentru fenomenele din sistemul real. Numărul acestor elemente este o primă indicație, de valorificat pertinent, asupra ordinului n al modelului matematic.

Se admite că timpul fizic este continuu (creşte de la trecut spre viitor) şi că sistemele reale procesează mărimi fizice reprezentate prin *funcţii generalizate*, [47]. Urmează că operaţia de derivare simbolizată prin „ $\dot{}$ ” are semnificaţia de *derivată generalizată* sau de *derivată în sens distribuţii*.

Observaţia 2.1

Comparativ cu (1.52), (1.53), în modelul (2.1), (2.2) s-a introdus operatorul de derivare $D(\dot{})$ pe conexiunea directă intrare – ieşire. Uzual $D(\dot{}) \equiv D$, adică este o matrice cu elemente constante. În anumite situaţii, în care pe parcursul elaborării modelului matematic se fac simplificări / idealizări (vezi Observaţiile 1.1 şi 1.2), este posibil ca în conexiunea directă intrare – ieşire din (2.2) să apară şi derivate ale intrării u (pentru alte detalii v. Observaţia 4.1). În virtutea liniarităţii şi invarianţei în timp, $D(\dot{})$ este un operator matriceal derivativ liniar, cu coeficienţi constanţi. Elementul generic $d_{ij}(\dot{})$ este un operator polinomial derivativ, cu coeficienţi constanţi $d_k^{ij},\ k=\overline{0,m_{ij}}$, de forma:

$$d_{ij}(\dot{}) = \sum_{k=0}^{m_{ij}} d_k^{ij} \frac{d^k}{ds^k},\quad i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,m}.$$

Cu aceasta termenul $D(\dot{})u(t)$ din (2.2) se explicitează astfel:

$$D(\dot{})u(t) = \left(d_{ij}(\dot{})\right)_{i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,m}} \left(u_j(t)\right)_{j=\overline{1,m}} = \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_{ij}} d_k^{ij} \frac{d^k u_j(t)}{ds^k}\right)_{i=\overline{1,p}},$$

în care $u_j(t),\ j=\overline{1,m}$, sunt componentele vectorului $u(t)$. □

Exemplul 2.1

Procesul care are loc într-o coloană de distilare (utilizată curent în industria chimică) este deosebit de complex. El este descris de peste 100 de variabile. Evident, proiectarea conducerii automate folosind un model matematic de dimensiuni foarte mari conduce la soluţii complicate şi scumpe. Alternativa constă în a considera numai fenomenele esenţiale ale procesului. De exemplu, în cazul separării izopropanolului din soluţie apoasă folosind ca extractant glicolul s-a obţinut un model matematic de ordinul 4, uşor utilizabil în proiectarea conducerii automate, [66], [67], [87].

O reprezentare schematică a coloanei de distilare şi a profilurilor concentraţiilor şi temperaturii de-a lungul cotei z a coloanei se dau în fig. I.2.1. Modelul matematic simplificat se bazează pe aceste profiluri dependente de z .

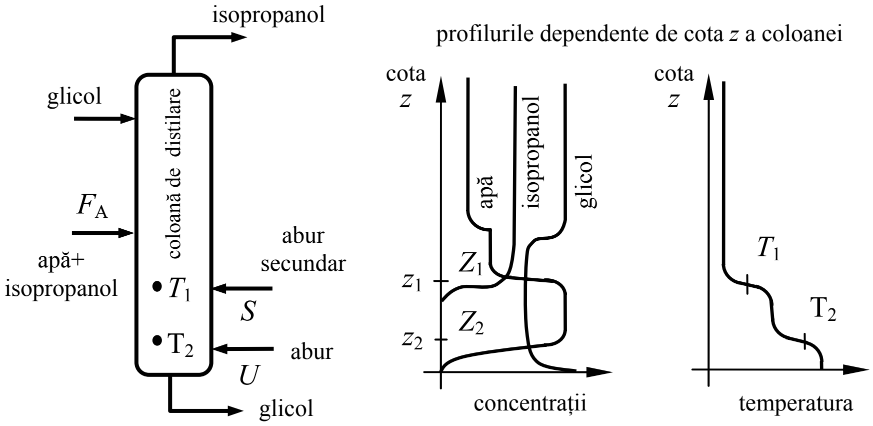

Fig. I.2.1. Schema funcţional – tehnologică a coloanei de distilare şi profilurile concentraţiilor şi temperaturilor (*Exemplul 2.1*)

Există două zone în care au loc modificări fizice importante: Z_1 (cota z_1, temperatura T_1), la care are loc un schimb interfazic între apă şi izopropanol, şi Z_2 (cota z_2 , temperatura T_2), la care are loc un schimb interfazic între apă şi glicol. În ambele zone au loc variaţii importante de temperatură. Prin modificarea debitului F_A al amestecului de apă şi izopropanol (aflate în raportul x_{FA}), a debitului U al aburului de încălzire şi a debitului S al aburului secundar, cotele z_1 şi z_2 (unde se află zonele Z_1 şi Z_2) pot fi mărite sau micşorate, simultan cu schimbarea variaţiilor profilurilor concentraţiilor şi temperaturii. În acest context două dintre variabilele de stare sunt chiar cotele z_1 şi z_2. La acestea se adaugă: Q_1 – fluxul termic al aburului, şi V_e – debitul de evaporare. Modelul matematic liniar simplificat obţinut are forma (2.1), (2.2), cu $n = 4,\ m = 4,\ p = 2$, în care:

$$u = \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta S \\ \Delta x_{FA} \\ \Delta F_A \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta V_e \\ \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix},$$

şi

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{24} \end{bmatrix},\ D=0.$$

Prin Δ se simbolizează micile variații ale variabilelor în raport cu un regim staționar bine definit (v. 1.5.c). □

În mod obişnuit, admițând ipoteza unei adecvanțe acceptabile între sistemul real şi modelul său matematic, nu se va face o distincție expresă între cele două entități. În acest sens prin termenul de sistem se desemnează un crâmpei de realitate reprezentat în esența sa, în mod satisfăcător, de un model matematic.

2.2. Structura algebrică a matricei de tranziție

Rezultatele formulate prin Teorema 1.14 arată că *matricea de tranziție* a sistemului (2.1), (2.2) este soluția ecuației:

$$\dot{\Phi}(t-t_0,0)=A\Phi(t-t_0,0)\equiv\Phi(t-t_0,0)A,\quad t\geq t_0,\ \Phi(0,0)=I_n. \quad (2.3)$$

Aceasta statuează şi regula de derivare a matricei de tranziție, care are expresia:

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0,0)=e^{A(t-t_0)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k,\quad t\geq t_0\ . \quad (2.4)$$

Componenta de regim liber este soluția ecuației omogene:

$$\dot{x}=Ax,\quad t\geq t_0, \quad (2.5)$$

pentru starea inițială:

$$x(t_0)=x_0. \quad (2.6)$$

Această soluție se bazează pe matricea de tranziție şi are forma:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0,\quad t\geq t_0. \quad (2.7)$$

Totodată, se are în vedere că în cadrul Observației 1.8 s-a demonstrat că matricea de tranziție are proprietățile de *orientabilitate, consistență* şi *compozabilitate*.

În această secțiune se prezintă structura algebrică a matricei de tranziție, care oferă totodată o primă imagine asupra dinamicii regimului liber al sistemului.

a. Explicitarea bazată pe formula Lagrange – Sylvester

Matricea de tranziție $\Phi(t-t_0,0)$ depinde de matricea A şi de durata $t-t_0$. Pentru evaluarea nuanțată a acestei dependențe se consideră pentru ecuația omogenă (2.5), cu $t_0=0$ (pentru simplitate), prin analogie cu (2.7), o soluție de forma:

$$x(t)=e^{\lambda t}v,\ t\geq 0, \tag{2.8}$$

în care λ este un scalar (real sau complex) şi $v\neq 0$ este un vector constant (real sau complex). Înlocuind (2.8) în (2.5) şi simplificând prin $e^{\lambda t}\neq 0$ se obține:

$$(I_n\lambda-A)v=0. \tag{2.9}$$

Ecuația (2.9) admite o soluție $v\neq 0$ dacă şi numai dacă $\mathrm{rang}(I_ns-A)<n$. Această condiție fiind echivalentă cu $\det(I_n\lambda-A)=0$, rezultă că există $v\neq 0$ dacă şi numai dacă λ este o rădăcină a *polinomului caracteristic* al matricei A:

$$d(s)\triangleq \det(I_ns-A)=s^n+\alpha_1s^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n. \tag{2.10}$$

λ, ca rădăcină a polinomului $d(s)$, se numeşte *valoare proprie* a matricei A (sau a sistemului) şi v este *vectorul propriu* asociat lui λ.

Întrucât polinomul caracteristic (2.10) este de gradul n, rezultă că matricea A are, în general, *valorile proprii distincte* $\lambda_i,\ i=\overline{1,r}$, fiecare de *multiplicitate algebrică* q_i, astfel încât:

$$d(s)\equiv\prod\nolimits_{i=1}^{r}(s-\lambda_i)^{q_i},\quad \text{cu } \sum\nolimits_{i=1}^{r}q_i=n. \tag{2.11}$$

Toate aceste considerente sugerează faptul că soluția problemei Cauchy (2.5), (2.6) este o combinație liniară de soluții similare cu (2.8), eventual având şi exponențiale înmulțite cu polinoame. Acest fapt este confirmat de următoarea formă a matricei de tranziție bazată pe formula Lagrange – Sylvester, [25], [26]:

$$\Phi(t,0)=e^{At}=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\frac{1}{(q_i-1)!}\left\{\frac{d^{q_i-1}}{ds^{q_i-1}}\left[\frac{e^{st}\,\mathrm{adj}(I_ns-A)}{\prod\nolimits_{j=1,\ j\neq i}^{r}(s-\lambda_j)^{q_j}}\right]\right\}_{s=\lambda_i},\ t\geq 0, \tag{2.12}$$

în care $\mathrm{adj}(I_ns-A)$ este *matricea adjunctă* a *matricei caracteristice* (I_ns-A).

Observația 2.2

Din (2.12) se trage concluzia, foarte importantă, că evoluția matricei de tranziție (2.4) și dinamica componentei de regim liber (2.7) depind calitativ și cantitativ de valorile proprii λ_i ale matricei A, de $\mathrm{adj}(I_n\lambda_i - A)$ și, evident, de durata de evoluție $t - t_0$ (respectiv t pentru $t_0 = 0$). □

În ceea ce privește determinarea polinomului caracteristic (2.10) și a matricei adjuncte (o matrice polinomială în s):

$$\mathrm{adj}(I_n s - A) \triangleq B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \ldots + B_{n-1} s + B_n, \tag{2.13}$$

în afară de procedeele bazate pe propriile lor definiții, se poate utiliza algoritmul Leverrier – Fadeev, [25], [26]. Cu acesta se determină matricele B_i și coeficienții α_i, $i = \overline{1,n}$, folosind următoarele formule de recurență:

$$\begin{cases} B_1 = I_n, & \alpha_1 = -\mathrm{Tr}\, A, \\ B_i = B_{i-1}A + \alpha_{i-1} I_n, & \alpha_i = -\dfrac{1}{i}\mathrm{Tr}\, B_i\, A, \;\; i = \overline{2,n}, \end{cases} \tag{2.14}$$

în care prin Tr se notează *urma matricei*.

Exemplul 2.2

Se consideră matricea de ordinul 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine structura matricei e^{At} conform relației (2.12).

Utilizând (2.10), polinomul caracteristic al matricei A are forma:

$$d(s) = \det(I_3 s - A) = s^3 - 3s^2 - 9s + 27 = (s-3)^2(s+3),$$

din care se obțin: $r = 2,\ \lambda_1 = 3,\ q_1 = 2,\ \lambda_2 = -3,\ q_2 = 1$.

Având în vedere că matricea adjunctă a matricei $(I_3 s - A)$ are expresia:

$$\mathrm{adj}(I_3 s - A) = \begin{bmatrix} (s-1)^2 & 3s-7 & -2(s-1) \\ 4(s-1) & (s-1)^2 & -8 \\ 8 & 2(s-1) & s^2 - 2s - 11 \end{bmatrix},$$

pe baza formulei (2.12) rezultă:

$$e^{At} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{s+3} \mathrm{adj}(I_3 s - A) \right] \right\}_{s=3} + \left\{ \frac{e^{st}}{(s-3)^2} \mathrm{adj}(I_3 s - A) \right\}_{s=-3} =$$

$$= e^{3t} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+3} \mathrm{adj}(I_3 s - A) \right] \right\}_{s=3} + te^{3t} \left\{ \frac{e^{st}}{s+3} \mathrm{adj}(I_3 s - A) \right\}_{s=3} +$$

$$+ e^{-3t} \left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \mathrm{adj}(I_3 s - A) \right\}_{s=-3} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} e^{3t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} t e^{3t} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} e^{-3t} . \ \square$$

b. Explicitarea bazată pe teorema Cayley – Hamilton

Teorema Cayley – Hamilton, [25], [26], afirmă că matricea A este rădăcina propriului polinom caracteristic (se înlocuieşte formal scalarul s cu matricea A în (2.10)), adică:

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I_n = 0 . \tag{2.15}$$

Folosind (2.15) în mod repetat în (2.4) pentru exprimarea matricelor A^i, $i \geq n$, prin matricele A^k, $k = \overline{1, n-1}$, se obține:

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} f_k(t) A^{k-1}, \quad t \geq 0 , \tag{2.16}$$

$$f(t) \triangleq \left[f_1(t) \ f_2(t) \ \ldots \ f_n(t) \right]^T , \tag{2.17}$$

în care $f_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, sunt funcții liniar independente. Pentru a le determina se înlocuieşte (2.16) în (2.3), cu (2.15). Identificând apoi coeficienții expresiilor polinomiale în A, se obține, în conformitate cu notația (2.17), următoarea ecuație:

$$\dot{f}(t) = F_d f(t) , \tag{2.18}$$

$$F_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} . \tag{2.19}$$

Pentru $t=0$ în (2.16), ținând seama de $\Phi(0,0)=I_n$, rezultă că ecuației (2.18) i se asociază condiția inițială:

$$f(0)=(I_n)_1, \tag{2.20}$$

în care $(I_n)_1$ este prima coloană a matricei unitate I_n.

Problema (2.18), (2.20) este similară cu (2.5), (2.6), dar mai transparentă deoarece *matricea Frobenius* F_d (v. (2.19)) şi condiția inițială (2.20) au forme particulare. F_d are elemente 1 pe subdiagonala principală şi pe ultima coloană are coeficienții cu semn schimbat şi în ordine inversă ai polinomului caracteristic (2.10) al matricei A; restul elementelor sunt nule. De asemenea, prin însăşi forma ei, matricea F_d are acelaşi polinom caracteristic ca matricea A, [25], [26]:

$$\det(I_n s-F_d)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n. \tag{2.21}$$

Aceasta înseamnă că F_d are aceleaşi valori proprii ca şi A. Proprietatea (2.21) asociată explicitării (2.19) justifică denumirea de *matricea companion* a polinomului $d(s)$ (relația (2.10)) care se mai utilizează pentru matricea F_d.

În aceste condiții soluția problemei Cauchy (2.18) şi (2.20) este:

$$f(t)=e^{F_d t}(I_n)_1=(e^{F_d t})_1, \quad t\geq 0, \tag{2.22}$$

adică $f(t)$ coincide cu prima coloană a matricei de tranziție $e^{F_d t}$ a sistemului (2.18). Mai departe, ținând seama de formula (2.12), în care A se înlocuieşte cu F_d, şi de (2.10), (2.21), soluția (2.22) poate fi scrisă sub forma:

$$f(t)=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\frac{1}{(q_i-1)!}\left\{\frac{d^{q_i-1}}{ds^{q_i-1}}\left[\frac{\left(\operatorname{adj}(I_n s-F_d)\right)_1}{\prod\nolimits_{j=1,\ j\neq i}^{r}(s-\lambda_j)^{q_j}}e^{st}\right]\right\}\Bigg|_{s=\lambda_i}. \tag{2.23}$$

Pentru a arăta că funcțiile $f_k(t),\ k=\overline{1,n}$, sunt liniar independente se foloseşte *testul Wronski*, [3]. Conform acestuia independența liniară a acestor funcții este echivalentă cu (se ține seama de (2.18), (2.19) şi (2.22)):

$$\det\left[f(t),\ \dot f(t),\ \ddot f(t),\ldots,\ \overset{(n-1)}{f}(t)\right]=\det e^{F_d t}=e^{t\operatorname{Tr}F_d}=e^{-\alpha_1 t}\neq 0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Este evident că (2.16), (2.17), (2.19) şi (2.23) furnizează o nouă explicitare a structurii algebrice a matricei de tranziţie e^{At}.

Exemplul 2.3

Fie matricea A de la Exemplul 2.2. Să se determine e^{At} folosind (2.23).

Coeficienţii polinomului caracteristic sunt cunoscuţi de la Exemplul 2.2: $\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = -9,\ \alpha_3 = 27$. Ca urmare,

$$F_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -27 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ I_3 s - F_d = \begin{bmatrix} s & 0 & 27 \\ -1 & s & -9 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix},\ \left(\operatorname{adj}(I_3 s - F_d)\right)_1 = \begin{bmatrix} s^2 - 3s - 9 \\ s-3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A şi F_d au valorile proprii $\lambda_1 = 3,\ q_1 = 2,\ \lambda_2 = -3,\ q_2 = 1$ şi $r = 2$ (au acelaşi polinom caracteristic). Conform relaţiei (2.23) se poate scrie:

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{ds}\left\{ \frac{e^{st}}{s+3} \begin{bmatrix} s^2 - 3s - 9 \\ s-3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{s=3} + \left\{ \frac{e^{st}}{(s-3)^2} \begin{bmatrix} s^2 - 3s - 9 \\ s-3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{s=-3} =$$

$$= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 27 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{3t} + \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} (27 - 54t)e^{3t} + 9e^{-3t} \\ 6e^{3t} - 6e^{-3t} \\ (-1 + 6t)e^{3t} + e^{-3t} \end{bmatrix};$$

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum\nolimits_{k=1}^{3} f_k(t) A^{k-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[3(1 - 2t)e^{3t} + e^{-3t}\right] +$$

$$+ \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}(e^{3t} - e^{-3t}) + \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 13 & 2 & -4 \\ 8 & 13 & -8 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}\left[(-1 + 6t)e^{3t} + e^{-3t}\right].\square$$

2.3. Structura modală a matricei de tranziţie

a. Cazul valorilor proprii simple

Fie $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, valorile proprii simple ale matricei A şi $v_i,\ i = \overline{1,n}$, vectorii proprii corespunzători. Aceştia sunt soluţiile nenule ale ecuaţiilor:

$$A v_i = \lambda_i v_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.24}$$

obținute din (2.9) pentru $\lambda = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$.

Vectorii proprii astfel obținuți sunt liniar independenți.

Se definesc: *matricea modală* a matricei A:

$$V \triangleq \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right], \quad \text{cu } \det V \neq 0, \tag{2.25}$$

şi *matricea canonică diagonală* a matricei A:

$$J \triangleq \operatorname{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\}. \tag{2.26}$$

Ecuațiile (2.24) pot fi scrise şi sub forma matriceală:

$$AV = VJ.$$

Din aceasta se obține *transformarea de similitudine*:

$$J = V^{-1}AV, \ A = VJV^{-1}. \tag{2.27}$$

Aceasta sugerează utilizarea *transformării de stare*:

$$\tilde{x} = V^{-1}x, \ x = V\tilde{x} \tag{2.28}$$

pentru studiul ecuației omogene (2.5).

Înlocuind în mod adecvat (2.28) în (2.5), ținând seama de (2.27), rezultă:

$$\dot{\tilde{x}} = J\tilde{x}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.29}$$

numită *forma canonică diagonală* a sistemului (2.5). Calitatea sa esențială este că în *starea canonică* $\tilde{x} \triangleq (\tilde{x}_i)$ sistemul se prezintă la *gradul maxim de decuplare reciprocă* a componentelor $\tilde{x}_i$. Intr-adevăr, (2.29) cu (2.26) este echivalentă cu:

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i, \quad t \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1,n}.$$

Pentru $t_0 = 0$ aceste ecuații au soluțiile:

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\tilde{x}_i(0), \quad t \geq 0, \ i = \overline{1,n}.$$

Aceasta înseamnă că (2.29) are soluția:

$$\tilde{x}(t) = e^{Jt}\tilde{x}(0), \quad t \geq 0, \tag{2.30}$$

în care

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right\}. \tag{2.31}$$

Pe de altă parte, utilizând transformarea (2.28) în (2.30), se obține:

$$x(t) = Ve^{Jt}V^{-1}x(0), \quad t \geq 0 . \tag{2.32}$$

Aceasta, prin comparație cu (2.7), pentru $t_0 = 0$, conduce la concluzia că matricea de tranziție a sistemului (2.1), (2.2) are următoarea explicitare:

$$\Phi(t,0) = e^{At} = Ve^{Jt}V^{-1}, \quad t \geq 0 . \tag{2.33}$$

Se partiționează pe linii inversa matricei modale $W \triangleq V^{-1}$, similar cu partiționarea pe coloane a matricei V – relația (2.25), sub forma:

$$V^{-1} = W \triangleq \left[w_1^T, w_2^T, \ldots, w_n^T\right]^T . \tag{2.34}$$

Cu (2.25), (2.31), (2.34), *structura modală* a matricei de tranziție (2.33) are forma:

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 . \tag{2.35}$$

În (2.35) se disting următoarele componente geometrice dependente de timp:

$$m_{vi}(t) \triangleq e^{\lambda_i t} v_i, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.36}$$

numite *modurile proprii* v ale sistemului (2.1), (2.2), şi

$$m_{wi}(t) \triangleq e^{\lambda_i t} w_i, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.37}$$

numite *modurile proprii* w ale sistemului (2.1), (2.2).

Evident, *alura geometrică şi dinamică* a modurilor proprii depinde de valorile proprii, de asociatele lor geometrice din (2.25), (2.34) şi, desigur, de timp.

b. Cazul valorilor proprii multiple

La aspectele algebrice ale valorilor proprii λ_i, $i = \overline{1,r}$, se adaugă acum faptul că pe lângă multiplicitățile algebrice q_i (v. relația (2.11)), ele se caracterizează şi prin *multiplicitățile geometrice* p_i, $i = \overline{1,r}$, [25], [26]. Numărul p_i, cu $1 \leq p_i \leq q_i$, este *defectul de rang* al matricei $(I_n \lambda_i - A)$:

$$p_i \triangleq n - \operatorname{rang}(I_n \lambda_i - A), \quad i = \overline{1,r} . \tag{2.38}$$

Acesta este numărul maxim de vectori proprii $v_{ij}^{1},\ j=\overline{1,p_i}$, obținuți ca soluții nenule şi liniar independente ale ecuației (2.9) cu $\lambda=\lambda_i$:

$$Av_{ij}^{1}=\lambda_i v_{ij}^{1},\quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}. \tag{2.39}$$

Pentru constituirea matricei modale V a matricei A, fiecărui vector propriu v_{ij}^{1} i se adaugă $k_{ij}-1$ *vectori proprii generalizați*, conform ecuațiilor recurente:

$$Av_{ij}^{k+1}=v_{ij}^{k}+\lambda_i v_{ij}^{k+1},\quad k=\overline{1,k_{ij}-1},\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}, \tag{2.40}$$

dar astfel încât $v_{ij}^{k},\ k=\overline{1,k_{ij}}$, să fie liniar independenți între ei şi în raport cu ceilalți vectori proprii şi proprii generalizați ai matricei A. Evident, în conformitate cu (2.11), are loc:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p_i}k_{ij}=\sum_{i=1}^{r}q_i=n. \tag{2.41}$$

Vectorii liniar independenți $v_{ij}^{k},\ k=\overline{1,k_{ij}},\ j=\overline{1,p_j},\ i=\overline{1,r}$, se grupează în următoarele submatrice:

$$V_{ij}\triangleq\left[v_{ij}^{1},v_{ij}^{2},\ldots,v_{ij}^{k_{ij}}\right],\quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}. \tag{2.42}$$

Cu submatricele (2.42) se constituie *matricea modală* a matricei A:

$$V\triangleq\Big[\underbrace{V_{11},\ldots,V_{1p_1}}_{\text{pt.}\lambda_1},\underbrace{V_{21},\ldots,V_{2p_2}}_{\text{pt.}\lambda_2},\ldots,\underbrace{V_{r1},\ldots,V_{rp_r}}_{\text{pt.}\lambda_r}\Big]. \tag{2.43}$$

În aceste condiții este vizibil că pentru i şi j fixați relațiile (2.39) şi (2.40) se scriu în următoarea formă:

$$AV_{ij}=V_{ij}J_{ij},\quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}, \tag{2.44}$$

în care:

$$J_{ij}\triangleq\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix},\quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}, \tag{2.45}$$

sunt *bloc-matricele Jordan* de ordinul k_{ij}; J_{ij}, $j=\overline{1,p_i}$, sunt asociați valorii proprii λ_i şi vectorilor proprii v_{ij}^k, $k=\overline{1,k_{ij}}, j=\overline{1,p_i}$.

Aplicând o procedură similară, relațiile (2.44) pot fi scrise şi ele într-o formă matriceală, bazată pe matricea *canonică* (*bloc-diagonală*) *Jordan*:

$$J \triangleq \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{J_{11},...,J_{1p_1}}_{\text{pt.}\lambda_1}, \underbrace{J_{21},...,J_{2p_2}}_{\text{pt.}\lambda_2},..., \underbrace{J_{r1},...,J_{rp_r}}_{\text{pt.}\lambda_r}\Big\}. \qquad (2.46)$$

Se obține astfel transformarea de similitudine (2.27) cu (2.42), (2.43), (2.45), (2.46).

Utilizând transformarea de stare (2.28), cu (2.43) şi (2.42), pentru studiul ecuației omogene (2.5), ținând seama de (2.27), se obține ecuația (2.29), cu (2.46), şi (2.45). Aceasta se numeşte *forma canonică Jordan* a sistemului (2.5). Calitatea esențială a acesteia este aceea că în *starea canonică* $\tilde{x}$ sistemul se prezintă la *gradul maxim posibil de decuplare reciprocă* a componentelor sale. Este vizibil că (2.29), cu (2.45) şi (2.46), este echivalentă cu:

$$\dot{\tilde{x}}_{ij} = J_{ij}\tilde{x}_{ij}, \quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}, \qquad (2.47)$$

în care $\tilde{x}_{ij}=[\tilde{x}_{ij}^1 ... \tilde{x}_{ij}^{k_{ij}}]^T$, iar $\tilde{x}_{ij}^k$, $k=\overline{1,k_{ij}}$, $j=\overline{1,p_i}, i=\overline{1,r}$, sunt componentele vectorului de stare canonic, notate şi grupate după aceiaşi regulă ca şi vectorii care constituie matricea modală (2.43) cu (2.42).

Sistemele (2.47), total decuplate între ele, pot fi integrate prin substituții succesive ale componentelor vectorului $\tilde{x}_{ij}$ (şi anume de la $\tilde{x}_{ij}^{k_{ij}}$ la $\tilde{x}_{ij}^1$) astfel că, în final, după calcule relativ simple, pentru $t_0=0$, se obține:

$$\tilde{x}_{ij}(t) = e^{J_{ij}t}\tilde{x}_{ij}(0), \quad t \ge 0,\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}, \qquad (2.48)$$

în care:

$$e^{J_{ij}t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1!}t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(k_{ij}-1)!}t^{k_{ij}-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!}t & \cdots & \frac{1}{(k_{ij}-2)!}t^{k_{ij}-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}, \quad t \ge 0, \quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r} \quad .(2.49)$$

Soluțiile (2.48) pot fi reunite în forma matriceală (2.30), dar în care:

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{e^{J_{11}t},\ldots,e^{J_{1p_1}t}}_{\text{pt. }\lambda_1},\underbrace{e^{J_{21}t},\ldots,e^{J_{2p_2}t}}_{\text{pt. }\lambda_2},\ldots,\underbrace{e^{J_{r1}t},\ldots,e^{J_{rp_r}t}}_{\text{pt. }\lambda_r}\Big\},\quad t\geq 0\,. \qquad (2.50)$$

Utilizând şi în acest caz transformarea (2.27), cu (2.43) şi (2.42), în (2.29) se obține soluția (2.32), cu (2.50) şi (2.49). Aceasta conduce în final la explicitarea (2.33) cu (2.42), (2.43), (2.49), (2.50) a matricei de tranziție.

Procedând acum la partiționarea pe linii a matricei $W \triangleq V^{-1}$ (analog cu partiționarea pe coloane a matricei V – relația (2.43) cu (2.42)) şi anume de forma:

$$V^{-1} = [\underbrace{W_{11}^T,\ldots,W_{1p_1}^T}_{\text{pt. }\lambda_1},\underbrace{W_{21}^T,\ldots,W_{2p_2}^T}_{\text{pt. }\lambda_2},\ldots,\underbrace{W_{r1}^T,\ldots,W_{rp_r}^T}_{\text{pt. }\lambda_r}]^T\,, \qquad (2.51)$$

cu

$$W_{ij} = [(w_{ij}^1)^T,(w_{ij}^2)^T,\ldots,(w_{ij}^{k_{ij}})^T]^T,\quad j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}\,, \qquad (2.52)$$

din (2.33), (2.43), (2.50), (2.51) şi (2.52) rezultă:

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{j=1}^{p_i} V_{ij}\,e^{J_{ij}t}\,W_{ij},\quad t\geq 0\,. \qquad (2.53)$$

În fine, ținând seama de (2.42), (2.49) şi (2.52), din (2.53) se obțin următoarele *structuri modale* ale matricei de tranziție:

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{j=1}^{p_i}\sum\nolimits_{k=1}^{k_{ij}}\left(e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}v_{ij}^l\right)w_{ij}^k,\ t\geq 0\,. \qquad (2.54)$$

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{j=1}^{p_i}\sum\nolimits_{k=1}^{k_{ij}}v_{ij}^k\left(e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=k}^{k_{ij}}\frac{t^{l-k}}{(l-k)!}w_{ij}^l\right),\ t\geq 0\,. \qquad (2.55)$$

Ca la valorile proprii simple, se disting următoarele componente geometrice dependente de timp: în (2.54) – *modurile proprii v* ale sistemului (2.1), (2.2):

$$m_{v\,ij}^k(t) \triangleq e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}v_{ij}^l,\quad k=\overline{1,k_{ij}},\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}\,, \qquad (2.56)$$

şi respectiv în (2.55) – *modurile proprii w* ale sistemului (2.1), (2.2):

$$m_{w\,ij}^k(t) \triangleq e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=k}^{k_{ij}}\frac{t^{l-k}}{(l-k)!}w_{ij}^l,\ k=\overline{1,k_{ij}},\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,r}\,. \qquad (2.57)$$

Şi de această dată, în mod evident, *alura geometrică şi dinamică* a modurilor proprii depinde de valorile proprii, de asociatele lor geometrice din (2.42), (2.43) şi din (2.51), (2.52) şi, desigur, de timp.

Observaţia 2.3

Semnificaţia distincţiei între *modurile proprii v* şi *modurile proprii w* va fi pusă în evidenţia, în mod natural, în secţiunea 3.3. □

Exemplul 2.4

Fie matricea A de la Exemplul 2.2. Să se determine modurile proprii (folosind (2.56), (2.57)) şi matricea de tranziţie (conform relaţiilor (2.54) şi (2.55)).

La Exemplul 2.2 s-au determinat $r = 2, \lambda_1 = 3, q_1 = 2, \lambda_2 = -3, q_2 = 1$. Conform relaţiei (2.38) rezultă $p_1 = 1, p_2 = 1$ şi $k_{11} = 2, k_{21} = 1$. Utilizând ecuaţiile (2.39), (2.40) se obţin:

$$v_{11}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},\ v_{21}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ V = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

$$W = V^{-1} = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{ccc} 5 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \\ \hdashline 2 & -2 & 1 \end{array}\right],\ w_{11}^1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}^T,\ w_{11}^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}^T,\ w_{21}^1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$J = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 \end{array}\right],\quad e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc:c} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & e^{-3t} \end{array}\right].$$

Conform relaţiilor (2.56) şi (2.57) modurile proprii au expresiile:

$$m_{v11}^1(t) = e^{3t} v_{11}^1,\ m_{v11}^2(t) = e^{3t}(t v_{11}^1 + v_{11}^2),\ m_{v21}^1(t) = e^{-3t} v_{21}^1,$$

$$m_{w11}^1(t) = e^{3t}(w_{11}^1 + t\, w_{11}^2),\ m_{w11}^2(t) = e^{3t} w_{11}^2,\ m_{w21}^1(t) = e^{-3t} w_{21}^1.$$

În fine conform relaţiilor (2.54) şi (2.55) se scrie:

$$e^{At} = v_{11}^1 w_{11}^1 e^{3t} + (t v_{11}^1 + v_{11}^2) w_{11}^2 e^{3t} + v_{21}^1 w_{21}^1 e^{-3t} =$$

$$= v_{11}^1 (w_{11}^1 + t\, w_{11}^2) e^{3t} + v_{11}^2 w_{11}^2 e^{3t} + v_{21}^1 w_{21}^1 e^{-3t} =$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\begin{bmatrix}5 & 4 & -2\\ 10 & 8 & -4\\ 10 & 8 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -6 & -3 & 6\\ -12 & -6 & 12\end{bmatrix}\right\}e^{3t}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3 & -6\\ 12 & 6 & -12\\ 12 & 6 & -12\end{bmatrix}t\,e^{3t}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}e^{-3t}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}(5+6t)e^{3t}+4e^{-3t} & (4+3t)e^{3t}-4e^{-3t} & (-2-6t)e^{3t}+2e^{-3t}\\ (4+12t)e^{3t}-4e^{-3t} & (5+6t)e^{3t}+4e^{-3t} & (2-12t)e^{3t}-2e^{-3t}\\ (-2+12t)e^{3t}+2e^{-3t} & (2+6t)e^{3t}-2e^{-3t} & (8-12t)e^{3t}+e^{-3t}\end{bmatrix}. \square$$

c. Matrice nederogatorice şi matrice derogatorice

Este necesară o analiză mai nuanțată privind multiplicitățile geometrice (2.38). Se porneşte de la invarianța polinomului caracteristic (2.10) la transformarea de similitudine (2.27). Într-adevăr, din (2.10), (2.11) şi (2.27) rezultă:

$$d(s)=\prod_{i=1}^{r}(s-\lambda_i)^{q_i}=\det(I_n s-A)=\det(VV^{-1}s-VJV^{-1})=$$

$$=\det V\det(I_n s-J)\det V^{-1}=\det(I_n s-J)\,. \qquad (2.58)$$

Totodată, conform relațiilor (2.45), (2.46), din (2.58) rezultă:

$$d(s)=\det\,\mathrm{diag}\left\{(I_{k_{ij}}s-J_{ij})\right\}_{i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,p_j}}=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p_i}\det(I_{k_{ij}}s-J_{ij})=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p_i}(s-\lambda_i)^{k_{ij}}=\prod_{i=1}^{r}(s-\lambda_i)^{\sum_{j=1}^{p_i}k_{ij}}=\prod_{i=1}^{r}(s-\lambda_i)^{q_i}\,, \qquad (2.59)$$

în care $I_{k_{ij}}$ este matricea unitate de ordinul k_{ij}.

Pe de altă parte,

$$J_{ij}-\lambda_i I_{k_{ij}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

este o matrice *nilpotentă* de ordinul k_{ij}. Aceasta are proprietatea:

$$(J_{ij}-\lambda_i I_{k_{ij}})^k=0,\ k\geq k_{ij}\,. \qquad (2.61)$$

Urmează că

$$(J_{ij} - \lambda_i I_{k_{ij}})^{k_i} = 0, \quad k_i = \max_{1 \le j \le p_i} k_{ij}, \; i = \overline{1,r}\,, \tag{2.62}$$

în care

$$k_i \le \sum\nolimits_{j=1}^{p_i} k_{ij} = q_i, \; i = \overline{1,r}\,. \tag{2.63}$$

Relațiile (2.62), (2.63) sugerează că, pe lângă polinomul caracteristic, există şi alte polinoame care satisfac teorema Cayley – Hamilton (v. relația (2.15)). Similar cu (2.59), folosind (2.62), se construieşte *polinomul minimal*:

$$\delta(s) \triangleq \det \mathrm{diag}\left\{(I_{k_i}s - J_{k_i})\right\}_{i=\overline{1,r}} = \prod\nolimits_{i=1}^{r} \det(I_{k_i}s - J_{k_i}) =$$

$$= \prod\nolimits_{i=1}^{r} (s-\lambda_i)^{k_i} \triangleq s^{\eta} + \beta_1 s^{\eta-1} + \ldots + \beta_{\eta-1}s + \beta_{\eta}\,, \tag{2.64}$$

al cărui grad satisface condiția:

$$\eta = \sum\nolimits_{i=1}^{r} k_i \le \sum\nolimits_{i=1}^{r} \sum\nolimits_{j=1}^{p_i} k_{ij} = \sum\nolimits_{i=1}^{r} q_i = n\,. \tag{2.65}$$

Pe baza definiției (2.64) este relativ uşor de verificat că matricea J şi polinomul $\delta(s)$ satisfac teorema Cayley – Hamilton, respectiv are loc:

$$\delta(J) = J^{\eta} + \beta_1 J^{\eta-1} + \ldots + \beta_{\eta-1}J + \beta_{\eta}I_n = 0\,. \tag{2.66}$$

Acest fapt este valabil şi pentru matricea A (v. procedeul aplicat în (2.58), (2.59)):

$$\delta(A) = A^{\eta} + \beta_1 A^{\eta-1} + \ldots + \beta_{\eta-1}A + \beta_{\eta}I_n = 0\,. \tag{2.67}$$

După cum s-a remarcat deja pe baza relațiilor (2.62), 2.63), pe lângă polinoamele $d(s)$ şi $\delta(s)$, pentru matricea A mai există şi alte polinoame pentru care are loc teorema Cayley – Hamilton. Acestea formează mulțimea *polinoamelor anulatoare ale matricei* A. Între ele, $\delta(s)$ are gradul minim posibil, după cum rezultă din (2.65), ceea ce justifică denumirea de *polinomul minimal* al matricei A.

Polinomul minimal $\delta(s)$, în general diferit de polinomul caracteristic $d(s)$, sugerează o eventuală *redundanță* în polinomul caracteristic $d(s)$. Lipsa sau prezența unei astfel de redundanțe vor fi examinate în continuare.

1° <u>*Matrice nederogatorice*</u>

Cazul I. Matricea A are valorile proprii simple $\lambda_i,\ i=\overline{1,n}$, cu $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i,j=\overline{1,n},\ i\neq j$. Rezultă $r=n,\ q_i=p_i=1$ şi $k_i=1,\ i=\overline{1,n}$, iar din (2.65), $\eta=n$.

Cazul II. Matricea A are valorile proprii multiple $\lambda_i,\ q_i,\ i=\overline{1,r}$, cu $p_i=1,\ i=\overline{1,n}$. Rezultă $k_{i1}=q_i$, respectiv $k_i=q_i,\ i=\overline{1,n}$, iar din (2.65), $\eta=n$.

În ambele cazuri:

$$\delta(s)\equiv d(s)\,. \tag{2.68}$$

Polinomul caracteristic $d(s)$ nu este redundant şi matricea A se numeşte *nederogatorică*.

Cele două expresii ale matricei de tranziţie, (2.54) şi (2.55), au în aceste condiţii următoarele forme relativ mai simple:

$$\Phi(t,0)=e^{At}=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{k=1}^{q_i}\left(e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}v_{i1}^{l}\right)w_{i1}^{k},\quad t\geq 0\,, \tag{2.69}$$

$$\Phi(t,0)=e^{At}=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{k=1}^{q_i}v_{i1}^{k}\left(e^{\lambda_i t}\sum\nolimits_{l=k}^{q_i}\frac{t^{l-k}}{(l-k)!}w_{i1}^{l}\right),\quad t\geq 0\,. \tag{2.70}$$

2° <u>*Matrice derogatorice*</u>

Matricea A are valorile proprii multiple $\lambda_i,\ i=\overline{1,r}$, fiecare de multiplicitate q_i şi pentru cel puţin un $i=\mu\in\{1,2,...,r\}$ are loc $2\leq p_\mu\leq q_\mu$ şi $k_\mu<q_\mu$. Atunci din (2.65) rezultă $\eta<n$.

În acest caz:

$$\delta(s)\not\equiv d(s)\,. \tag{2.71}$$

Polinomul caracteristic este redundant şi matricea A se numeşte *derogatorică*.

După cum se va vedea în continuare, relaţia (2.71) are consecinţe importante în ceea ce priveşte structura matricei de tranziţie în care se poate reduce redundanţa prezentă în polinomul caracteristic. În acest sens, structura algebrică (2.12) (formula Lagrange – Sylvester), se simplifică într-o anumită măsură:

$$\Phi(t,0)=e^{At}=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\frac{1}{(k_i-1)!}\left\{\frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}}\left[\frac{\mathrm{adj\,r}(I_n s-A)}{\prod\nolimits_{j=1,\ j\neq i}^{r}(s-\lambda_j)^{k_j}}\right]\right\}_{s=\lambda_i},\quad t\geq 0\,. \tag{2.72}$$

În relația (2.12) $q_i,\ i=\overline{1,r}$, au fost înlocuiți cu $k_i,\ i=\overline{1,r}$; similar, $\operatorname{adj}(I_n s - A)$, al cărei c.m.m.d.c. al tuturor elementelor neidentic nule este polinomul

$$d_\delta(s) \triangleq \prod\nolimits_{i=1}^{r} (s-\lambda_i)^{q_i - k_i} \not\equiv 1, \tag{2.73}$$

a fost înlocuită cu *matricea adjunctă redusă*:

$$\operatorname{adjr}(I_n s - A) = \frac{1}{d_\delta(s)} \operatorname{adj}(I_n s - A)\,. \tag{2.74}$$

Faptul că elementele matricei $\operatorname{adj}(I_n s - A)$ au ca factor comun pe $d_\delta(s)$ rezultă, în conformitate cu (2.27), (2.46) şi respectiv (2.45), din următoarele:

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(I_n s - A) &= d(s)(I_n s - A)^{-1} = d(s)V(I_n s - J)^{-1}V^{-1} = \\ &= d(s)V\operatorname{diag}\left\{(I_{k_{ij}} s - J_{ij})^{-1}\right\}_{i=\overline{1,r},\, j=\overline{1,p_i}} V^{-1};\end{aligned}$$

$$\underset{i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,p_i}}{(I_{k_{ij}} s - J_{ij})^{-1}} = \frac{1}{(s-\lambda_i)^{k_i}} \begin{bmatrix} (s-\lambda_i)^{k_i-1} & (s-\lambda_i)^{k_i-2} & \cdots & (s-\lambda_i)^{k_i-k_{ij}} \\ 0 & (s-\lambda_i)^{k_i-1} & \cdots & (s-\lambda_i)^{k_i-k_{ij}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (s-\lambda_i)^{k_i-1} \end{bmatrix}.$$

Conform cu (2.59), (2.64), (2.73) şi (2.74), urmează că $d_\delta(s)$ este c.m.m.d.c. al elementelor matricei $\operatorname{adj}(I_n s - A)$. Se trage totodată concluzia că $\delta(s)$ – polinomul minimal al matricei A (v. (2.64)), se obține după cum urmează:

$$\delta(s) = d(s)/d_\delta(s)\,, \tag{2.75}$$

unde, conform relațiilor (2.73) şi (2.74), $d_\delta(s)$ este c.m.m.d.c. al tuturor minorilor de ordinul $n-1$, neidentic nuli, ai matricei caracteristice $(I_n s - A)$.

Totodată este de domeniul evidenței că dacă $d_\delta(s) \equiv 1$, atunci matricea A este nederogatorică.

În mod similar cu (2.72), relația (2.16), care este de asemenea redundantă, se înlocuieşte cu următoarea:

$$\Phi(t,0)=e^{At}=\sum\nolimits_{k=1}^{\eta}\psi_k(t)A^{k-1},\quad t\geq 0\,, \tag{2.76}$$

în care $\psi_k(t),\ k=\overline{1,\eta}$, sunt funcții liniar independente, determinabile. Pentru a le determina sub forma vectorială

$$\psi(t)\triangleq[\psi_1(t)\ \ \psi_2(t)\ \dots\ \psi_\eta(t)]^T\,, \tag{2.77}$$

se folosește de această dată relația (prin analogie cu (2.23)):

$$\psi(t)=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\frac{1}{(k_i-1)!}\left\{\frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}}\left[\frac{\left(\mathrm{adj}(I_\eta s-F_\delta)\right)_1}{\prod\nolimits_{j=1,j\neq i}^{r}(s-\lambda_j)^{k_j}}e^{st}\right]\right\}_{s=\lambda_i}\,,\quad t\geq 0\,, \tag{2.78}$$

în care

$$F_\delta=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_\eta\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_{\eta-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\beta_{\eta-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\beta_1\end{bmatrix} \tag{2.79}$$

este matricea companion a polinomului minimal $\delta(s)$ (v. (2.64)).

Observația 2.4

Numărul $k_i<q_i$ se poate considera *multiplicitatea aparentă* a valorii proprii λ_i. Faptul este justificat de (2.72) și (2.76) – (2.79), dar și de (2.54) sau (2.55) în care, pentru i fixat, puterea maximă a variabilei t este k_i-1. □

Observația 2.5

În mod similar, $\eta<n$ poate fi considerat *ordinul aparent al sistemului* (2.1), (2.2) deoarece $q_i-k_i,\ i=\overline{1,r}$ dintre valorile proprii ale matricei derogatorice A nu au, în sens strict temporal, nici un efect în matricea de tranziție (2.54), (2.55) sau (2.72), (2.76) – (2.79). Diferența $n-\eta$ exprimă deosebirea între două matrice de același ordin, cu aceleași valori proprii și aceleași multiplicități algebrice, dar una este nederogatorică și cealaltă este derogatorică. Ambele matrice au același polinom caracteristic, dar se deosebesc prin polinoamele lor minimale. □

Exemplul 2.5

Se consideră matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

în care $\alpha \in \{1,2\}$. Se cere să se determine matricea e^{At}.

După calcule simple se constată că polinomul caracteristic este $d(s) = \det(I_3 s - A) = (s-2)^3$. Pe de altă parte, evaluând minorii de ordinul 2 ai matricei caracteristice $I_3 s - A$ se constată că pentru $\alpha = 1$, $d_\delta(s) = (s-2)$ şi pentru $\alpha = 2$, $d_\delta(s) \equiv 1$. Aşadar pentru $\alpha = 1$ matricea A este derogatorică cu polinomul minimal $\delta(s) = d(s)/d_\delta(s) = (s-2)^2$, iar pentru $\alpha = 2$ matricea A este nederogatorică cu $\delta(s) \equiv d(s) = (s-2)^3$.

Se determină vectorii proprii şi proprii generalizaţi şi se obţin:

– Pentru $\alpha = 1$ (A derogatorică):

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{12}^1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad W = \begin{bmatrix} w_{11}^1 \\ w_{11}^2 \\ w_{12}^1 \end{bmatrix} = V^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$J = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] e^{2t}.$$

– Pentru $\alpha = 2$ (A nederogatorică):

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{11}^3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad W = \begin{bmatrix} w_{11}^1 \\ w_{11}^2 \\ w_{11}^3 \end{bmatrix} = V^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

În continuare, în conformitate cu (2.33) se poate scrie:

$$e^{At}\Big|_{\alpha=1}=\begin{bmatrix} t+1 & t & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & -t+1 \end{bmatrix} e^{2t},\quad e^{At}\Big|_{\alpha=2}=\begin{bmatrix} t+1 & t^2/2 & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t^2/2+t & -t+1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Pentru $\alpha=1$ se poate aplica şi (2.72) în care $\lambda_1=2,\ r=1,\ k_1=\eta=2$.
Conform relației (2.74) se obține:

$$\mathrm{adjr}(I_3 s-A)=\frac{1}{s-2}\begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & s-2 & -(s-2) \\ 0 & (s-2)^2 & 0 \\ s-2 & s-2 & (s-2)(s-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-1 & 1 & -1 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 1 & 1 & s-3 \end{bmatrix};$$

$$e^{At}\Big|_{\alpha=1}=\frac{d}{ds}\left[\mathrm{adjr}(I_3 s-A)e^{st}\right]_{s=2}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} t e^{2t}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}=\begin{bmatrix} t+1 & t & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & -t+1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Similar, se poate folosi (2.76) cu (2.77) – (2.79). Se obțin:

$$\delta(s)=(s-2)^2=s^2-4s+4,$$

$$F_\delta=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ I_2 s-F_\delta=\begin{bmatrix} s & 4 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix},\ \left(\mathrm{adj}(I_2 s-F_\delta)\right)_1=\begin{bmatrix} s-4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi(s)=\begin{bmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \end{bmatrix}=\left\{\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} s-4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{st}\right\}_{s=2}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}+\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t}=\begin{bmatrix} (1-2t)e^{2t} \\ t e^{2t} \end{bmatrix},$$

$$e^{At}\Big|_{\alpha=1}=\sum\nolimits_{k=1}^{2}\psi_k(t)A^{k-1}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}(1-2t)e^{2t}+\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} t e^{2t}=\begin{bmatrix} t+1 & t & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & -t+1 \end{bmatrix} e^{2t}.\ \square$$

3. Transferul intrare – stare – ieşire

3.1. Răspunsul complet

O imagine a structurii sistemului reprezentat prin ecuaţiile (2.1), (2.2) se poate obţine pe baza ecuaţiei (2.1), integrată pe $[t_0, t]$ şi cu condiţia iniţială:

$$x(t_0) = x_0\,. \tag{3.1}$$

După calcule foarte simple se obţine:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(Ax(\theta) + Bu(\theta)\big)d\theta\,.$$

Acest rezultat conduce, împreună cu ecuaţia (2.2), la structura din fig. I.3.1 care oferă o imagine globală asupra transferului intrare – stare – ieşire.

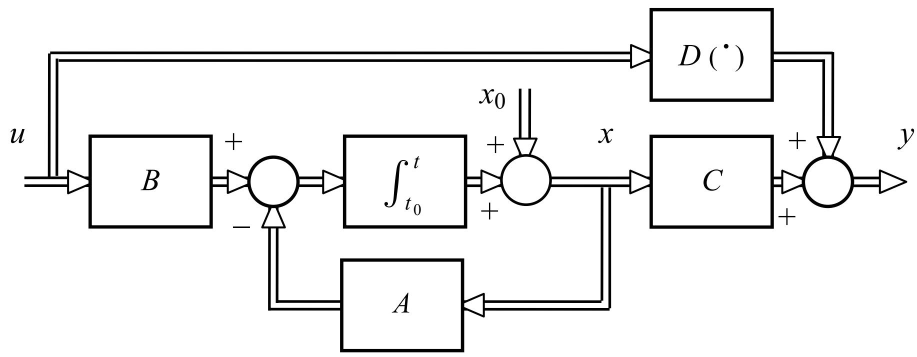

Fig. I.3.1. Structura sistemului reprezentat de ecuaţiile (*2.1*) *şi* (*2.2*)

Ecuaţia transferului intrare – stare – ieşire al sistemului reprezentat de (2.1), (2.2) se obţine prin metoda variaţiei constantelor: în paragraful 1.4.b s-a obţinut soluţia (1.49) şi apoi, în 1.5.b cu (1.74), soluţia (1.80). Astfel, conform cu (1.80), pentru starea iniţială (3.1) soluţia ecuaţiei neomogene (2.1) rezultă de forma:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta,\;\; t \ge t_0\,. \tag{3.2}$$

Aceasta şi ecuaţia (2.2) definesc transferul temporal intrare – ieşire, cu starea iniţială (3.1), respectiv *răspunsul intrare – ieşire complet* al sistemului (2.1), (2.2):

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta + D(\cdot)u(t), \;\; t \geq t_0 \,. \quad (3.3)$$

S-a arătat deja la 1.5.b (Teorema 1.15) că transferul (3.3) este invariant în raport cu translațiile temporale. Aceasta permite să se adopte $t_0 = 0$ în (3.3) şi t să aibă şi semnificația de *durată*, începând cu momentul inițial (convențional) $t_0 = 0$.

Pentru definirea noțiunilor uzuale în studiul transferului temporal intrare – ieşire se consideră în continuare

$$t_0 = 0, \; x(0) = x_0 = 0 \,, \quad (3.4)$$

$$u(t) = u_0\delta(t), \; u_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

unde u_0 este un vector constant şi $\delta(t)$ este *impulsul Dirac*.

Înlocuind (3.4) şi (3.5) în (3.3) se obține: $y(t) = g(t)u_0$, în care

$$g(t) \triangleq Ce^{At}B\sigma(t) + D(\cdot)\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ CB + D(\cdot)\delta(t), & t = 0, \\ Ce^{At}B\sigma(t), & t > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

este *matricea de răspuns la impulsul Dirac* a sistemului (2.1), (2.2).

Cu condiția inițială (3.4) şi aplicând acum *funcția treaptă*:

$$u(t) = u_0\sigma(t), \; u_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

din (3.3) rezultă: $y(t) = h(t)u_0$, în care:

$$h(t) \triangleq \left[C\int_0^t e^{A\theta}d\theta B + D(\cdot)\right]\sigma(t) = \int_0^t g(\theta)d\theta\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t g(\theta)d\theta, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

este *matricea de răspuns indicial* a sistemului (2.1), (2.2).

Se cuvine remarcat că pentru $t < 0$ au loc $g(t) \equiv 0$ şi $h(t) \equiv 0$ (v. (3.6) şi (3.8)). Acest fapt corespunde *principiului non-anticipării* (v. Definiția 1.2).

Este lesne de observat că din (3.3), cu $t_0 = 0$, şi (3.6) rezultă şi următoarea expresie a *răspunsului intrare – ieşire complet al sistemului* (2.1), (2.2):

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t g(t-\theta) u(\theta) d\theta, \quad t \geq 0 . \tag{3.9}$$

Observaţia 3.1

Din (3.9) cu (3.6) se trage concluzia, că sub aspect cantitativ şi calitativ, transferul temporal intrare-ieşire depinde de valorile proprii ale matricei A, de atributele lor geometrice evidenţiate de (2.42), (2.43) şi (2.51), (2.52) şi, evident, de t. Această afirmaţie, conform structurii din fig. I.3.1, trebuie adecvat nuanţată şi anume corespunzător proprietăţilor interfeţei intrare – stare (perechea (e^{At}, B)), proprietăţilor interfeţei stare – ieşire (perechea (C, e^{At})) şi proprietăţilor interacţiunii dintre mărimea de intrare şi sistem (perechea $(g(t), u(t))$). □

3.2. Răspunsul forţat

Transferul intrare – ieşire exprimat prin (3.9) este format din două componente:

– *răspunsul de regim liber la ieşire* – determinat de cauze interne exprimate prin starea iniţială $x(0) = x_0$ şi având o dinamică dependentă de $C e^{At}$;

– *răspunsul de regim forţat la ieşire*, *cu condiţii iniţiale nule* – determinat, şi sub aspectul dinamicii, de perechea $(g(t), u(t))$.

Având în vedere că răspunsul de regim forţat la ieşire reflectă în totalitate proprietăţile sistemului (în $g(t)$ intră şi factorul Ce^{At}), se va analiza în continuare numai cea de a doua componentă din (3.9), adică *produsul de convoluţie*:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\theta) u(\theta) d\theta, \ t \geq 0 . \tag{3.10}$$

Chestiunea esenţială pentru analiza care va urma este aceea a alegerii unei mărimi de intrare $u(t)$ care să contribuie la decelarea celor mai importante proprietăţi ale transferului temporal intrare – ieşire reprezentat de (3.10). Se porneşte de la premisa că $u(t)$ este format dintr-o combinaţie liniară de funcţii de forma $t^k e^{\lambda t}$, respectiv că, în general, poate fi furnizat de un sistem dinamic liniar finit dimensional şi invariant în timp. Pentru simplitatea expunerii se adoptă:

$$u(t) = e^{\lambda t} u_0 \sigma(t) , \tag{3.11}$$

în care $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $u_0 \in \mathbb{C}^m$, prin alegeri adecvate, vor permite evidenţierea în răspunsul (3.10) a unor proprietăţi ale transferului intrare – ieşire al sistemului.

Înlocuind (3.11) şi (3.6) în (3.10) şi efectuând calculele se obţine:

$$y(t) = y_T(t) + y_P(t), \tag{3.12}$$

în care se disting:

- *Componenta de regim tranzitoriu*:

$$y_T(t) = -Ce^{At}(I_n\lambda - A)^{-1}Bu_0\,\sigma(t), \tag{3.13}$$

similară cu prima componentă din (3.9). Această componentă este determinată de condiţia iniţială virtuală $-(I_n\lambda - A)^{-1}Bu_0$, alocată de $u(0) = u_0$.

- *Componenta de regim permanent*:

$$y_P(t) = \underbrace{\left[C(I_n\lambda - A)^{-1}B + D(\lambda)\right]}_{\triangleq G(\lambda)}\underbrace{u_0 e^{\lambda t}\sigma(t)}_{=u(t)} = G(\lambda)u(t), \tag{3.14}$$

similară cu $u(t)$ (v. (3.11)). Această componentă, în marea majoritate a aplicaţiilor, constituie raţiunea de a fi a sistemului (2.1), (2.2).

În aceste circumstanţe componenta de regim tranzitoriu $y_T(t)$ este de regulă *indezirabilă*. Dar, datorită caracterului ei *inerent*, este în acelaşi timp *inevitabilă*. Fireşte că în această situaţie atitudinea cea mai rezonabilă este ca, prin soluţii de proiectare bazate pe cunoaşterea proprietăţilor şi efectelor componentei de regim tranzitoriu, să se reducă până la o limită acceptabilă efectele ei nefavorabile. Sau, dacă este necesar şi posibil, să fie utilizată pentru a întări sau modifica, pe anumite intervale de timp, unele evoluţii ale componentei de regim permanent.

Din examinarea expresiilor (3.13) şi (3.14) rezultă ca Observaţia 3.1 se confirmă. În funcţie de proprietăţile perechilor de matrice (A, B) şi (C, A), şi de alegerea parametrilor λ şi u_0 se pot ivi următoarele trei situaţii prin care se dezvăluie caracterul transferului temporal intrare – ieşire în regimul tranzitoriu şi în regimul permanent:

- *transferul decuplat*
- *transferul rezonant*
- *transferul blocat*.

Acestea vor fi analizate, în ordinea menţionată, în cele ce urmează.

3.3. Transferul decuplat

Se are în vedere pentru început componenta de regim tranzitoriu (3.13). Înlocuind (2.27) şi (2.33) în (3.13), după efectuarea calculelor se obține:

$$y_T(t) = -CVe^{Jt}(I_n\lambda - J)^{-1}V^{-1}Bu_0\,\sigma(t)\,. \qquad (3.15)$$

<u>Valori proprii simple</u>. Pentru rezultate imediate se consideră mai întâi că valorile proprii $\lambda_i,\ i=\overline{1,n}$, sunt simple. Având în vedere (2.26) rezultă:

$$(I_n\lambda - J)^{-1} = \mathrm{diag}\left\{(\lambda-\lambda_1)^{-1},...,(\lambda-\lambda_n)^{-1}\right\}. \qquad (3.16)$$

Substituind acum (2.25), (2.27), (2.31), (2.34) şi (3.16) în (3.15) se obține:

$$y_T(t) = -\sum\nolimits_{i=1}^{n}(Cv_i)(w_iB)(\lambda-\lambda_i)^{-1}e^{\lambda_i t}u_0\,\sigma(t)\,. \qquad (3.17)$$

Este plauzibil şi deopotrivă posibil ca pentru anumiți vectori proprii v_μ şi v_η ai matricei A (asociați valorilor proprii λ_μ şi λ_η), datorită proprietăților perechilor (A, B) şi respectiv (C, A), să fie îndeplinite condițiile:

$$w_\mu B = 0\,, \qquad (3.18)$$

$$Cv_\eta = 0\,. \qquad (3.19)$$

În această situație modurile proprii $m_{v\mu}(t) = e^{\lambda_\mu t}v_\mu$, $m_{w\eta}(t) = e^{\lambda_\eta t}w_\eta$ (v. relațiile (2.36), (2.37)) nu se mai manifestă în regimul tranzitoriu (3.17).

Similar, pentru un anumit vector propriu v_ρ (asociat valorii proprii λ_ρ) este posibil să fie îndeplinite simultan condițiile:

$$w_\rho B = 0,\quad Cv_\rho = 0\,. \qquad (3.20)$$

Aceasta înseamnă că nici modurile proprii $m_{v\rho}(t) = e^{\lambda_\rho t}v_\rho,\ m_{w\rho}(t) = e^{\lambda_\rho t}w_\rho$ nu se mai manifestă în regimul tranzitoriu (3.17).

Din (3.17) – (3.20) rezultă componenta de regim tranzitoriu:

$$y_T(t) = -\sum\nolimits_{i=1, i\neq\mu,\eta,\rho}^{n}(Cv_i)(w_iB)(\lambda-\lambda_i)^{-1}e^{\lambda_i t}u_0\,\sigma(t)\,. \qquad (3.21)$$

Din (3.21) rezultă că *fenomenele de decuplare* sunt asociate anumitor valori proprii, respectiv vectorilor proprii corespunzători şi matricelor B, C .

Definiția 3.1

Valorile proprii simple $\lambda_\mu, \lambda_\eta, \lambda_\rho$, $\mu, \eta, \rho \in \{1, 2, ..., n\}$, ale sistemul (2.1), (2.2) (ale matricei A) se numesc după cum urmează: λ_μ – *zero de decuplare la intrare* dacă a loc (3.18); λ_η – *zero de decuplare la ieşire* dacă are loc (3.19); λ_ρ – *zero de decuplare la intrare – ieşire* dacă are loc (3.20). □

Efectele zerourilor de decuplare se regăsesc de o manieră similară şi în componenta de regim permanent (3.14). Într-adevăr, înlocuind (2.25), (2.27), (2.34), şi (3.16), (3.18) – (3.20) în (3.14) se obține:

$$y_P(t) = \left[\sum\nolimits_{i=1, i\neq\mu,\eta,\rho}^{n} (Cv_i)(w_i B)(\lambda - \lambda_i)^{-1} + D(\lambda)\right] u_0 e^{\lambda t} \sigma(t) . \quad (3.22)$$

Structura corespunzătoare regimului permanent (3.22) este redată în fig. I.3.2.

Evident, regimul permanent poate conține exponențialele $e^{\lambda_\mu t}$, $e^{\lambda_\eta t}$, $e^{\lambda_\rho t}$, dar numai ca urmare a existenței lor în mărimea de intrare (adică pentru $\lambda = \lambda_\mu$, $\lambda = \lambda_\eta$ sau $\lambda = \lambda_\rho$) şi al transferului lor prin conexiunile nedecuplate.

Comportarea sistemului (2.1), (2.2) poate fi explicitată şi cu ajutorul matricei de răspuns la impuls. Acest fapt este uşor vizibil dacă se înlocuiesc (2.25), (2.27), (2.31), (2.34), (3.16), (3.18) – (3.20) în (3.6). Se obține:

$$g(t) = \sum\nolimits_{i=1, i\neq\mu,\eta,\rho}^{n} (Cv_i)(w_i B) e^{\lambda_i t} \sigma(t) + D(\cdot)\delta(t) . \quad (3.23)$$

Se evidențiază decuplarea următoarelor conexiuni: μ – la intrare, η – la ieşire, şi ρ – la intrare – ieşire, şi că efectul asupra transferului temporal intrare – ieşire este acelaşi: prin conexiunile decuplate nu se poate transfera nici un semnal.

<u>Valori proprii multiple</u>. În acest caz se foloseşte matricea de răspuns la impuls (3.6), cu (2.54), (2.55). Se obține:

$$g(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \sum\nolimits_{j=1}^{p_i} \sum\nolimits_{k=1}^{k_{ij}} \left(e^{\lambda_i t} \sum\nolimits_{l=1}^{k} \frac{t^{k-l}}{(k-l)!} Cv_{ij}^{l} \right) (w_{ij}^{k} B) \sigma(t) + D(\cdot)\delta(t) , \quad (3.24)$$

$$g(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \sum\nolimits_{j=1}^{p_i} \sum\nolimits_{k=1}^{k_{ij}} (Cv_{ij}^{k}) \left(e^{\lambda_i t} \sum\nolimits_{l=k}^{k_{ij}} \frac{t^{l-k}}{(l-k)!} w_{ij}^{l} B \right) \sigma(t) + D(\cdot)\delta(t) . \quad (3.25)$$

Aici se au în vedere produsele $w_{ij}^{k} B$ şi respectiv Cv_{ij}^{k} pe baza cărora se pot extinde adecvat noțiunile din Definiția 3.1.

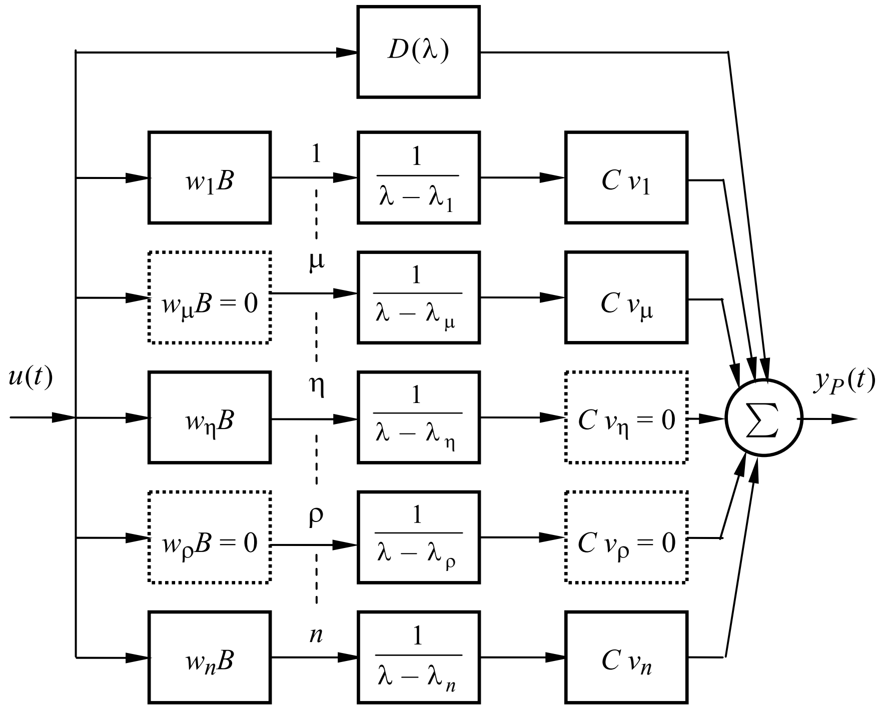

Fig. I.3.2. Transferul decuplat în regim permanent (*conexiunile* μ,η,ρ *sunt decuplate*)

Exemplul 3.1

Fie sistemul (2.1), (2.2) cu $n=3$, $m=p=1$, A cu $\alpha=2$ de la Exemplul 2.5, şi $B=[b_1\, b_2\, b_3]^T$, $C=[c_1\, c_2\, c_3]$, $D=0$. Să se determine $b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$, astfel încât conexiunile 2 şi 3 să fie decuplate la intrare, iar 1 şi 2 la ieşire.

Cu $V, W=V^{-1}, J$ ($\alpha=2$) de la Exemplul 2.5 şi (3.24), (3.25) se obţin:

$$g(t)=C\sum\nolimits_{k=1}^{3}\left(e^{2t}\sum\nolimits_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}v_{11}^{l}\right)w_{11}^{k}\,B\,\sigma(t)=$$

$$=e^{2t}\,C[v_{11}^1 w_{11}^1+(t\,v_{11}^1+v_{11}^2)\,w_{11}^2+(t^2 v_{11}^1/2+t\,v_{11}^2+v_{11}^3)\,w_{11}^3]B\,\sigma(t),$$

$$g(t)=\sum\nolimits_{k=1}^{3}C\,v_{11}^{k}\left(e^{2t}\sum\nolimits_{l=k}^{3}\frac{t^{l-k}}{(l-k)!}w_{11}^{l}\right)B\,\sigma(t)=$$

$$=e^{2t}\,C[v_{11}^1(w_{11}^1+t\,w_{11}^2+t^2 w_{11}^3/2)+v_{11}^2\left(w_{11}^2+t\,v_{11}^3\right)+v_{11}^3 w_{11}^3]B\,\sigma(t),$$

în care v_{11}^k şi w_{11}^k, $k=\overline{1,3}$, sunt coloanele şi liniile matricelor V şi respectiv W.

$\lambda=2$ este un zero de decuplare dublu la intrare (pe conexiunile 2 şi 3) dacă:

$$w_{11}^2 B=[1 \;\; 1 \;\; -1][b_1 \;\; b_2 \;\; b_3]^T=0, \quad w_{11}^3 B=[0 \;\; 1 \;\; 0][b_1 \;\; b_2 \;\; b_3]^T=0\,.$$

Rezultă $b_1+b_2-b_3=0,\ b_2=0$, respectiv $b_1=b_3 \triangleq b\in\mathbb{R}, b_2=0$.

Fie $b\neq 0$ şi $B=\begin{bmatrix} b & 0 & b\end{bmatrix}^T$. Cu aceasta şi $C=[c_1 \;\; c_2 \;\; c_3]$ se obţine:

$$g(t)=e^{2t}Cv_{11}^1 w_{11}^1 Be^{2t}=e^{2t}\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}[0 \;\; -1 \;\; 1]\begin{bmatrix}b\\0\\b\end{bmatrix}\sigma(t)=b\left(c_1+c_3\right)e^{2t}\sigma(t)\,.$$

$\lambda=2$ este un zero de decuplare dublu la ieşire (pe conexiunile 1 şi 2) dacă:

$$Cv_{11}^1=[c_1 \;\; c_2 \;\; c_3][1 \;\; 0 \;\; 1]^T=0, \quad Cv_{11}^2=[c_1 \;\; c_2 \;\; c_3][1 \;\; 0 \;\; 0]^T=0\,.$$

Rezultă $c_1+c_3=0,\ c_1=0$, respectiv $c_2 \triangleq c\in\mathbb{R}, c_1=c_3=0$.

Fie $c\neq 0$ şi $C=\begin{bmatrix}0 & c & 0\end{bmatrix}$. Cu aceasta şi $B=[b_1 \;\; b_2 \;\; b_3]^T$ se obţine:

$$g(t)=e^{2t}Cv_{11}^3 w_{11}^3 B\sigma(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}0 & c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\sigma(t)=b_2 c e^{2t}\sigma(t)\,.$$

Pe de altă parte pentru $B=\begin{bmatrix} b & 0 & b\end{bmatrix}^T$ şi $C=\begin{bmatrix}0 & c & 0\end{bmatrix}$ se obţine:

$$g(t)=e^{2t}Cv_{11}^1 w_{11}^1 B\sigma(t)=e^{2t}[0 \;\; c \;\; 0][1 \;\; 0 \;\; 1]^T[0 \;\; -1 \;\; 1][b \;\; 0 \;\; b]^T\sigma(t)\equiv 0\,,$$

$$g(t)=e^{2t}Cv_{11}^3 w_{11}^3 B\sigma(t)=e^{2t}[0 \;\; c \;\; 0][0 \;\; 1 \;\; 1]^T[0 \;\; 1 \;\; 0][b \;\; 0 \;\; b]^T\sigma(t)\equiv 0\,.$$

Ca urmare, există şi un zero de decuplare intrare – ieşire (pe conexiunea 2). □

În cazul valorilor proprii multiple se constată că şi zerourile de decuplare pot fi multiple şi ele pot fi determinate cu relaţii similare cu (3.18) – (3.20).

În concluzie, notând cu $\mathcal{Z}_{\text{int}}^0, \mathcal{Z}_{\text{ies}}^0$ şi $\mathcal{Z}_{\text{int-ies}}^0$ mulţimile zerourilor de decuplare la intrare, la ieşire şi la intrare – ieşire, cu $\mathcal{Z}^0$ mulţimea zerourilor de decuplare, şi cu $\mathcal{V}_\text{p}$ mulţimea valorilor proprii, rezultă că se poate scrie:

$$\mathcal{Z}^0=(\mathcal{Z}_{\text{int}}^0\cup\mathcal{Z}_{\text{ies}}^0)\setminus\mathcal{Z}_{\text{int-ies}}^0\subseteq\mathcal{V}_\text{p}\,. \tag{3.26}$$

3.4. Transferul rezonant

Pentru componenta de regim permanent (3.22) (v. şi (3.14)) se poate scrie:

$$y_P(t) = G(\lambda)u(t),$$
$$G(\lambda) = \sum_{i=1,\ \lambda_i \notin \mathcal{Z}^0}^{n} (Cv_i)(w_i B)(\lambda - \lambda_i)^{-1} + D(\lambda), \tag{3.27}$$

în care $u(t)$ are forma (3.11) şi $G(\lambda)$ este *matricea de regim permanent* a sistemului (2.1), (2.2) (introdusă prin (3.14)) pentru λ dat, independentă de amplitudinea intrării $u(t)$, şi mulțimea $\mathcal{Z}^0$ a fost introdusă prin (3.26).

Este uşor de observat că pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, pentru care

$$\lambda = \lambda_k \in \mathcal{V}_{\mathrm{p}} \setminus \mathcal{Z}^0, \tag{3.28}$$

din (3.37) se obține:

$$\| G(\lambda_k) \| = +\infty . \tag{3.29}$$

Fenomenul ilustrat de (3.29) este *rezonanța* pe *frecvența proprie* $\lambda_k \in \mathcal{V}_{\mathrm{p}} \setminus \mathcal{Z}^0$. El are loc datorită acțiunii intrării $u(t)$ care îl „inoculează” pe λ_k în sistem. Termenul de rezonanță se foloseşte prin extensie de la cazul particular $\lambda = \lambda_k = j\omega_k \in \mathcal{V}_{\mathrm{p}} \setminus \mathcal{Z}^0$, $u(t) = u_0 e^{j\omega_k t}$ (aceasta este o componentă a oscilației sinusoidale $\cos \omega_k t = (e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t})/2$) când are loc rezonanța propriu-zisă.

Observația 3.2

Desigur că o anumită circumspecție implică să se ia în considerare şi componenta de regim tranzitoriu (3.21), care, cronologic, coexistă cu cea de regim permanent – (3.22). Pentru (3.28) din (3.21) se obține $\| y_T(t) \| = +\infty$, ceea ce, împreună cu (3.27), (3.29) conduce la prezumția că pentru $\lambda \to \lambda_k$ în răspunsul forțat (3.12) (cu (3.21), (3.22)) are loc o nedeterminare. Într-adevăr, izolând termenul de indice k din (3.12), explicitată prin (3.21) şi (3.22), se poate scrie:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_k} (Cv_k)(w_k B) \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda_k t}}{\lambda - \lambda_k} u_0 \sigma(t) = (Cv_k)(w_k B)\, t\, e^{\lambda_k t} u_0 \sigma(t) = (Cv_k)(w_k B)\, t\, u(t) .$$

Acest rezultat implică:

$$y_T(t) = \sum\nolimits_{i=1,\, i\neq k, \lambda_i \notin \mathcal{Z}^0}^{n} (Cv_i)(w_i B) \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_k - \lambda_i} u_0 \sigma(t) \,. \tag{3.30}$$

Pe de altă parte, în (3.27) matricea $G(\lambda)$, cu $\lambda = \lambda_k$, se înlocuieşte cu

$$G(\lambda_k) = \sum\nolimits_{i=1, i\neq k, \lambda_i \notin \mathcal{Z}^0}^{n} (Cv_i)(w_i B) \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} + (Cv_k)(w_k B)t + D(\lambda_k) \,, \tag{3.31}$$

care este matricea de regim permanent pentru $\lambda \to \lambda_k$.

Este evident că în (3.31) are loc $\|G(\lambda_k)\| \to +\infty$, pentru $t \to \infty$, ceea ce, în alt mod, este confirmat de (3.29).

Privitor la rezonanța propriu-zisă, adică pentru $\lambda = \lambda_k = j\omega_k \in \mathcal{V}_\mathrm{p} \setminus \mathcal{Z}^0$ în (3.11) şi (3.31), se constată că pentru orice $\|u_0\| < +\infty$, respectiv pentru:

$$\|u(t)\| < +\infty, \; t \in \mathbb{R} \,, \tag{3.32}$$

din (3.27) cu (3.31) rezultă:

$$\|y_P(t)\| \to +\infty \text{ pentru } t \to +\infty \,. \tag{3.33}$$

Aceasta este nota distinctă a rezonanței propriu-zise. De remarcat că pentru (3.32) şi $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$ din (3.27) cu (3.31) rezultă:

$$\|y_P(t)\| < +\infty, \; t \in \mathbb{R} \,, \tag{3.34}$$

deoarece $te^{\lambda_k t} \to 0$ pentru $t \to +\infty$. Pe de altă parte, dacă $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$, atunci (3.33) are loc şi datorită faptului că $\|u(t)\| \to +\infty$ şi $\|G(\lambda_k)\| \to +\infty$ pentru $t \to +\infty$, în (3.27) cu (3.31). □

Definiția 3.2

Valorile $\lambda_k, \in \mathcal{V}_\mathrm{p} \setminus \mathcal{Z}^0$, cu proprietățile (3.29) se numesc *polii* sistemului (2.1), (2.2). □

Extinderea analizei la cazul valorilor proprii multiple este desigur posibilă, dar în afară de faptul că polii sistemului (2.1), (2.2) pot fi multipli, alte elemente semnificative nu pot fi puse în evidență pe această cale.

Trebuie remarcat faptul că un zero de decuplare nu poate fi în acelaşi timp şi pol. Ca urmare, în conformitate şi cu (3.28) se poate scrie:

$$\mathcal{P} = \mathcal{V}_{\mathrm{p}} \setminus \mathcal{Z}^0 \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{p}}, \tag{3.35}$$

în care $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}$ şi $\mathcal{Z}^0$ sunt respectiv *mulţimile polilor*, *valorilor proprii*, şi *zerourilor de decuplare*, incluzându-se şi multiplicităţile corespunzătoare.

3.5. Transferul blocat

Revenind la componenta de regim permanent (3.14), se are în vedere matricea de regim permanent în care se procedează la inversarea matricei $I_n\lambda - A$:

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= C(I_n\lambda - A)^{-1}B + D(\lambda) = \frac{1}{d(\lambda)}C\big(\mathrm{adj}(I_n\lambda - A)\big)B + D(\lambda) = \\ &= \frac{1}{d(\lambda)}\underbrace{\Big[C\big(\mathrm{adj}(I_n\lambda - A)\big)B + d(\lambda)D(\lambda)\Big]}_{\triangleq Q(s)} = \frac{1}{d(\lambda)}Q(\lambda). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Aceasta este de dimensiuni $p \times m$, cu elemente fracţii raţionale în λ (introdus de intrarea $u(t)$ – v. (3.11)). $d(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A şi $Q(\lambda)$ este o matrice polinomială.

a. Transferul antirezonant

Aspectul care interesează în cele ce urmează este rangul matricei $G(\lambda)$.

Pentru matricea $G(\lambda)$, privită ca funcţie de $\lambda \in \mathbb{C}$, prin definiţie:

$$\rho = \mathrm{nrang}\, G(\lambda) \le \min(m, p) \tag{3.37}$$

se numeşte *rangul normal* al matricei $G(\lambda)$ şi reprezintă ordinul minorului de dimensiune maximă, funcţie neidentic nulă de λ, conţinut de $G(\lambda)$.

Pentru $\lambda = z$ (un număr) şi $G(z)$ (matrice numerică) se poate evalua:

$$\rho_z = \mathrm{rang}\, G(z) \le \rho, \tag{3.38}$$

care se numeşte *rangul local* al matricei $G(\lambda)$ în $\lambda = z$.

Întrucât $Q(\lambda)$ este o matrice polinomială în λ, urmează că există o mulţime finită de numere $\mathcal{Z} \triangleq \{z_1, z_2, ..., z_\eta\} \in \mathbb{C}$, nu în mod necesar distincte, pentru care

$$\rho_z = \mathrm{rang}\, G(z) < \rho, \quad z \in \mathcal{Z}. \tag{3.39}$$

Acestea se numesc *zerourile* matricei $G(\lambda)$ (o extensie de la cazul $G(\lambda)$ scalar).

Condiția (3.39) are consecințe asupra componentei de regim permanent pentru:

$$\begin{cases} z \in \mathcal{Z},\ u(t) = u_0 e^{zt}\sigma(t), \\ y_P(t) = G(z)u(t) = G(z)u_0 e^{zt}\sigma(t). \end{cases} \tag{3.40}$$

Într-adevăr, întrucât pentru $z \in \mathcal{Z}$ are loc (3.39), rezultă că

$$[\operatorname{Ker} G(z)] \setminus \{0\} \neq \varnothing\,, \quad \operatorname{Ker} G(z) \triangleq \{u \in \mathbb{C}^m;\ G(z)u = 0\}\,, \tag{3.41}$$

în care $\operatorname{Ker} M$ este *nucleul* matricei M . Există $u_0 \in \operatorname{Ker} G(z)$, astfel încât:

$$u_0 \neq 0, \quad G(z)u_0 = 0\,. \tag{3.42}$$

Urmează că pentru $z \in \mathcal{Z},\ \ u_0 \neq 0$, conform cu (3.40), (3.42), are loc

$$\|u(t)\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|y_P(t)\| = 0\,. \tag{3.43}$$

Comparativ cu rezonanța, aceasta este *antirezonanța* pe *frecvențele* de *antirezonanță* $z \in \mathcal{Z}$, [76]. În situația ilustrată de implicația (3.43) are loc *transferul intrare – ieşire blocat*.

Definiția 3.3

Valorile $z \in \mathcal{Z}$, care satisfac condițiile (3.39), (3.42), (3.43), se numesc *zerourile de transmisie* ale sistemului (2.1), (2.2). $\mathcal{Z}$ este *mulțimea zerourilor de transmisie*. □

Exemplul 3.2

Se consideră sistemul (2.1), (2.2) cu $n = 3,\ m = 2,\ p = 2$ şi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0\,.$$

Se cere să se determine polii şi zerourile de transmisie ale sistemului.

Mai întâi, în conformitate cu (2.10), rezultă $d(s) = (s+2)(s-3)(s-6)$, din care se obțin valorile proprii simple $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$.

În continuare, folosind (2.24) şi (2.34), se obțin matricea modală şi inversa ei:

$$V=[v_1 \quad v_2 \quad v_3]\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=V^{-1}=\frac{1}{6}\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -3 \\ \hdashline 2 & -2 & 2 \\ \hdashline 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Se observă că $w_i B \neq 0,\ i=\overline{1,3}$, şi $C v_i \neq 0,\ i=\overline{1,3}$, în care w_i şi v_i, $i=\overline{1,3}$, sunt liniile lui V^{-1} şi respectiv coloanele lui V. În aceste condiţii sistemul nu are nici un zero de decuplare. În conformitate cu (3.35) rezultă că polii sistemului sunt exact valorile sale proprii, adică: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$.

În conformitate cu (3.36) se calculează:

$$(I_3\lambda-A)^{-1}=\frac{1}{(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)}\begin{bmatrix} \lambda^2-6\lambda+4 & \lambda+2 & 3\lambda-14 \\ \lambda+2 & \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda+2 \\ 3\lambda-14 & \lambda+2 & \lambda^2-6\lambda+4 \end{bmatrix},$$

$$G(\lambda)=C(I_3\lambda-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda+2} & \dfrac{-2(\lambda^2-5\lambda+4)}{(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)} \\ 0 & \dfrac{-(\lambda-7)}{(\lambda-3)(\lambda-6)} \end{bmatrix}.$$

Întrucât $\det G(\lambda)=\dfrac{-(\lambda-7)}{(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)}$, rezultă $\rho=m=p=2$. În schimb pentru $z=7$ se obţine $\operatorname{rang} G(7)=1<2$, adică $z=7$ este un zero de transmisie.

Este util de văzut ce se întâmplă pentru $u(t)=\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T e^{\lambda t}$, cu $\lambda=\lambda_{1,2,3}$ (valorile proprii ale lui A), respectiv $\lambda=z=7$, şi $a,b\in\mathbb{R}$, dar nu simultan nule.

Pentru $\lambda=\lambda_{1,2,3}$ se obţin $G(\lambda_{1,2,3})$ cu elemente infinite. Adică pentru $\|u(t)\|<+\infty$ rezultă $\|G(\lambda_{1,2,3})\|=\infty$. Se confirmă că $\lambda=\lambda_{1,2,3}$ sunt polii sistemului.

Pentru $\lambda=z=7$ şi $a=9,\ b=1$, din (3.11) şi (3.43) rezultă:

$$u(t)=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t}\sigma(t)\neq 0, \quad y_P(t)=G(7)u(t)=\begin{bmatrix} 1/9 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t}\sigma(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Urmează că pentru $\|u(t)\| \neq 0$ se obține $\|y_P(t)\| = 0$, ceea ce confirmă faptul că $\lambda = z = 7$ este un zero de transmisie al sistemului considerat. □

b. Alte cazuri de transfer blocat

Blocarea transferului intrare – ieşire este posibilă nu numai prin antirezonanță (adică pentru valori $\lambda \notin \mathcal{Z}$). De pildă, dacă $\rho = \operatorname{nrang} G(\lambda) = p < m$ sau $\rho < \min(m, p)$, atunci pentru orice λ are loc $[\operatorname{Ker} G(\lambda)] \setminus \{0\} \neq \varnothing$. Urmează că în astfel de cazuri există $u_0 \in [\operatorname{Ker} G(\lambda)] \setminus \{0\}$ astfel încât

$$G(\lambda)u_0 = 0 . \tag{3.44}$$

Introducând (3.44) în (3.14) se obține transferul blocat pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$y_P(t) = G(\lambda)u(t) = G(\lambda)u_0 e^{\lambda t}\sigma(t) = 0 . \tag{3.45}$$

Exemplul 3.3

Fie matricea de regim permanent:

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 1 \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Să se determine $\mathcal{Z}$, precum şi $\operatorname{Ker} G(\lambda)$ şi $u_0 \neq 0$ pentru care are loc (3.45).

Pentru orice $\lambda \neq 0$ are loc $\rho = \operatorname{nrang} G(\lambda) = p = 2 < m = 3$.

Nu există $\lambda = z \neq 0$ pentru care $\rho_z = \operatorname{rang} G(z) < \rho$. Prin urmare $\mathcal{Z} = \varnothing$.

Din definiția nucleului:

$$G(\lambda)u_0 = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{bmatrix} = 0 .$$

se obține o simplă infinitate de soluții: $u_{01} = -u_{02} = \lambda u_{03}$. Alegând $u_{03} = \alpha$ ca parametru, nucleul căutat are forma:

$$\operatorname{Ker} G(\lambda) = \left\{ [\lambda \ \ -\lambda \ \ 1]^T \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} .$$

Evident, pentru orice $\lambda \neq 0$ şi orice $u_0 = [\lambda \ \ -\lambda \ \ 1]^T \alpha, \ \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, au loc relațiile (3.44) şi (3.45). □

4. Transferul intrare – ieşire

4.1. Matricea de transfer

Reprezentarea prin matricea de transfer este de tipul *intrare – ieşire* cu condiţii iniţiale nule. O cale de obţinere a acestei reprezentări se bazează pe *transformarea Laplace* $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$, simbolizată prin $\mathscr{L}$, în care f şi F sunt funcţia original şi funcţia imagine. Ea se aplică ecuaţiilor (2.1), (2.2) cu condiţii iniţiale nule. Cu notaţiile uzuale: $U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}$, $Y(s)=\mathscr{L}\{y(s)\}$, după calcule elementare se obţine *ecuaţia transferului intrare – ieşire*:

$$Y(s)=G(s)U(s), \tag{4.1}$$

în care

$$G(s)\triangleq C(I_n s-A)^{-1}B+D(s),\ s\in\mathbb{C}, \tag{4.2}$$

este *matricea de transfer*, de dimensiuni $p\times m$, cu elemente fracţii raţionale în s.

Din (4.2) şi (3.6) rezultă că matricea de transfer, $G(s)$, este transformata Laplace a matricei de răspuns la impulsul Dirac, $g(t)$. Se scrie:

$$G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\{Ce^{At}B\sigma(t)+D(\cdot)\delta(t)\}. \tag{4.3}$$

Expresia (4.2) evidenţiază modul de determinare a lui $G(s)$ pe baza *reprezentării de stare* (2.1), (2.2), respectiv a matricelor A, B, C şi $D(\cdot)$.

În mod obişnuit, $G(s)$ se poate obţine şi direct pe baza schemei bloc structurale sau prin modelarea intrare – ieşire a sistemului (v. paragraful I.1.1.b).

După natura elementelor fracţionare din $G(s)$, se disting trei cazuri:

(a) $G(s)$ se numeşte *strict proprie* dacă $\lim_{s\to\infty} G(s)=0$.

(b) $G(s)$ se numeşte *proprie* dacă $\lim_{s\to\infty} G(s)=\text{constant}\neq 0$.

(c) $G(s)$ se numeşte *improprie* dacă nu sunt îndeplinite condiţiile (a) şi (b).

Observaţia 4.1

Elementele din matricele de tipul (a) au gradele numărătorilor strict mai mici decât gradele numitorilor. În conformitate cu criteriile de non-anticipativitate bazate pe transformarea Fourier – Plancherel, [47], numai acestea pot fi caracterizate ca *realiste* (non-anticipative). Celelalte două sunt *nerealiste*. În situații concrete se poate ajunge la modele intrare – ieşire de tipul (b) sau (c) în urma unor simplificări şi / sau idealizări operate pe parcursul procesului de elaborare a reprezentării intrare – ieşire (4.1) (v. şi Observațiile 1.1, 1.2 şi 2.1). □

Fireşte, calificarea unui model intrare – ieşire ca nerealist nu este lipsită de urmări de ordin practic, mai ales prin implicațiile în sinteza regulatorului unui sistem automat multivariabil. Este deci firesc să se utilizeze cu circumspecție modelele (b) şi (c) şi, în final, să se utilizeze pertinent simplificările şi / sau idealizările menționate, în scopul interpretării şi implementăriii adecvate a rezultatelor obținute.

a. Problema obținerii unei realizări a matricei de transfer

Relația dintre *reprezentarea de stare* (2.1), (2.2) şi *reprezentarea intrare – ieşire* (4.1), (4.2) poate fi privită şi prin prisma determinării matricelor A, B, C, $D(\cdot)$ pe baza cunoaşterii lui $G(s)$. Aceasta fiind dată, se spune că A, B, C, $D(\cdot)$ este o *realizare* a matricei de transfer $G(s)$. În cazurile (a) şi (b), D este constantă şi, în conformitate cu ecuația (4.2), se obține în mod unic din relația:

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) \,. \tag{4.4}$$

Ca urmare, se poate scrie:

$$G(s) = G^0(s) + D \,, \tag{4.5}$$

în care $G^0(s)$, determinată în mod unic, este o matrice de fracții raționale, strict proprie.

În legătură cu (4.5), fiind dat $G^0(s) = G(s) - D$, problema obținerii unei *realizări* constă în determinarea unei realizări A, B, C astfel încât:

$$C(I_n s - A)^{-1} B = G^0(s) \,. \tag{4.6}$$

Problema (4.6) nu are soluție unică după cum se poate constata din modul în care perechile (A, B) şi (C, A) influențează transferul intrare – ieşire al sistemului (2.1), (2.2) (v. secțiunea 3.3). Fiind legată de proprietățile de *controlabilitate a stării* şi *observabilitate a stării* ale sistemului (2.1), (2.2) (v. subcapitolul II.1) problema obținerii unei realizări va face obiectul subcapitolului II.4.

În situația în care $G(s)$ este improprie – cazul (c), pentru determinarea matricei $G^0(s)$ se separă din $G(s)$, în mod unic, termenul polinomial $D(s)$, care conține părțile polinomiale ale elementelor lui $G(s)$. Ca urmare, se poate scrie:

$$G(s) = G^0(s) + D(s)\,, \tag{4.7}$$

în care $G^0(s)$ (unică şi strict proprie) se foloseşte pentru rezolvarea problemei (4.6).

b. Problema polilor şi zerourilor

Relațiile (4.2) şi (4.3) relevă dependența transferului intrare – ieşire de valorile proprii ale matricei A, de proprietățile perechilor de matrice (A,B) şi (C,A), ca şi de ale perechii $(G(s),U(s))$. Această aserțiune, care ne reaminteşte analiza din secțiunile 3.3 – 3.5, poate fi reprodusă *mutatis mutandis* pentru ecuația transferului intrare – ieşire (4.1) cu (4.2). În acest sens pledează şi analogia formală dintre $G(\lambda)$ şi $G(s)$. Conceptual ele se deosebesc însă prin natura argumentelor: λ este un parametru al mărimii de intrare (3.11), pe care aceasta îl „înoculează" în sistem, în timp ce variabila independentă s este *frecvența complexă* aflată în corespondență, prin transformarea Laplace, cu *timpul* t.

Fie $G(s) \triangleq \left(G_{ij}(s)\right)$. În sens strict se poate afirma că transferul intrare – ieşire (4.1) depinde de polii şi zerourile elementelor $G_{ij}(s)$, ale matricei $G(s)$. După cum se ştie, $s = p_k$ este pol al funcției $G_{ij}(s)$ dacă $\left\| G_{ij}(p_k) \right\| = \infty$. Mai departe, $s = z_k$ este un zero al funcției $G_{ij}(s)$ dacă $G_{ij}(z_k) = 0$. Acestea sunt definițiile uzuale în cazul sistemelor monovariabile, respectiv al funcțiilor de transfer scalare. Ele se bazează pe ipoteza că funcția rațională considerată este raportul a două polinoame relativ prime.

Observația 4.2

Fireşte, este posibilă existența unor divizori comuni între polinoamele care alcătuiesc fracțiile $G_{ij}(s)$. Pentru a ilustra modul în care pot apărea astfel de divizori comuni se are în vedere (4.2). Pentru generalitate se utilizează şi relațiile (2.74), (2.75). În acest fel din ecuația (4.2) se obține:

$$G_{ij}(s) = \frac{1}{d(s)} c_i \operatorname{adj}(I_n s - A) b_j + d_{ij}(s) = \frac{1}{\delta(s)} c_i \operatorname{adjr}(I_n s - A) b_j + d_{ij}(s)\,,$$

în care $c_i,\ i=\overline{1,p}$, sunt liniile matricei C, $b_j,\ j=\overline{1,m}$ sunt coloanele matricei B, şi $d_{ij}(s),\ i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,m}$, sunt elementele matricei $D(s)$.

C.m.m.d.c. al elementelor matricei adjuncte reduse $\mathrm{adjr}(I_n s - A)$ este 1 şi ca atare nu are divizori comuni cu polinomul minimal $\delta(s)$. Aceasta spre deosebire de $\delta(s)$ şi polinomul $c_i\,\mathrm{adjr}(I_n s - A)b_j$ în care intervin perechile (A, b_j) şi (c_i, A), respectiv zerourile de decuplare la intrare şi la ieşire (v. secţiunea 3.3). Existenţa unor divizori comuni între numitorii şi numărătorii unor elemente din $G(s)$ are o semnificaţie specială. Şi anume, atunci când numitorii şi numărătorii tuturor elementelor neidentic nule ale unei linii (coloane) a lui $G(s)$ au un divizor comun. Acesta poate fi simplificat. Un răspuns privind aceşti divizori comuni şi legătura lor cu zerourile de decuplare se va da în paragraful 6.4.d. □

Procedând ca în secţiunile 3.4 şi 3.5 se pot defini, într-o primă etapă, noţiunile de *pol* şi de *zero de transmisie* asociate, de această dată, matricei de transfer $G(s)$. O astfel de procedură este pe deplin legitimă şi are avantajul unei referiri naturale la particularităţile transferului temporal intrare – ieşire analizat în secţiunile 3.4 şi 3.5. Dar se va avea în vedere ca, atât conceptual cât şi practic, această procedură să se bazeze în final pe matricea $G(s)$ fără ca, în mod necesar, $G(s)$ să se obţină cu formula (4.2) (folosind reprezentarea de stare (2.1), (2.2)).

c. Utilizarea teoremei dezvoltării

Cunoscând polii membrului drept din (4.1), se poate determina transferul temporal folosind *teorema dezvoltării* din teoria transformării Laplace. Pentru ilustrarea acestei afirmaţii fie $G(s)U(s)$ (v. (4.1)) cu următoarele categorii de poli:

(a) $G(s)$ are polii distincţi p_i, de multiplicitate $\nu_i,\ i=\overline{1,\nu}$.

(b) $U(s)$ are la rândul său două categorii de poli:

- Poli identici cu unii $p_i,\ i=\overline{1,\nu}$. După ordonarea adecvată a polilor lui $G(s)$, fie ei $p_j, j=\overline{1,\alpha}$, distincţi, $\alpha \le \nu$, de multiplicitate $\alpha_j \ge 1, j=\overline{1,\alpha}$. Evident, conform ordonării menţionate a polilor, $\alpha_j = 0, j=\overline{\alpha+1,\nu}$.
- Poli diferiţi de $p_i, i=\overline{1,\nu}$, fie ei s_k, distincţi, de multiplicitate $\beta_k, k=\overline{1,\beta}$.

Conform *teoremei dezvoltării*, [47], aplicată ecuaţiei (4.1), se poate scrie:

$$
\begin{aligned}
y(t) = & \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{1}{(\nu_i - j)!} [(K_{i\alpha_i + j})_{\alpha_i = 0, \alpha < i \le \nu}] t^{\nu_i - j} e^{p_i t} \sigma(t) + \\
& + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{1}{(\nu_i + \alpha_i - j)!} L_{ij} t^{\nu_i + \alpha_i - j} e^{p_i t} \sigma(t) + \\
& + \sum_{i=1}^{\beta} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{1}{(\beta_i - j)!} M_{ij} t^{\beta_i - j} e^{s_i t} \sigma(t) + D(\cdot) u(t),
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$
(K_{i\alpha_i + j})_{\substack{\alpha_i = 0 \\ \alpha < i \le \nu}} = \frac{1}{(\alpha_i + j - 1)!} \left\{ \frac{d^{\alpha_i + j - 1}}{ds^{\alpha_i + j - 1}} \left[(s - p_i)^{\nu_i + \alpha_i} G^0(s) U(s) \right] \right\}_{s = p_i}, i = \overline{1, \nu},\ j = \overline{1, \nu_i}, \tag{4.9}
$$

$$
L_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s - p_i)^{\nu_i + \alpha_i} G^0(s) U(s) \right] \right\}_{s = p_i}, \ i = \overline{1, \alpha},\ j = \overline{1, \alpha_i}, \tag{4.10}
$$

$$
M_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s - s_i)^{\beta_i} G^0(s) U(s) \right] \right\}_{s = s_i}, \ i = \overline{1, \beta},\ j = \overline{1, \beta_i}. \tag{4.11}
$$

Prima sumă dublă din (4.8), asociată polilor p_i, cu ν_i, $i = \overline{1, \nu}$, constituie *componenta de regim tranzitoriu*. Restul termenilor din (4.8), asociaţi polilor lui $U(s)$ şi acţiunii directe prin operatorul $D(\cdot)$, constituie *componenta de regim permanent*. A doua sumă dublă din (4.8) este specifică *rezonanţei* generate de polii lui $U(s)$ identici cu o parte din polii lui $G(s)$ (v. secţiunea 3.4).

Relaţia (4.8) cu (4.9) – (4.11) concretizează posibilitatea utilizării directe a ecuaţiei intrare – ieşire (4.1) şi a determinării separate a celor trei sume duble din (4.8). În acest sens pledează şi faptul că $G(s)$ poate fi cunoscută şi direct pe baza schemei bloc structurale sau prin modelarea intrare – ieşire a sistemului (v. paragraful I.1.1.b) şi nu folosind (4.2). În consecinţă, pentru utilizarea relaţiei (4.8) cu (4.9) – (4.11) este necesară cunoaşterea polilor direct din $G(s)$.

4.2. Forma Smith-McMillan a matricei de transfer

Într-un cadru mai larg, sunt necesare definiţii şi proceduri de determinare a polilor şi zerourilor direct din matricea de transfer $G(s)$. În acest sens se poate porni de la noţiunile de pol şi de zero de transmisie introduse şi caracterizate în secţiunile 3.4 (Definiţia 3.2) şi 3.5 (Definiţia 3.3).

Definiția 4.1

Un $p_j \in \mathbb{C}$ se numeşte *pol* al matricei $G(s)$ dacă este pol al unui element din $G(s)$. Cu notațiile din (4.8) (v. şi ipoteza (a) de la 4.1.c), polinomul monic:

$$p(s) = \prod_{j=1}^{\nu} (s - p_j)^{\nu_j} \tag{4.12}$$

se numeşte *polinomul polilor* al matricei de transfer $G(s)$. □

Definiția 4.2

Un $z_i \in \mathbb{C}$ se numeşte *zero de transmisie* al matricei $G(s)$ dacă

$$\rho_{zi} \triangleq \operatorname{rang} G(z_i) < \rho \triangleq \operatorname{nrang} G(s) \le \min(m, p). \tag{4.13}$$

Fie z_i, distincte, de multiplicitate μ_i, $k = \overline{1,\mu}$, zerourile de transmisie ale matricei $G(s)$. Atunci polinomul monic:

$$z(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s - z_i)^{\mu_i} \tag{4.14}$$

se numeşte *polinomul zerourilor de transmisie* al matricei de transfer $G(s)$. □

Aşa cum rezultă din (4.8), polii p_j caracterizează comportarea dinamică a sistemului (4.1). În plus şi în concordanță cu Definiția 4.1, ei generează în transferul intrare – ieşire (4.1) *rezonanța* pe *frecvențele proprii* p_j, dar numai atunci când acestea sunt „inoculate” de mărimea de intrare $U(s)$ (v. secțiunea 3.4).

Similar, zerourile de transmisie z_i caracterizează o anumită interacțiune între $G(s)$ şi $U(s)$. În concordanță cu Definiției 4.2, în transferul intrare – ieşire (4.1) are loc o *antirezonanța* pe *zerourile de transmisie* z_i, dar numai atunci acestea sunt „inoculate” de mărimea de intrare $U(s)$ (v. secțiunea 3.5).

Este simplu de constatat că Definițiile 4.1 şi 4.2, ca şi interpretările care le urmează, au caracter fenomenologic – descriptiv şi ca atare sunt inoperante din punctul de vedere al determinării efective a polinoamelor (4.12), şi (4.14).

În cele ce urmează se prezintă *forma Smith – McMillan* a matricei raționale $G(s)$. Fiind *forma canonică diagonală* (echivalentă) a lui $G(s)$, ea deschide în mod natural o cale de determinare a polinoamelor $p(s)$ şi $z(s)$ ale matricei $G(s)$.

Teorema 4.1 (Smith – McMillan, [27])

Pentru matricea $G(s)$, de rang normal $\rho \le \min(m,p)$, există matricele unimodulare $L(s)$ şi $R(s)$, de dimensiuni $p \times p$ şi respectiv $m \times m$, astfel încât:

$$G(s) = L(s)M(s)R(s), \tag{4.15}$$

în care:

$$\underbrace{M(s)}_{(p\times m)} = \left[\begin{array}{c|c} \operatorname{diag}\left\{\dfrac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)},\dots,\dfrac{\psi_\rho(s)}{\varphi_\rho(s)}\right\} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.16}$$

este *forma Smith – McMillan* a matricei $G(s)$. Aceasta are următoarele proprietăţi:

(a) Perechile de polinoame monice $\psi_i(s),\ \varphi_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, sunt relativ prime.

(b) $\varphi_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, sunt în următoarele relaţii de divizibilitate:

$$\varphi_{i+1}(s)\big|\,\varphi_i(s),\ i=\overline{1,\rho-1}. \tag{4.17}$$

(c) $\psi_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, sunt în următoarele relaţii de divizibilitate:

$$\psi_i(s)\big|\,\psi_{i+1}(s),\ i=\overline{1,\rho-1}.\ \square \tag{4.18}$$

În (4.17) şi (4.18) notaţia $v\,|\,w$ are semnificaţia: v divide pe w.

$M(s)$ şi $N(s)$, fiind unimodulare, au proprietăţile: $\det M(s) = \text{const.} \ne 0$, $\det N(s) = \text{const.} \ne 0$ (v. Anexa B.1). Notând cu $l_i(s),\ i=\overline{1,p}$, coloanele matricei $L(s)$ şi cu $r_i(s),\ i=\overline{1,m}$, liniile matricei $R(s)$, din (4.15) şi (4.16) rezultă:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\rho} l_i(s)\frac{\psi_i(s)}{\varphi_i(s)} r_i(s), \tag{4.19}$$

$$\operatorname{nrang}\left[l_1(s),\dots,l_\rho(s)\right] = \rho,\ \operatorname{nrang}\left[r_1^T(s),\dots,r_\rho^T(s)\right] = \rho,\quad s\in\mathbb{C}.$$

În aceste condiţii transferul intrare – ieşire (4.1) are forma:

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^{\rho} l_i(s)\frac{\psi_i(s)}{\varphi_i(s)} r_i(s)\right] U(s). \tag{4.20}$$

Întrucât $l_i(s) \neq 0,\ r_i(s) \neq 0,\ \ i = \overline{1,\rho}$, urmează ca în Definițiile 4.1 şi 4.2 să se considere numai polinoamele $\varphi_i(s)$, $\psi_i(s),\ i = \overline{1,\rho}$, cu (4.17), (4.18). Se pot formula următoarele două rezultate pentru care se va da o demonstrație comună.

Teorema 4.2

Polii matricei de transfer $G(s)$ sunt rădăcinile polinoamelor $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1,\rho}$, din forma Smith – McMillan (4.16) şi polinomul polilor are forma:

$$p(s) = \prod\nolimits_{i=1}^{\rho} \varphi_i(s)\,.\ \square \tag{4.21}$$

Teorema 4.3

Zerourile de transmisie ale matricei de transfer $G(s)$ sunt rădăcinile polinoamelor $\psi_i(s)$, $i = \overline{1,\rho}$, din forma Smith – McMillan (4.16) şi polinomul zerourilor de transmisie are forma:

$$z(s) = \prod\nolimits_{i=1}^{\rho} \psi_i(s)\,.\ \square \tag{4.22}$$

$\mathscr{D}$. O caracterizare naturală a polilor şi zerourilor de transmisie ale matricei $G(s)$, conform cu secțiunile 3.4 şi 3.5, dar şi pe baza Definițiilor 4.1 şi 4.2, constă în a identifica în intrarea $U(s)$ acele *frecvențe* pentru care din (4.1) rezultă:

(i) în cazul polilor p_j:

$$\|U(s)\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \|Y(s)\| = +\infty\,; \tag{4.23}$$

(ii) în cazul zerourilor de transmisie z_i:

$$\|U(s)\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|Y(s)\| = 0\,. \tag{4.24}$$

De exemplu, se alege $U(s)$ astfel încât:

$$r_i(s)U(s) = \begin{cases} f_j(s), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},\ \ i = \overline{1,\rho}\,, \tag{4.25}$$

în care $f_j(s)$ este o funcție scalară nenulă şi mărginită. Înlocuind (4.25) în (4.20) se obține:

$$Y(s) = l_j(s)\frac{\psi_j(s)}{\varphi_j(s)} f_j(s),\quad j = \overline{1,\rho}\,. \tag{4.26}$$

Din (4.26) şi respectiv (4.23) şi (4.24) se constată că pentru $\varphi_i(s)=0$ rezultă $\|Y(s)\|=+\infty$ şi pentru $\psi_i(s)=0$ rezultă $\|Y(s)\|=0$. Fireşte că se pot obține rezultate de forma (4.26) şi (4.23), respectiv (4.24) pentru toți $j=\overline{1,\rho}$, alegând adecvat mărimea de intrare $U(s)$. Cu aceasta demonstrația celor două teoreme este încheiată. □

Observația 4.3

Din (4.21) se obține gradul polinomului polilor:

$$\operatorname{grd} p(s)=\sum_{i=1}^{\rho}\operatorname{grd}\varphi_i(s), \tag{4.27}$$

numit *gradul McMillan* al matricei $G(s)$. El oferă informații fără echivoc asupra numărului minim de acumulatoare de substanță / energie / informație, independente între ele şi relevante pentru transferul intrare – ieşire, conținute de sistemul reprezentat de matricea de transfer $G(s)$ (v. şi secțiunea II.4.2). □

4.3. Forma Smith a matricei numărător

Relațiile (4.21) şi (4.22) arată că problema determinării polinoamelor $p(s)$ şi $z(s)$ se reduce la determinarea formei Smith – McMillan (4.16) a matricei de transfer $G(s)$. Determinarea formei Smith – McMillan se poate baza pe calculului *formei canonice diagonale* a unei matrice polinomiale, numită *forma Smith*.

Fie $p_1(s)$ c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor elementelor neidentic nule ale matricei $G(s)$. În aceste condiții se poate scrie:

$$G(s)=\frac{1}{p_1(s)}N(s), \tag{4.28}$$

unde $N(s)$ este *matricea numărător* (polinomială (v. Anexa B.1)), unic determinată.

Teorema 4.4 (Smith, [27])

Pentru matricea $N(s)$, de rang normal $\rho\le\min(m,p)$, există matricele unimodulare $L_N(s)$ şi $R_N(s)$ (v. Anexa B.1), de dimensiuni $p\times p$ şi respectiv $m\times m$, astfel încât:

$$N(s)=L_N(s)S(s)R_N(s), \tag{4.29}$$

în care:

$$\underbrace{S(s)}_{(p\times m)} = \left[\begin{array}{c:c} \mathrm{diag}\left\{\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.30}$$

este *forma Smith* a matricei $N(s)$ Aceasta are următoarele proprietăți:

(a) Polinoamele monice $\varepsilon_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, numite *factorii invarianți* al matricei $N(s)$, sunt în următoarele relații de divizibilitate:

$$\varepsilon_i(s) \,\big|\, \varepsilon_{i+1}(s),\ i=\overline{1,\rho-1}. \tag{4.31}$$

(b) $$\varepsilon_i(s)=\frac{\delta_i(s)}{\delta_{i-1}(s)},\ \ i=\overline{1,\rho},\ \delta_0(s)\equiv 1, \tag{4.32}$$

în care $\delta_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, sunt c.m.m.d.c., polinoame monice, respectiv ai tuturor minorilor neidentic nuli de ordin $i=\overline{1,\rho}$, ai matricei $N(s)$. □

a. Determinarea formei Smith prin operații elementare

Conform Teoremei 4.4, se determină factorii invarianți $\varepsilon_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, şi, cu aceştia, se construieşte direct forma Smith $S(s)$ a matricei $N(s)$.

Matricele $L_N(s)$ şi $R_N(s)$ reproduc secvențe finite de operații elementare pe linii şi pe coloane (v. Anexa B.2) prin care se transformă matricea polinomială $N(s)$ în forma Smith $S(s)$.

Practic, matricele unimodulare din (4.29) se obțin în cadrul următoarei proceduri:

(a) Prin operații elementare pe linii şi coloane în $N(s)$ se plasează $\varepsilon_1(s)$ pe poziția (1,1). Se obține matricea $N_a(s)$.

(b) Prin operații elementare pe linii şi coloane în $N_a(s)$ se anulează restul elementelor de pe linia 1 şi coloana 1 (exceptând (1,1)). Se obține $N_b(s)$.

(c) Prin operații elementare pe linii şi coloane în $N_b(s)$ se plasează $\varepsilon_2(s)$ pe poziția (2,2). Se obține $N_c(s)$.

(d) Prin operații elementare pe linii şi coloane în $N_c(s)$ se anulează restul elementelor de pe linia 2 şi coloana 2 (exceptând (2,2)). Se obține $N_d(s)$.

(e) Se repetă operaţiile de tipul (b, c), (d, e) până la obţinerea formei Smith $S(s)$ a matricei $N(s)$.

(f) Operaţiile elementare pe linii şi coloane, consemnate ca atare pas cu pas, definesc matricele unimodulare $L_N^{-1}(s)$ şi $R_N^{-1}(s)$, cu ajutorul cărora, în cadrul acestei proceduri, s-a realizat transformarea:

$S(s) = L_N^{-1}(s)N(s)R_N^{-1}(s)$.

(g) Din $L_N^{-1}(s)$ şi $R_N^{-1}(s)$ se determină $L_N(s)$ şi $R_N(s)$, necesare pentru concretizarea relaţiilor (4.29), cu (4.30).

Exemplul 4.1

Se consideră matricea polinomială:

$$N(s) = \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+3 \\ s(s+1)^2 & s(s^2+s+1) & s(s+1)(2s+1) \\ (s+1)(s+2) & (s+1)^2 & 3(s+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine forma Smith $S(s)$ şi matricele unimodulare $L_N(s)$ şi $R_N(s)$ conform procedurii prezentate mai sus.

$\delta_0(s) \equiv 1$. Apoi c.m.m.d.c. ai minorilor de ordinele 1, 2 şi 3 sunt respectiv:

$\delta_1(s) = 1,\ \delta_2(s) = s,\ \delta_3(s) = s^2(s+1)$.

Cu aceşti divizori se determină următorii factori invarianţi:

$\varepsilon_1(s) = \delta_1(s)/\delta_0(s) = 1,\ \varepsilon_2(s) = \delta_2(s)/\delta_1(s) = s,\ \varepsilon_3(s) = \delta_3(s)/\delta_2(s) = s(s+1)$.

Urmează că forma Smith, în conformitate cu ecuaţia (4.30), are expresia:

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}.$$

Pentru a transforma $N(s)$ în $S(s)$ se procedează după cum urmează.

(a) În $N(s)$ se obţine $\varepsilon_1(s) = 1$ în poziţia (1,1) scăzând coloana 2 din coloana 1:

$$N_a(s) = \begin{bmatrix} 1 & \underline{s+1} & \underline{s+3} \\ \underline{s^2} & s^3+s^2+s & 2s^3+3s^2+s \\ \underline{s+1} & s^2+2s+1 & 3s^2+6s+3 \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Pentru anularea elementelor subliniate şi pentru a obţine $\varepsilon_2(s) = s$ în loc de s^3+s^2+s în poziţia (2,2), se fac în $N_a(s)$ următoarele operaţii elementare:

	pe linii apoi	pe coloane
1.	—	—
2.	$-s^2 L_1 + L_2$	$-(s+1)C_1 + C_2$
3.	$-(s+1)L_1 + L_3$	$-(s+3)C_1 + C_3$.

Aceste operaţii elementare sunt consemnate prin următoarea egalitate:

$$N_b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & s^3+s \\ 0 & 0 & 2s^2+2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s^2 & 1 & 0 \\ -(s+1) & 0 & 1 \end{bmatrix} N_a(s) \begin{bmatrix} 1 & -(s+1) & -(s+3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Pentru a obţine $\varepsilon_3(s) = s(s+1)$ în loc de $2s^2+2s$ în poziţia (3,3) a lui $N_b(s)$ se face operaţia elementară:

$$N_c(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & \underline{s(s^2+1)} \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} N_b(s).$$

(d) Pentru a anula elementul subliniat din $N_c(s)$ se fac următoarele operaţii elementare:

	pe linii apoi	pe coloane
1.	—	—
2.	$L_2 - (s-1)L_3$	—
3.	—	$-2C_2 + C_3$.

Prin aceste operaţii elementare, consemnate prin următoarea egalitate, se obţine forma Smith a matricei $N(s)$:

$$S(s)\equiv N_d(s)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&s&0\\0&0&s(s+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-(s-1)\\0&0&1\end{bmatrix}N_c(s)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(e) Recapitulând toate operațiile efectuate în paşii precedenți rezultă matricele:

$$L_N^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-(s-1)\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-s^2&1&0\\-(s+1)&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-(s^2+1)/2&1&-(s-1)/2\\-(s+1)/2&0&1/2\end{bmatrix},\quad \text{cu } \det L_N^{-1}(s)=1/2\,;$$

$$R_N^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-(s+1)&-(s+3)\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&-(s+1)&s-1\\-1&s+2&-(s+1)\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \text{cu } \det R_N^{-1}(s)=1\,;$$

$$L_N(s)=\begin{bmatrix}1&0&0\\s^2&1&s-1\\s+1&0&2\end{bmatrix},\quad R_N(s)=\begin{bmatrix}s+2&s+1&s+3\\1&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

În final este uşor de verificat că rezultatele obținute satisfac (4.29). □

b. Determinarea formei Smith – McMillan cu ajutorul formei Smith

Din (4.15), (4.16) şi (4.28) – (4.30) se obțin:

$$L(s)\equiv L_N(s),\quad R(s)\equiv R_N(s)\,, \tag{4.33}$$

$$\frac{\psi_i(s)}{\varphi_i(s)}\equiv\frac{\varepsilon_i(s)}{p_1(s)},\quad i=\overline{1,\rho}\,. \tag{4.34}$$

Pentru $i=1$ din (4.32) şi (4.33) rezultă:

$$\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)}=\frac{\varepsilon_1(s)}{p_1(s)}=\frac{\delta_1(s)}{p_1(s)},\quad \delta_1(s)=\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)}p_1(s)\,.$$

Întrucât $\delta_1(s)$ este un polinom şi $\varphi_1(s),\ \psi_1(s)$ sunt relativ prime, rezultă în mod necesar:

$$p_1(s)\equiv\varphi_1(s)\,. \tag{4.35}$$

Relația (4.34) cu (4.35) devine:

$$\frac{\psi_i(s)}{\varphi_i(s)}=\frac{\varepsilon_i(s)}{\varphi_1(s)},\ i=\overline{1,\rho}\,. \tag{4.36}$$

În relația (4.36) urmează ca în fracțiile $\varepsilon_i(s)/\varphi_1(s)$ să se opereze toate simplificările de factori comuni posibile astfel încât să se obțină $\psi_i(s)/\varphi_i(s)$ – rapoartele unor polinoame relativ prime (proprietatea (a) de la Teorema 4.1). Din aceste rapoarte se obțin polinoamele $\psi_i(s),\ \varphi_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, respectiv forma Smith – McMillan (4.16).

Exemplul 4.2

Fie matricea de transfer:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}\\[2ex] -\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}.$$

Să se determine forma Smith – McMillan şi polinomul polilor $p(s)$ şi polinomul zerourilor de transmisie $z(s)$.

Întrucât $p_1(s)\equiv\varphi_1(s)=(s-1)(s+1)(s+2)$, rezultă că pentru matricea numărător, $N(s)$, din relația (4.28) (cu (4.35)) se poate scrie:

$$N(s)=\begin{bmatrix}(s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2\\[1ex] -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1)\end{bmatrix},$$

$\rho = \text{nrang}\, N(s) = 2,\ \delta_0(s) = 1,\ \delta_1(s) = 1, \delta_2(s) = (s-1)^2(s+1)$.

Din relația (4.32) se obțin: $\varepsilon_1(s) \equiv 1,\ \varepsilon_2(s) = (s-1)^2(s+1)$ şi în continuare din (4.36) pentru $i = 1,2$ rezultă:

$$\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)} = \frac{\varepsilon_1(s)}{\varphi_1(s)} = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)},$$

$$\frac{\psi_2(s)}{\varphi_2(s)} = \frac{\varepsilon_2(s)}{\varphi_1(s)} = \frac{(s-1)^{\cancel{2}}\ \cancel{(s+1)}}{\cancel{(s-1)}\ \cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{s-1}{s+2},$$

$$\varphi_1(s) = (s-1)(s+1)(s+2),\ \varphi_2(s) = s+2,\quad \psi_1(s) = 1,\ \psi_2(s) = s-1 .$$

Acestea conduc la forma Smith – McMillan:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s-1}{s+2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Polinomul polilor şi polinomul zerourilor de transmisie sunt respectiv:

$$p(s) = \varphi_1(s)\varphi_2(s) = (s-1)(s+1)(s+2)^2,$$

$$z(s) = \psi_1(s)\psi_2(s) = s-1 .\ \square$$

4.4. Polinoamele polilor şi zerourilor de transmisie

Faptul, conform cu (4.35), că $\varphi_1(s)$ este c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor elementelor neidentic nule ale matricei $G(s)$ sugerează existența unei relații directe, după cum se arată în rezultatul următor, între polinoamele $\varphi_i(s),\ i = \overline{1,\rho}$, şi numitorii minorilor neidentic nuli, de toate ordinele, ai matricei $G(s)$.

Teorema 4.5

Polinomul monic $p(s)$, al polilor matricei de transfer $G(s)$, este c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor minorilor, neidentic nuli, de toate ordinele, ai matricei $G(s)$.

$\mathscr{D}$. Din relațiile(4.32) şi (4.36) rezultă:

$$\frac{\delta_i(s)}{\varphi_1^i(s)}=\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)}\cdot\ldots\cdot\frac{\psi_i(s)}{\varphi_i(s)},\quad i=\overline{1,\rho}\,. \tag{4.37}$$

Pentru $i=2$ se obține:

$$\frac{\delta_2(s)}{\varphi_1^2(s)}=\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)}\frac{\psi_2(s)}{\varphi_2(s)}\,. \tag{4.38}$$

Întrucât $\delta_2(s)$ este prin definiție c.m.m.d.c. al tuturor minorilor de ordinul 2, neidentic nuli, ai matricei $N(s)$ din (4.28), urmează că $\varphi_1(s)\varphi_2(s)$ este c.m.m.m.c. ai tuturor numitorilor minorilor de ordinul 2, neidentic nuli, ai matricei $G(s)$. Conform cu relațiile de divizibilitate (4.17) şi (4.18) au loc respectiv:

$$\psi_1(s)\big|\psi_2(s),\ \varphi_2(s)\big|\varphi_1(s)\,.$$

Dar perechile $\varphi_i(s),\psi_i(s),\ i=\overline{1,\rho}$, sunt relativ prime. Ca urmare, în (4.38) numai $\psi_2(s)$ şi $\varphi_1(s)$ pot avea, eventual, divizori comuni care să se simplifice. Rezultă că toți factorii conținuți de $\varphi_2(s)$ apar şi în c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor minorilor de ordinul 2, neidentic nuli, ai matricei $G(s)$. Prin urmare, c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor minorilor de ordinele 1 şi 2, neidentic nuli, ai matricei $G(s)$ este $\varphi_1(s)\varphi_2(s)$.

Continuând acest raționament se trage concluzia: c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor minorilor de ordinele 1, 2,..., i, neidentic nuli, ai matricei $G(s)$ este $\varphi_1(s)\varphi_2(s)......\varphi_i(s)$; pentru $i=\rho$ se obține $\varphi_1(s)\varphi_2(s)......\varphi_\rho(s)$. Acesta este $p(s)$ (v. (4.21)) şi este c.m.m.m.c. al tuturor numitorilor minorilor, neidentic nuli, de toate ordinele, ai matricei $G(s)$, conform enunțului teoremei. □

Un rezultat similar se poate formula şi pentru zerourile de transmisie ale matricei $G(s)$.

Teorema 4.6

Polinomul monic $z(s)$, al zerourilor de transmisie ale matricei de transfer $G(s)$ este c.m.m.d.c. al tuturor numărătorilor minorilor de ordinul ρ, neidentic nuli, ai matricei $G(s)$, cu condiția „ajustării” acestor minori astfel încât toți să aibă ca numitor comun polinomul $p(s)$.

$\mathscr{D}$. Se are în vedere mai întâi $\delta_\rho(s)$, care este c.m.m.d.c., monic, al tuturor minorilor de ordinul ρ, neidentic nuli, ai matricei $N(s)$ din (4.28). Din (4.37), pentru $i=\rho$, şi (4.21), (4.22) rezultă:

$$\delta_\rho(s)=\varphi_1^\rho(s)\frac{z(s)}{p(s)}. \tag{4.39}$$

În continuare, pentru orice $i=\overline{1,\rho}$, polinomul monic $\delta_i(s)$ (c.m.m.d.c. al tuturor minorilor de ordinul i, neidentic nuli, ai matricei $N(s)$) coincide cu c.m.m.d.c. al numărătorilor tuturor minorilor de ordinul i ai formei Smith – McMillan (4.16), cu condiția „ajustării” acestor minori astfel încât toți să aibă acelaşi numitor (în sensul c.m.m.m.c.). Acest numitor comun, pentru $i=\rho$, este $p(s)$. Urmează că forma Smith – McMillan (4.16) a matricei $G(s)$ are un singur minor de ordinul ρ, neidentic nul, şi anume:

$$\det \operatorname{diag}\left\{\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)},\ldots\ldots,\frac{\psi_\rho(s)}{\varphi_\rho(s)}\right\}=\frac{z(s)}{p(s)}.$$

Acest rezultat este suficient pentru demonstrația teoremei. □

Exemplul 4.3

Se consideră matricea de transfer de la Exemplul 4.2 şi se cere să se determine polinomul polilor, $p(s)$, şi polinomul zerourilor de transmisie, $z(s)$, conform Teoremelor 4.5 şi respectiv 4.6.

Matricea $G(s)$ are următorii minori (neidentic nuli) distincți:

- de ordinul 1: $\dfrac{1}{s+1}$, $\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}$, $\dfrac{-1}{s-1}$, $\dfrac{1}{s+2}$;
- de ordinul 2: $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$, $\dfrac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}$.

Din aceste fracții, conform procedurii din enunțul Teoremei 4.5, se obține polinomul polilor:

$$p(s)=(s-1)(s+1)(s+2)^2.$$

În continuare, se „ajustează” minorii de ordinul 2 astfel încât toți să aibă numitorul comun $p(s)$. Se obțin:

$$\frac{(s-1)(s+2)}{p(s)}, \quad -\frac{(s-1)^2}{p(s)}.$$

Din acestea, prin procedura formulată prin Teorema 4.6 (c.m.m.d.c. al numărătorilor fracțiilor de mai sus), rezultă polinomul zerourilor de transmisie:

$$z(s) = s - 1. \;\square$$

Observația 4.4

În finalul acestei secțiuni trebuie remarcat că, principial, forma Smith – McMillan nu permite şi determinarea polinomului zerourilor de decuplare al matricei de transfer $G(s)$. Acest fapt se explică prin însăşi proprietățile formei Smith – McMillan, între care esențială este aceea că perechile $\varphi_i(s), \psi_i(s),\ i = \overline{1,\rho}$, sunt relativ prime.

Faptul că $p(s)$ şi $z(s)$ pot avea totuşi divizori comuni (aşa cum se constată în rezultatele obținute la Exemplul 4.2) nu are nici o legătură cu existența zerourilor de decuplare. Din (4.40) este lesne de înțeles că dacă există unele perechi $\varphi_i(s), \psi_j(s),\ i, j = \overline{1,\rho},\ i \neq j$, care au anumiți factori comuni, atunci polinoamele $p(s)$ şi $z(s)$ au şi ele exact aceiaşi divizori comuni. Perechile $\varphi_i(s), \psi_i(s)$, $i = \overline{1,\rho}$, nu pot acea divizori comuni deoarece sunt relativ prime. □

5. Fracţii de matrice

5.1. Definiţii

Această reprezentare este o extindere naturală a reprezentării prin funcţii de transfer scalare a sistemelor dinamice liniare constante monovariabile ($m = p = 1$).

În mod obişnuit reprezentarea prin fracţie de matrice se poate obţine direct din ecuaţiile în transformate Laplace ale sistemului analizat. Această afirmaţie se ilustrează în continuare cu ajutorul unui exemplu.

Exemplul 5.1

Fie circuitul electric *R*, *L*, *C* cu schema din fig. I.5.1, în care $U(s)$ este tensiunea sursei, $Y_1(s)$ este tensiunea la bornele inductanţei şi $Y_2(s)$ este intensitatea curentului. Se scriu, în transformate Laplace, următoarele ecuaţii:

$$Y_1(s) = LsY_2(s),$$
$$Y_1(s) + RY_2(s) + \frac{1}{Cs}Y_2(s) = U(s).$$

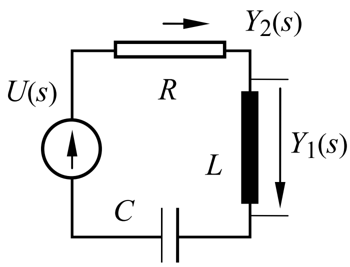

Fig. I.5.1. Circuit R, L, C

Mărimea de intrare este scalarul $U(s)$ şi mărimea de ieşire este vectorul $Y(s) = [Y_1(s)\ \ Y_2(s)]^T$. Prin câteva prelucrări simple se obţine ecuaţia matriceală:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -Ls \\ Cs & 1+RCs \end{bmatrix}}_{\triangleq D_L(s)} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ Cs \end{bmatrix}}_{\triangleq N_L(s)} U(s)\,.$$

Rezultă că matricea de transfer poate fi scrisă ca o fracţie de matrice la stânga:

$$G(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -Ls \\ Cs & 1+RCs \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Cs \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_L(s) & \text{– numitorul} \\ N_L(s) & \text{– numărătorul} \end{pmatrix}. \square$$

$G(s)$, matrice $p \times m$, $\rho \triangleq \operatorname{nrang} G(s) \le \min(m, p)$, se poate reprezenta ca:

- *fracţie matriceală la dreapta*, de forma:

$$G(s) = N_R(s) D_R^{-1}(s)\,, \tag{5.1}$$

- *fracție matriceală la stânga*, de forma:

$$G(s) = D_L^{-1}(s) N_L(s)\,, \tag{5.2}$$

în care $N_R(s)$, $N_L(s)$ sunt *matrice numărător*, $D_R(s)$, $D_L(s)$ – *matrice numitor*, iar $\operatorname{grd}\det D_R(s)$, $\operatorname{grd}\det D_L(s)$ sunt *ordinele reprezentărilor / modelelor*.

a. Definiția bazată pe forma Smith – McMillan

Evaluarea simplă a proprietăților acestor reprezentări se poate baza şi pe Teorema 4.1. Se obțin fracții matriceale de forma (5.1) şi (5.2) folosind factorizarea (4.15) şi forma Smith – McMillan (4.16). După calcule relativ simple se obțin:

$$G(s) = \underbrace{L(s)\left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\psi_1(s),\dots,\psi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]}_{=N_R(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\varphi_1(s),\dots,\varphi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & I_{m-\rho} \end{array}\right]^{-1} R(s)}_{=D_R^{-1}(s)}\,, \tag{5.3}$$

$$G(s) = \underbrace{L(s)\left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\varphi_1(s),\dots,\varphi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & I_{p-\rho} \end{array}\right]^{-1}}_{=D_L^{-1}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\psi_1(s),\dots,\psi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] R(s)}_{=N_L(s)}\,, \tag{5.4}$$

în care, pentru (5.1) şi respectiv (5.2), se identifică:

$$\underset{(p\times m)}{N_R(s)} = L(s) M_\psi(s), \quad \underset{(m\times m)}{D_R(s)} = R^{-1}(s) M_{\varphi R}(s)\,, \tag{5.5}$$

$$\underset{(p\times m)}{N_L(s)} = M_\psi(s) R(s), \quad \underset{(p\times p)}{D_L(s)} = M_{\varphi L}(s) L^{-1}(s)\,, \tag{5.6}$$

$$\underset{(p\times m)}{M_\psi(s)} \triangleq \left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\psi_1(s),\dots,\psi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{5.7}$$

$$\underset{(m\times m)}{M_{\varphi R}(s)} \triangleq \left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\varphi_1(s),\dots,\varphi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & I_{m-\rho} \end{array}\right], \tag{5.8}$$

$$\underset{(p\times p)}{M_{\varphi L}(s)} \triangleq \left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}\left\{\varphi_1(s),\dots,\varphi_\rho(s)\right\} & 0 \\ \hdashline 0 & I_{p-\rho} \end{array}\right]. \tag{5.9}$$

Întrucât perechile de polinoame $\psi_i(s), \varphi_i(s), \ i=\overline{1,\rho}$, sunt relativ prime, rezultă că şi perechile de matrice $M_\psi(s), M_{\varphi R}(s)$ şi $M_\psi(s), M_{\varphi L}(s)$ sunt relativ prime, la dreapta şi respectiv la stânga (v. Anexa B.3). Pe de altă parte, matricele $L(s)$ şi $R(s)$ sunt unimodulare (v. Anexa B.1). Urmează că perechile de matrice $N_R(s), D_R(s)$ şi $N_L(s), D_L(s)$, bazate pe forma Smith – McMillan, sunt de asemenea relativ prime, la dreapta şi respectiv la stânga.

Privitor la ordinele reprezentărilor (5.3) şi (5.4), ținând seama şi de (4.21), (4.27), pentru gradele polinoamelor implicate se poate scrie:

$$\operatorname{grd}\det D_R(s) = \operatorname{grd}\det M_{\varphi R}(s) = \sum\nolimits_{i=1}^{\rho} \operatorname{grd}\varphi_i(s) = \operatorname{grd} p(s)\,, \quad (5.10)$$

$$\operatorname{grd}\det D_L(s) = \operatorname{grd}\det M_{\varphi L}(s) = \sum\nolimits_{i=1}^{\rho} \operatorname{grd}\varphi_i(s) = \operatorname{grd} p(s)\,. \quad (5.11)$$

Aceasta înseamnă că reprezentările (5.3) şi (5.4) bazate pe forma Smith – McMillan sunt de ordinul minim, egal cu gradul McMillan (v. Observația 4.3).

În general, fracțiile de matrice (5.1) şi (5.2) nu sunt unice. Acesta este cazul când matricele numărător şi numitor admit divizori comuni (v. Anexa B.3).

Fie matricele polinomiale nesingulare $W_R(s)$ şi $W_L(s)$ după cum urmează:

- $W_R(s)$, $m\times m$, divizor comun la dreapta pentru $N_R(s), D_R(s)$; se scrie:

$$N_R(s) = \tilde{N}_R(s)W_R(s), \quad D_R(s) = \tilde{D}_R(s)W_R(s)\,; \quad (5.12)$$

- $W_L(s)$, $p\times p$, divizor comun la stânga pentru $N_L(s), D_L(s)$; se scrie:

$$N_L(s) = W_L(s)\tilde{N}_L(s), \quad D_L(s) = W_L(s)\tilde{D}_L(s)\,. \quad (5.13)$$

Prin $\tilde{\cdot}$ s-au notat matricele rezultate prin explicitarea divizorilor comuni.

Înlocuind (5.12) şi (5.13) respectiv în (5.1) şi (5.2) se obțin:

$$G(s) = \tilde{N}_R(s)W_R(s)\left[\tilde{D}_R(s)W_R(s)\right]^{-1} = \tilde{N}_R(s)\tilde{D}_R^{-1}(s)\,, \quad (5.14)$$

$$G(s) = \left[W_L(s)\tilde{D}_L(s)\right]^{-1} W_L(s)\tilde{N}_L(s) = \tilde{D}_L^{-1}(s)\tilde{N}_L(s)\,, \quad (5.15)$$

în care rezultatele finale s-au obținut prin „simplificarea” divizorilor comuni $W_R(s)$ şi respectiv $W_L(s)$.

Privitor la ordinele reprezentărilor (5.14) şi respectiv (5.15) se scrie:

$$\operatorname{grd}\det \tilde{D}_R(s)W_R(s) = \operatorname{grd}\det \tilde{D}_R(s) + \operatorname{grd}\det W_R(s) \geq \operatorname{grd}\det \tilde{D}_R(s)\,,\tag{5.16}$$

$$\operatorname{grd}\det W_L(s)\tilde{D}_L(s) = \operatorname{grd}\det W_L(s) + \operatorname{grd}\det \tilde{D}_L(s) \geq \operatorname{grd}\det \tilde{D}_L(s)\,.\tag{5.17}$$

Inegalităţile finale din (5.16), (5.17) conduc la următoarea definiţie.

Definiţia 5.1

A. O reprezentare de tip fracţie de matrice se numeşte *ireductibilă* dacă în matricea de transfer matricele numărător şi numitor sunt relativ prime.

B. În caz contrar reprezentarea se numeşte *reductibilă*. □

Observaţia 5.1

Dacă divizorii comuni $W_R(s)$ şi $W_L(s)$ din (5.12) şi respectiv (5.13) sunt:

- c.m.m.d.c. non-unimodulari, atunci rezultatele finale din (5.14) şi respectiv (5.15) (adică după „simplificare”) sunt reprezentări ireductibile;
- matrice unimodulare, atunci inegalităţile (5.16) şi (5.17) devin egalităţi deoarece $\det W_R(s) = \text{constant} \neq 0$ şi $\det W_L(s) = \text{constant} \neq 0$.

Urmează că reprezentările ireductibile sunt de ordin minim (egal cu gradul McMillan). Totodată, ele nu sunt unice, ci pot diferi între ele, ca în (5.14) şi (5.15) prin divizorii comuni unimodulari $W_R(s)$ şi respectiv $W_L(s)$. □

Exemplul 5.2

Fie matricea de transfer:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \dfrac{s}{(s+2)^2} \\ \dfrac{-s}{(s+2)^2} & \dfrac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}.$$

Să se determine reprezentările de tip fracţie matriceală ireductibilă, la dreapta şi la stânga.

Se foloseşte în acest scop forma Smith – McMillan. Se aduce mai întâi $G(s)$ la forma (4.28) cu (4.35) în care $\varphi_1(s) = (s+1)^2(s+2)^2$ şi

$$N(s) = \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Pentru $N(s)$ se obțin $\delta_0(s) \equiv 1, \delta_1(s) = s$ și $\delta_2(s) = s^3(s+1)^2(s+2)$. Conform relației (4.32) rezultă: $\varepsilon_1(s) = s,\ \varepsilon_2(s) = s^2(s+1)^2(s+2)$.

Forma Smith a matricei $N(s)$ (relația (4.30)) este:

$$S(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}.$$

Conform relației (4.29), $S(s)$ se obține din $N(s)$ prin operații elementare cu coloanele și liniile lui $N(s)$ până se ajunge la $S(s)$. Efectiv se operează astfel:

(a) Elementul (1,1) din $N(s)$ coincide deja cu $\varepsilon_1(s)$. Se înmulțește cu $(s+1)^2$ linia 1 din $N(s)$ și se adună la linia 2. Acest lucru conduce la:

$$N_a(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (s+1)^2 & 1 \end{bmatrix}}_{=L^{-1}(s) \equiv L_N^{-1}(s)} N(s) = \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ 0 & s^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix},\ L(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1)^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Elementul (2,2) din $N_a(s)$ coincide cu $\varepsilon_2(s)$. Se înmulțește cu $-(s+1)^2$ coloana 1 din $N_a(s)$ și se adună la coloana 2. Acest lucru conduce la:

$$S(s) \equiv N_b(s) = N_a(s) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -(s+1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=R^{-1}(s) \equiv R_N^{-1}(s)} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}, R(s) = \begin{bmatrix} 1 & (s+1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În conformitate cu (4.34) rezultă că

$$\varphi_1(s) = (s+1)^2(s+2)^2,\ \varphi_2(s) = s+2,\ \psi_1(s) = s,\ \psi_2(s) = s^2,$$

$$M_{\varphi R}(s) \equiv M_{\varphi L}(s) = \mathrm{diag}\{(s+1)^2(s+2)^2,\ s+2\},\quad M_\psi(s) = \mathrm{diag}\{s,\ s^2\}.$$

Mai departe, ținând seama de (4.33) și (5.1), (5.2), (5.3) – (5.9), după calcule relativ simple, se obțin următoarele două reprezentări ireductibile:

$$G(s) = LM_\psi(R^{-1}M_{\varphi R})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s(s+1)^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & -(s+1)^2(s+2) \\ 0 & (s+2) \end{bmatrix}^{-1},$$

$$G(s) = (M_{\varphi L}L^{-1})^{-1}M_\psi R = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & 0 \\ (s+1)^2(s+2) & (s+2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}. \ \square$$

b. Definiția bazată pe reprezentarea de stare

Reprezentările prin fracție de matrice se pot obține și din reprezentarea de stare (2.1), (2,2).

În ipoteza că modelul (2.1), (2.2) nu are nici un fel de zerouri de decuplare (v. secțiunea 3.3), procedura de urmat se poate explica pe baza părții strict proprii $G^0(s)$ (v. relația (4.6)) a matricei de transfer $G(s)$:

$$G^0(s) = C(I_n s - A)^{-1} B \,. \tag{5.18}$$

Pentru obținerea fracției de matrice la dreapta se face mai întâi factorizarea:

$$(I_n s - A)^{-1} B = E(s) D_R^{-1}(s) \,, \tag{5.19}$$

în care $D_R(s)$, $E_R(s)$ sunt relativ prime la dreapta. Din (5.19) și (5.18) se obține:

$$G^0(s) = N_R^0(s) D_R^{-1}(s) \,, \tag{5.20}$$

$$N_R^0(s) = C E_R(s) \,. \tag{5.21}$$

$D_R(s)$, $N_R^0(s)$ fiind relativ prime, reprezentarea (5.20) este ireductibilă.

În mod similar, se poate transforma $G^0(s)$ într-o fracție de matrice la stânga. Făcând mai întâi factorizarea:

$$C(I_n s - A)^{-1} = D_L^{-1}(s) E_L(s) \,, \tag{5.22}$$

în care $D_R(s)$, $E_R(s)$ sunt relativ prime la stânga. Din (5.22) și (5.18) se obține:

$$G^0(s) = D_L^{-1}(s) N_L^0(s) \,, \tag{5.23}$$

$$N_L^0(s) = E_L(s) B \,. \tag{5.24}$$

$D_L(s)$, $N_L^0(s)$ fiind relativ prime, și reprezentarea (5.23) este ireductibilă.

c. Forme unice

O posibilitate de a reprezenta $G(s)$ în mod unic prin fracții matriceale, [140], de exemplu la dreapta, este următoarea:

$$G(s) = V_R(s) T_R^{-1}(s) + D(s) \,, \tag{5.25}$$

unde $V_R(s), T_R(s)$ şi $D(s)$, de dimensiuni $p \times m, m \times m$ şi respectiv $p \times m$, sunt matrice polinomiale unic determinate; $D(s)$ reprezintă partea polinomială şi $V_R(s)T_R^{-1}(s)$ reprezintă partea strict proprie $G_0(s)$ a lui $G(s)$. Matricele $V_R(s)$ şi $T_R(s)$ au următoarele proprietăți:

(a) $V_R(s)$ şi $T_R(s)$ sunt relativ prime la dreapta.

(b) $T_R(s)$ este superior triunghiulară şi are pe diagonala principală polinoame monice de grad maxim pe liniile pe care se află. În plus, dacă un element de pe diagonala principală este 1, atunci toate celelalte elemente aflate pe linia corespunzătoare sunt nule.

(c) $\operatorname{grd}\det T_R(s)$ este minim, adică reprezentarea (5.25) este ireductibilă.

(d) Forma Smith a matricei $T_R(s)$ este (5.8).

(e) Forma Smith a matricei $V_R(s) + D(s)T_R(s)$ este (5.7).

Similar, se reprezintă $G(s)$, în mod unic, prin fracția matriceală la stânga:

$$G(s) = T_L^{-1}(s)V_L(s) + D(s). \tag{5.26}$$

$T_L(s)$ şi $V_L(s)$ sunt similare, *mutatis mutandis*, cu $T_R(s)$ şi $V_R(s)$. $T_L(s)$ este inferior triunghiulară, pe diagonala principală are polinoame monice de grad maxim pe coloane şi are forma Smith (5.9). $V_L(s) + T_L(s)D(s)$ are forma Smith (5.7).

De menționat că rezultatele de la Exemplul 5.2 sunt de forma (5.25), (5.26).

(f) Analog se pot defini reprezentări unice de forma (5.25) şi (5.26) în care $T_R(s)$ şi $T_L(s)$ sunt respectiv inferior şi superior triunghiulare. În acest caz în formele Smith elementele diagonalei principale sunt plasate în succesiune inversă comparativ cu (5.7) – (5.9).

5.2. Poli şi zerouri de transmisie

Teorema 5.1

Polii reprezentărilor de tip fracție de matrice ireductibile de forma (5.1) sau (5.2), (5.20) sau (5.23), şi (5.25) sau (5.26), sunt, după caz, zerourile polinoamelor: $\det D_R(s)$ sau $\det D_L(s)$, şi $\det T_R(s)$ sau $\det T_L(s)$, în care $D_R(s)$, $D_L(s), T_R(s)$ şi $T_L(s)$ sunt matricele numitor corespunzătoare.

$\mathcal{D}$. Din reprezentările ireductibile (5.1) sau (5.2) şi (5.25), (5.26), ținând seama de Teorema 4.2, rezultă:

$$\det D_R(s) = \det R^{-1}(s) \det M_{\varphi R}(s) = \alpha^{-1} \prod_{i=1}^{\rho} \varphi_i(s) = \alpha^{-1} p(s),$$

$$\det D_L(s) = \det M_{\varphi L}(s) \det L^{-1}(s) = \beta^{-1} \prod_{i=1}^{\rho} \varphi_i(s) = \beta^{-1} p(s),$$

în care $\alpha = \det R(s) \neq 0$ şi $\beta = \det L(s) \neq 0$, sau

$$\det T_R(s) = \det T_L(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \varphi_i(s) = p(s).$$

În cazurile (5.20) sau (5.23) se face o transformare pe baza formei Smith – McMillan, după care se procedează ca mai sus. □

Teorema 5.2

A. Zerourile de transmisie ale reprezentărilor de tip fracție matriceală ireductibile (5.1) sau (5.2), şi (5.25) sau (5.26) sunt, după caz, zerourile matricelor numărător: $N_R(s)$ sau $N_L(s)$, şi $V_R(s) + D(s)T_R(s)$ sau $V_L(s) + T_L(s)D(s)$.

B. Zerourile de transmisie ale reprezentărilor de tip fracție matriceală ireductibile (5.20) sau (5.23) sunt zerourile matricelor numărător: $N_R^0(s)$ sau $N_L^0(s)$.

C. Pentru $\rho = m = p$, zerourile de transmisie sunt, după caz, zerourile următoarelor polinoame: $\det N_R(s)$, $\det N_L(s)$, $\det(V_R(s) + D(s)T_R(s))$, $\det(V_L(s) + T_L(s)D(s))$, $\det N_R^0(s)$, şi $\det N_L^0(s)$.

$\mathcal{D}$. **A.** Pentru (5.1) sau (5.2) se poate scrie:

$$\operatorname{nrang} N_R(s) = \operatorname{nrang} L(s) M_\psi(s) = \operatorname{nrang} M_\psi(s) = \rho,$$

$$\operatorname{nrang} N_L(s) = \operatorname{nrang} M_\psi(s) R(s) = \operatorname{nrang} M_\psi(s) = \rho,$$

deoarece $L(s)$ şi $R(s)$ sunt matrice unimodulare.

Conform cu 5.1.c (e) sau (f) şi (5.7), pentru (5.25) sau (5.26) se poate scrie:

$$\operatorname{nrang}[V_R(s) + D(s)T_R(s)] = \operatorname{nrang} M_\psi(s) = \rho,$$

$$\operatorname{nrang}[V_L(s) + T_L(s)D(s)] = \operatorname{nrang} M_\psi(s) = \rho.$$

Din (5.7) rezultă că nrang $M_\psi(s)$ este dat de singurul minor de ordinul ρ (maxim), neidentic nul, conținut de $M_\psi(s)$. Acesta este (v. şi Teorema 4.3):

$$\det \operatorname{diag}\left\{\psi_1(s),\ldots,\psi_\rho(s)\right\} = \prod\nolimits_{i=1}^{\rho} \psi_i(s) = z(s).$$

B. În cazurile (5.20) sau (5.23) se aplică o conversie pe baza formei Smith – McMillan, după care se procedează ca mai sus.

C. Pentru $\rho = m = p$, polinoamele $\det M_R(s), \det N_L(s)$, $\det\big(V_R(s)+$ $+D(s)T_R(s)\big)$ şi $\det\big(V_L(s)+T_L(s)D(s)\big)$ sunt proporționale cu $z(s)$. □

Exemplul 5.3

Fie reprezentarea de tip fracție de matrice la dreapta:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & (s+1)^2(s+2) \\ -(s+2)^2 & -(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(s+1)^2 & 0 \\ (s+1)(s+2)^2 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Să se determine polii şi zerourile de transmisie ale matricei de transfer $G(s)$.

Mai întâi se caută matricele divizori, dacă există, ale matricelor numitor şi numărător. Prin operații elementare pe liniile şi coloanele celor două matrice se obțin următoarele rezultate

$$\begin{bmatrix} 0 & (s+1)^2(s+2) \\ -(s+2)^2 & -(s+2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & (s+1)^2 \\ -(s+2)^2 & -1 \end{bmatrix}}_{=N_R(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}_{=W_R(s)} \equiv N_R(s)W_R(s),$$

$$\begin{bmatrix} -(s+1)^2 & 0 \\ (s+1)(s+2)^2 & (s+2)^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(s+1)^2 & 0 \\ (s+1)(s+2)^2 & s+2 \end{bmatrix}}_{=D_R(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}_{=W_R(s)} \equiv D_R(s)W_R(s).$$

Rezultă că $W_R(s)$ este un divizor comun al matricelor numitor şi numărător.

Pentru a arăta că $N_R(s)$ şi $D_R(s)$ sunt relativ prime la dreapta este necesar şi suficient să se găsească matricele $P(s)$ şi $Q(s)$ astfel încât (v. Anexa B.3):

$$P(s)N_R(s) + Q(s)D_R(s) = I_2.$$

Efectuând toate calculele se ajunge la următorul rezultat:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -s^2(s+2) \\ 1 & -s(s+1)(s+2) \end{bmatrix}}_{=P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & (s+1)^2 \\ -(s+2)^2 & -1 \end{bmatrix}}_{=N_R(s)} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} s^2+2s-1 & -s^2 \\ 0 & -s(s+2) \end{bmatrix}}_{=Q(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} -(s+1)^2 & 0 \\ (s+1)(s+2)^2 & s+2 \end{bmatrix}}_{=D_R(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În aceste condiții următoarea reprezentare este ireductibilă.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & (s+1)^2 \\ -(s+2)^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(s+1)^2 & 0 \\ (s+1)(s+2)^2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Polinoamele căutate sunt:

– conform Teoremei 5.1: $p(s) = \det D_R(s) = (s+1)^2(s+2)$;

– conform Teoremei 5.2.C: $z(s) = \det N_R(s) = (s+1)^2(s+2)^2$.

Pentru a verifica aceste rezultate se efectuează calculele în $G(s)$ şi se obțin:

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & \dfrac{(s+1)^2}{s+2} \\ \dfrac{s+2}{(s+1)^2} & -\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}}_{=p_1(s)\equiv\varphi_1(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} (s+1)^3(s+2)^2 & (s+1)^4 \\ (s+2)^2 & -(s+1)^2 \end{bmatrix}}_{=N(s)},$$

$$\delta_0(s) = \delta_1(s) = 1, \delta_2(s) = (s+1)^4(s+2)^3, \varepsilon_1(s) = 1, \varepsilon_2(s) = (s+1)^4(s+2)^3,$$

$$\psi_1(s)/\varphi_1(s) = \varepsilon_1(s)/\varphi_1(s) = 1/(s+1)^2(s+2),$$

$$\psi_2(s)/\varphi_2(s) = \varepsilon_2(s)/\varphi_1(s) = (s+1)^2(s+2)^2,$$

$$\psi_1(s) = 1,\ \varphi_1(s) = (s+1)^2(s+2),\ \psi_2(s) = (s+1)^2(s+2)^2,\ \varphi_2(s) = 1.$$

Forma Smith – McMillan şi polinoamele polilor şi zerourilor sunt:

$$M(s) = \operatorname{diag}\left\{\frac{\psi_1(s)}{\varphi_1(s)}, \frac{\psi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right\} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}, (s+1)^2(s+2)^2\right\},$$

$$p(s) = \varphi_1(s)\varphi_2(s) = (s+1)^2(s+2),\ z(s) = \psi_1(s)\psi_2(s) = (s+1)^2(s+2)^2.$$

Acest rezultat confirmă rezultatele obținute anterior pentru $p(s)$ şi $z(s)$. □

6. Reprezentarea polinomială

6.1. Preliminarii

Reprezentarea intrare – stare – ieşire (2.1), (2.2) ca şi reprezentarea intrare – ieşire (4.1) constituie de fapt rezultatele procedurilor de formulare a modelului matematic al unui sistem dinamic real. Procedurile constau în prelucrări de ecuații, relativ ample, care au ca finalitate cele doua reprezentări.

Aceste reprezentări şi prelucrările menționate prilejuiesc însă şi unele aprecieri critice. Ele se referă atât la artificialitatea noțiunii de stare, în cazul (2.1), (2.2), cât şi la conceptul *black box*, în cazul (4.1), în care esențial este mecanismul de transformare a intrării în ieşire fără a evidenția starea internă.

O soluție alternativă o constituie *reprezentarea intrare – stare parțială – ieşire*, numită şi *reprezentarea polinomială* [141], [143]. Ea constă din ecuații diferențiale şi ecuații algebrice obținute direct din legile structural – funcționale ale fenomenelor din sistemul dinamic modelat. Prelucrările ecuațiilor sunt minore. De regulă, se fac numai simple deplasări de termeni şi, eventual, liniarizări.

În general, reprezentarea de stare parțială are următoarea formă:

$$P(\cdot)\, w = Q(\cdot)\, u, \quad t \in \mathbb{R},\ w \in \mathbb{R}^r,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{6.1}$$

$$y = R(\cdot)w + V(\cdot)u, \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{6.2}$$

în care u şi y sunt mărimile de intrare şi de ieşire, w este vectorul de *stare parțială* şi r este dimensiunea stării parțiale. $P(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot)$ şi $V(\cdot)$ sunt operatori matriceali derivativi, ale căror elementele sunt *operatori polinomiali derivativi* cu coeficienți constanți (similar cu operatorul $D(\cdot)$, v. Observația 2.1).

Aplicând în (6.1), (6.2) transformarea Laplace, [15], [47], cu condiții inițiale nule se obține *reprezentarea polinomială* propriu-zisă:

$$P(s)W(s) = Q(s)U(s), \tag{6.3}$$

$$Y(s) = R(s)W(s) + V(s)U(s). \tag{6.4}$$

În cele ce urmează se admit ca ipoteze de lucru:

$$\det P(s) \not\equiv 0, \quad \operatorname{grd}\det P(s) = n, \tag{6.5}$$

şi $\det P(s)$ este monic (în caz contrar, se multiplică (6.3) cu o constantă adecvată).

Ca şi la reprezentarea de stare, n se numeşte *ordinul sistemului / modelului*.

Reprezentarea (6.3), (6.4) cu (6.5) îmbină într-o manieră avantajoasă instrumentele oferite de reprezentările (2.1), (2.2) şi (4.1), în raport cu care, după cum se va vedea în continuare, se pot stabili relaţii foarte utile.

Exemplul 6.1

Se consideră dispozitivul de acţionare din fig. I.6.1 (de tip difuzor electrodinamic) care se utilizează ca element de acţionare – poziţionare în unele echipamente periferice sau ca element de comandă a pistonului distribuitor (de fluid) al servomotorului hidraulic.

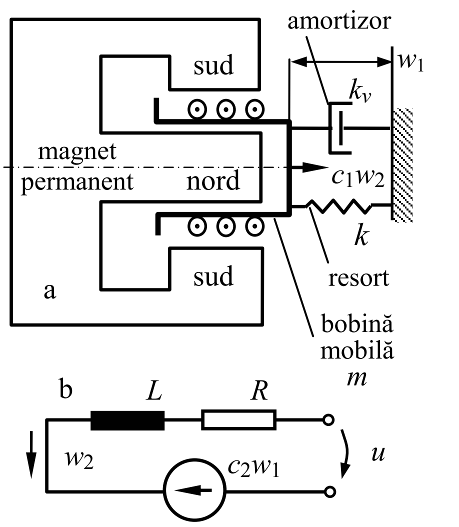

Fig. I.6.1. Schema unui dispozitiv de tip difuzor electrodinamic (a – *secţiune axială*) *şi schema electrică echivalentă* (b)

Să se determine reprezentarea de stare parţială (polinomială) a sistemului.

În conformitate cu notaţiile din fig. I. 6.1 se scriu următoarele ecuaţii:

(a) Pentru partea electromecanică:

$$m\ddot{w}_1 + k_v \dot{w}_1 + k\, w_1 = c_1 w_2 ,$$

în care m este masa bobinei mobile, k_v – coeficientul de frecare vâscoasă al amortizorului, k – constanta elastică a resortului, w_1 – deplasarea bobinei, w_2 – intensitatea curentul prin înfăşurarea bobinei mobile, şi c_1 – coeficientul de proporţionalitate al forţei electromagnetice $c_1 w_2$ produse de interacţiunea între curentul w_2 şi fluxul magnetic constant al magnetului permanent.

(b) Pentru partea electrică:

$$c_2 \dot{w}_1 + L\dot{w}_2 + R\, w_2 = u,$$

unde L şi R sunt inductanţa şi rezistenţa bobinei, u – tensiunea aplicată bobinei, şi c_2 – coeficientul tensiunii induse $c_2 \dot{w}_1$ ca urmare a mişcării bobinei cu viteza $\dot{w}_1$ în fluxul magnetic constant al magnetului permanent.

Pentru acest sistem mărimea de intrare este u, starea parțială este definită de vectorul $[w_1 \;\; w_2]^T$, şi mărimea de ieşire este $y = w_1$. Trecând la transformate Laplace în ecuațiile de mai sus se obține următoarea reprezentare polinomială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ms^2 + k_v s + k & -c_1 \\ c_2 s & Ls + R \end{bmatrix}}_{=P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix}}_{=W(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=Q(s)} U(s)\,, \quad Y(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=R(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix}}_{=W(s)} . \;\square$$

6.2. Definiții

Din forma ecuațiilor (6.1), (6.2) rezultă că reprezentarea polinomială este o generalizare a reprezentării de stare. Într-adevăr, trecând la transformate Laplace în (2.1), (2.2), pentru condiții inițiale nule, se obține:

$$(I_n s - A)X(s) = BU(s)\,, \tag{6.6}$$

$$Y(s) = C\,X(s) + D(s)U(s)\,. \tag{6.7}$$

Aceasta este o reprezentare polinomială de tipul (6.3), (6.4) cu particularizările: $W(s) = X(s),\, r = n$, $P(s) = I_n s - A,\; Q(s) = B,\; R(s) = C$ şi $V(s) = D(s)$.

Ținând seama de (4.1) cu (4.2), de (5.1) sau (5.2), şi de (6.3), (6.4) rezultă că transferul intrare – ieşire:

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{6.8}$$

poate fi concretizat de *matricea de transfer* respectiv sub următoarele forme:

$$G(s) = C(I_n s - A)^{-1} B + D(s)\,, \tag{6.9}$$

$$G(s) = N_R(s) D_R^{-1}(s) = D_L^{-1}(s) N_L(s)\,, \tag{6.10}$$

$$G(s) = R(s) P^{-1}(s) Q(s) + V(s)\,. \tag{6.11}$$

Pe de altă parte, este lesne de văzut că reprezentarea (6.3), (6.4) poate fi scrisă şi sub următoarea formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & V(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y(s) \end{bmatrix}, \quad T(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & V(s) \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

în care $T(s)$ se numeşte *matricea de sistem* a reprezentării polinomiale.

În mod similar, se procedează şi pentru reprezentarea de stare (6.6), (6.7):

$$\begin{bmatrix} I_n s - A & -B \\ C & D(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y(s) \end{bmatrix}, \quad T(s) \triangleq \begin{bmatrix} I_n s - A & -B \\ C & D(s) \end{bmatrix}. \qquad (6.13)$$

6.3. Transformări echivalente

Definiția 6.1

Două matrice de sistem, de dimensiuni $(r+p)\times(r+m)$,

$$T(s) = \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & V(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{P}(s) & -\tilde{Q}(s) \\ \tilde{R}(s) & \tilde{V}(s) \end{bmatrix}, \qquad (6.14)$$

se numesc *echivalente în sens strict* dacă există matricele polinomiale $M(s), N(s), K(s), L(s)$, cu $M(s)$ şi $N(s)$ unimodulare (v. Anexa B.1) de ordinul r, astfel încât are loc *transformarea de echivalență în sens strict*:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(s) & -\tilde{Q}(s) \\ \tilde{R}(s) & \tilde{V}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ K(s) & I_p \end{bmatrix}}_{=M_K(s)}\begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & V(s) \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} N(s) & L(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}}_{=N_L(s)}. \ \square \qquad (6.15)$$

Evident, $M_K(s), N_L(s)$ fiind de asemenea unimodulare, (6.15) constă din operații elementare pe linii şi pe coloane. Acest fapt conduce la următorul rezultat.

Teorema 6.1, [141]

Orice matrice de sistem (6.12) poate fi transformată prin echivalență în sens strict într-o matrice de sistem (6.13), bazată pe reprezentarea de stare. □

Exemplul 6.2

Se consideră matricea de sistem:

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s+1 & s^3 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Să se aducă $T(s)$ la o formă bazată pe reprezentarea de stare.

(a) În $T(s)$ se înmulțeşte linia 2 cu $s^2 - s + 1$ şi se scade din linia 1. Rezultă:

$$T_a(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & -1 & -(s^2-s+1) \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(b) Se înmulţeşte coloana 1 din T_a cu $s-2$ şi se adună la coloana 3. Rezultă:

$$T_b(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & -1 & -3 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -(s-2) \end{array}\right].$$

Aceasta este matricea de sistem a reprezentării de stare. □

Definiția 6.1 şi Teorema 6.1 conduc la extinderea noțiunii de *valoare proprie* (v. paragraful 2.2.a) la cazul reprezentării polinomiale după cum urmează.

Definiția 6.2

Valorile proprii ale sistemului (6.3), (6.4) sunt zerourile polinomului monic:

$$d(s) \triangleq \det P(s)\,. \tag{6.16}$$

$d(s)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al sistemului (6.3), (6.4). □

Teorema 6.2

Două matrice de sistem echivalente în sens strict au acelaşi polinom caracteristic (exceptând factorul $k=\det M(s)\det N(s)=\text{constant}$ introdus de (6.15)) şi au aceeaşi matrice de transfer (implicit, acelaşi polinom al polilor şi acelaşi polinom al zerourilor de transmisie).

$\mathscr{D}$. Efectuând calculele în (6.15) se obțin:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(s) & -\tilde{Q}(s) \\ \tilde{R}(s) & \tilde{V}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M(s)P(s)N(s) & -M(s)[Q(s)-P(s)L(s)] \\ [K(s)P(s)+R(s)]N(s) & [K(s)P(s)+R(s)]L(s)-K(S)Q(s)+V(s) \end{bmatrix},$$

$$\det \tilde{P}(s)=\det M(s)P(s)N(s)=\det M(s)\det N(s)\det P(s)=k\,d(s)\,.$$

Utilizând formula (6.11) se pot scrie în mod succesiv următoarele egalități:

$$\tilde{G}(s)=\tilde{R}(s)\tilde{P}^{-1}(s)\tilde{Q}(s)+\tilde{V}(s)=$$

$$=\left[K(s)P(s)+R(s)\right]N(s)\left[M(s)P(s)N(s)\right]^{-1}M(s)\left[Q(s)-P(s)L(s)\right]+$$

$$+\left[K(s)P(s)+R(s)\right]L(s)-K(s)Q(s)+V(s)=$$
$$=\left[K(s)P(s)+R(s)\right]P^{-1}(s)\left[Q(s)-P(s)L(s)\right]+K(s)\left[P(s)L(s)-Q(s)\right]+$$
$$+R(s)L(s)+V(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+V(s)=G(s).\square$$

6.4. Poli şi zerouri de decuplare

a. Poli

Polinomul polilor, $p(s)$, al sistemului (6.3), (6.4) se determină pe baza matricei de transfer (6.11) folosind Teoremele 4.2 sau 4.5.

Ţinând seama de relaţia (3.35), rezultă că pe baza cunoaşterii mulţimilor valorilor proprii, $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}$, şi a polilor, $\mathcal{P}$, se poate determina mulţimea zerourilor de decuplare, $\mathcal{Z}^0$, şi respectiv $z^0(s)$ – polinomul zerourilor de decuplare:

$$\mathcal{Z}^0=\mathcal{V}_{\mathrm{p}}\setminus\mathcal{P}\subseteq\mathcal{V}_{\mathrm{p}}, \tag{6.17}$$

$$z^0(s)=d(s)/p(s). \tag{6.18}$$

Caracterizarea zerourilor de decuplare de la 3.3 şi noţiunea de matrice de sistem conduc la o nouă abordare a determinării zerourilor de decuplare.

b. Zerouri de decuplare la intrare

Teorema 6.3

Mulţimea $\mathcal{Z}^0_{\mathrm{int}}$, a zerourilor de decuplare la intrare ale sistemului (2.1), (2.2), este identică cu mulţimea zerourilor matricei:

$$T_u(s)\triangleq\left[I_n s-A \mid -B\right]. \tag{6.19}$$

$\mathcal{D}$. Conform secţiuni 3.3, rezultă că pentru $s=\zeta$ – un zero de decuplare la intrare – există o matrice linie w (o linie din $W=V^{-1}$, v. Secţiunea 2.3) astfel încât:

$$\begin{cases} w(I_n\zeta-A)=0 \\ wB \qquad\quad =0. \end{cases} \tag{6.20}$$

Din (6.20) (cu a doua ecuaţie înmulţită cu -1) rezultă ecuaţia:

$$w\left[I_n\,\zeta-A \mid -B\right]=0.$$

Această ecuație are o soluție $w \neq 0$ dacă şi numai dacă:

$$\text{rang}\left[I_n \zeta - A \;\vdots\; -B \right] < n \;.$$

Întrucât $\text{nrang}\, T_u(s) = n$, rezultă că ζ este un zero al matricei $T_u(s)$. □

Conform Teoremelor 6.2 şi 6.3 se poate demonstra şi următorul rezultat.

Teorema 6.4

Mulțimea $\mathcal{Z}_{\text{int}}^{0}$, a zerourilor de decuplare la intrare ale sistemului (6.3), (6.4), este identică cu mulțimea zerourilor matricei:

$$T_u(s) \triangleq \left[P(s) \;\vdots\; -Q(s) \right]. \;\square \tag{6.21}$$

c. Zerouri de decuplare la ieşire

Teorema 6.5

Mulțimea $\mathcal{Z}_{\text{ies}}^{0}$, a zerourilor de decuplare la ieşire ale sistemului (2.1), (2.2), este identică cu mulțimea zerourilor matricei:

$$T_y(s) = \begin{bmatrix} I_n s - A \\ \text{------} \\ C \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

$\mathscr{D}$. Se ştie de la 3.3 că pentru $s = \zeta$ – un zero de decuplare la ieşire – există un vector propriu v (o coloană a matricei V, v. secțiunea 2.3) astfel încât:

$$\begin{cases} (I_n \zeta - A) v = 0 \\ C v \qquad\quad = 0. \end{cases} \tag{6.23}$$

Din (6.23) rezultă ecuația:

$$\left[(I_n \, \zeta - A)^T \;\vdots\; C^T \right]^T v = 0 \,,$$

care are o soluție $v \neq 0$ dacă şi numai dacă:

$$\text{rang}\left[(I_n \zeta - A)^T \;\vdots\; C^T \right]^T < n \,.$$

Întrucât $\text{nrang}\, T_y(s) = n$, rezultă că ζ este un zero al matricei $T_y(s)$. □

Folosind Teoremele 6.2 şi 6.5 se obține şi următorul rezultat.

Teorema 6.6

Mulțimea $\mathcal{Z}_{\text{ies}}^{0}$, a zerourilor de decuplare la ieşire ale sistemului (6.3), (6.4), este identică cu mulțimea zerourilor matricei:

$$T_y(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ \hline R(s) \end{bmatrix}. \ \square \tag{6.24}$$

d. Proprietăți de invarianță la transformări echivalente în sens strict

Teorema 6.7

Zerourile de decuplare la intrare şi zerourile de decuplare la ieşire sunt invariante în raport cu transformările de echivalență în sens strict de forma (6.15).

$\mathcal{D}$. Folosind (6.15) se scrie în mod succesiv:

$$\tilde{T}_u(s) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{P}(s) & -\tilde{Q}(s) \end{bmatrix} = M(s) \underbrace{\begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \end{bmatrix}}_{T_u(s),\text{v. (6.23)}} \begin{bmatrix} N(s) & L(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$= M(s) T_u(s) \begin{bmatrix} N(s) & L(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}_y(s) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{P}(s) \\ \tilde{R}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ K(s) & I_p \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix}}_{\substack{T_y(s), \\ \text{v. (6.24)}}} N(s) = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ K(s) & I_p \end{bmatrix} T_y(s) N(s).$$

Din $\operatorname{nrang} \tilde{T}_u(s) = \operatorname{nrang} T_u(s)$ cu Teorema 6.4 şi $\operatorname{nrang} \tilde{T}_y(s) = \operatorname{nrang} T_y(s)$ cu Teorema 6.6 rezultă că demonstrația este încheiată. □

e. Reprezentări polinomiale ireductibile

Prin analogie cu Definiția 5.1 se poate introduce următoarea noțiune.

Definiția 6.3

A. Reprezentarea polinomială (6.3), (6.4) se numeşte *ireductibilă* dacă $R(s)$, $P(s)$ sunt relativ prime la dreapta şi $P(s)$, $Q(s)$ sunt relativ prime la stânga.

B. În caz contrar reprezentarea se numeşte *reductibilă*. □

În cazul unei reprezentări polinomiale reductibile, este posibil să se scrie:

$$P(s) = \hat{P}_R(s)W_R(s), \quad R(s) = \hat{R}(s)W_R(s)\,, \tag{6.25}$$

$$P(s) = W_L(s)\hat{P}_L(s), \quad Q(s) = W_L(s)\hat{Q}(s)\,, \tag{6.26}$$

în care $W_R(s)$, $W_L(s)$ sunt c.m.m.d.c., matrice pătratice non-unimodulare, la dreapta pentru $R(s)$, $P(s)$ şi respectiv la stânga pentru $P(s)$, $Q(s)$.

Înlocuind succesiv (6.25) şi (6.26) în matricea de transfer (6.11), $W_R(s)$ şi respectiv $W_L(s)$ se simplifică. Prin simplificarea divizorilor comuni rezultă reprezentări de ordin mai mic. În aplicații simplificarea este implicită în calculele din (6.11). Se explică astfel lipsa zerourilor de decuplare din matricea de transfer.

Făcând legătura cu Teoremele 6.4 şi 6.6 se poate obține următorul rezultat.

Teorema 6.8

Polinoamele zerourilor de decuplare la intrare şi la ieşire sunt respectiv:

$$z^0_{\text{int}}(s) \triangleq \det W_L(s)\,, \tag{6.27}$$

$$z^0_{\text{ies}}(s) \triangleq \det W_R(s)\,. \tag{6.28}$$

$\mathscr{D}$. Se înlocuiesc (6.25) şi (6.26) în (6.21) şi respectiv (6.24), se evaluează rangurile matricelor $T_u(s)$ şi $T_y(s)$, din care rezultă respectiv (6.27) şi (6.28). □

f. Zerouri de decuplare la intrare – ieşire

În general, pentru determinarea mulțimii zerourilor de decuplare la intrare – ieşire, $\mathcal{Z}^0_{\text{int-ies}}$, se pot folosi relațiile (3.26) şi (6.17), din care rezultă:

$$\mathcal{Z}^0_{\text{int-ies}} = (\mathcal{Z}^0_{\text{int}} \cup \mathcal{Z}^0_{\text{ies}}) \setminus \mathcal{Z}^0 = (\mathcal{Z}^0_{\text{int}} \cup \mathcal{Z}^0_{\text{ies}}) \setminus (\mathcal{V}_{\text{p}} \setminus \mathcal{P})\,. \tag{6.29}$$

Exemplul 6.3

Se consideră următoarea matrice de sistem:

$$T(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} s+3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s^2(s+1) & s(s+2) & -s \\ 0 & 0 & s+2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc} & T_u(s) & & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & -s \\ T_y(s) & 1 \\ & 0 \end{array}\right].$$

Să se determine mulțimile zerourilor de decuplare ale sistemului.

Are loc $\mathrm{nrang}T_u(s) = 3$. Minorii de ordin maxim sunt: $s^2(s+1)(s+2)(s+3)$, $s^2(s+1)(s+3)$, $2s(s+2)(s+3)$, $s^2(s+1)(s+2)$. Polinomul zerourilor de decuplare la intrare este c.m.m.d.c. monic: $z^0_{\mathrm{int}}(s) = s$. Urmează că $\mathcal{Z}^0_{\mathrm{int}} = \{0\}$.

Similar, $\mathrm{nrang}T_y(s) = 3$. Minorii de ordin maxim sunt: $s^2(s+1)(s+2)(s+3)$, $-s^2(s+1)(s+3)$, $s^2(s+1)(s+2)$. Polinomul zerourilor de decuplare la ieşire este c.m.m.d.c. monic: $z^0_{\mathrm{ies}}(s) = s^2(s+1)$. Urmează că $\mathcal{Z}^0_{\mathrm{ies}} = \{0, 0, -1\}$.

Polinomul caracteristic are expresia $d(s) = s^2(s+1)(s+2)(s+3)$ şi mulțimea valorilor proprii este $\mathcal{V}_{\mathrm{p}} = \{0, 0, -1, -2, -3\}$.

Pe de altă parte, calculând funcția de transfer se obține:

$$G(s) = R(s)P^{-1}(s)Q(s) + V(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

Polinomul şi mulțimea polilor sunt $p(s) = (s+2)(s+3)$ şi respectiv $\mathcal{P} = \{-2, -3\}$. Urmează că polinomul şi mulțimea zerourilor de decuplare sunt $z^0(s) = d(s) \setminus p(s) = s^2(s+1)$ şi respectiv $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{V}_{\mathrm{p}} \setminus \mathcal{P} = \{0, 0, -1\}$. Polinomul şi mulțimea zerourilor de decuplare la intrare – ieşire se obțin după cum urmează $z^0_{\mathrm{int-ies}}(s) = [z^0_{\mathrm{int}}(s) z^0_{\mathrm{ies}}(s)]/z^0(s) = s$ şi respectiv $\mathcal{Z}^0_{\text{int-ies}} = [\mathcal{Z}^0_{\mathrm{int}} \cup \mathcal{Z}^0_{\mathrm{ies}}] \setminus \mathcal{Z}^0 = \{0\}$. □

6.5. Zerourile matricei de sistem

Zerourile matricei de sistem $T(s)$ sunt acei $z \in \mathbb{C}$ pentru care

$\mathrm{rang}\, G(z) < \mathrm{nrang}\, G(s) \le \min(r+m, r+p)$.

Polinomul zerourilor matricei de sistem este egal cu produsul factorilor invarianți ai formei Smith a matricei de sistem. Prin urmare, el coincide cu c.m.m.d.c. al tuturor minorilor de ordin maxim ai matricei de sistem.

Mulțimea $\mathcal{Z}_T$ a zerourilor matricei de sistem, $T(s)$, este constituită din mulțimile $\mathcal{Z}$ – a zerourilor de transmisie, $\mathcal{Z}^0_{\mathrm{ies}}$ – de decuplare la ieşire, şi $\mathcal{Z}^0_{\mathrm{ies} \setminus \mathrm{int}}$ – de decuplare la intrare care nu sunt şi de decuplare la ieşire, [90], [144]. Acest fapt permite să se scrie:

$$\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^0_{\text{ies}} \cup \mathcal{Z}^0_{\text{ies}\setminus\text{int}}, \quad \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_T \subseteq \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^0 .$$

Zerourile matricei de sistem au proprietatea că sunt *invariante* în raport cu *reacția după stare / ieşire*. Se va demonstra acest fapt pentru sistemul (2.1), (2.2), cu $D \equiv 0$, $p = m$.

Fie sistemul descris de ecuațiile:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{6.30}$$

$$y = Cx, \ y \in \mathbb{R}^m . \tag{6.31}$$

Acestuia i se adaugă o reacție fie după stare, fie după ieşire, având formele:

$$u = -Kx + v, \tag{6.32}$$

$$u = -Ly + v, \tag{6.33}$$

în care $v \in \mathbb{R}^m$ este noua mărime de intrare a sistemului.

Cele trei matrice de sistem au următoarele expresii:

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right], T_K(s) = \left[\begin{array}{c|c} I_n s - (A - BK) & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right], T_L(s) = \left[\begin{array}{c|c} I_n s - (A - BLC) & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right].$$

Teorema 6.9

Pentru sistemul (6.30), (6.31) mulțimea zerourilor de sistem este invariantă în raport respectiv cu reacțiile după stare (6.32) şi după ieşire (6.33).

$\mathscr{D}$. Pentru $m = p$ zerourile invariante sunt zerourile polinomului $\det T(s)$.

Prin operații elementare se scriu în mod succesiv:

$$\det T_K(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - (A - BK) & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -K & I_m \end{array}\right] =$$

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -K & I_m \end{array}\right] = \det T(s)$$

$$\det T_L(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - (A - BLC) & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -LC & I_m \end{array}\right] =$$

$$= \det\left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \det\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -LC & I_m \end{array}\right] = \det T(s) .$$

Aceasta înseamnă că zerourile matricei de sistem sunt invariante în raport cu reacția după stare şi respectiv cu reacția după ieşire. □

Pentru sistemul (6.30), (6.31) zerourile matricei de sistem, numite şi *zerourile invariante*, pot fi determinate şi în felul următor, [124].

Pentru B şi respectiv C se determină matricele:

- M – $(n-m)\times n$, cu linii liniar independente, pentru care $M\,B = 0$;
- N – $n\times(n-m)$, cu coloane liniar independente, pentru care $C\,N = 0$.

Cu M şi N, numite *matrice anulatoare la stânga* şi respectiv *la dreapta*, se calculează $(M\,N)^{-1}M\,A\,N$, ale cărei valori proprii sunt zerourile invariante.

Exemplul 6.4

Pentru sistemul de la Exemplul 3.2 să se determine zerourile invariante.

Pentru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se aleg matricele anulatoare

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şi se obține:

$$(M\,N)^{-1} M\,A\,N = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 .$$

Întrucât $\mathcal{Z}^0 = \varnothing$ şi $m = p = 3$, urmează că $\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z} = \{7\}$. La Exemplul 3.2 s-a arătat că $z = 7$ este unicul zero de transmisie al sistemului. □

Capitolul II
CONTROLABILITATEA ŞI OBSERVABILITATEA SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

1. Analiza bazată pe reprezentarea de stare

Noțiunile şi rezultatele prezentate în subcapitolul I.3 evidențiază, într-o manieră directă, faptul că polii şi zerourile unui sistem dinamic liniar constant influențează cantitativ şi calitativ transferul intrare – stare – ieşire.

Forme bine precizate ale acestei influențe, corelate cu stimularea prin mărimea de intrare, constituie simptomatologia de bază a evoluției tripletului $(u(t),\, x(t),\, y(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}_+$. Pe acest temei poate fi caracterizat sistemul, structural şi parametric, ca suport al transferului intrare – stare – ieşire.

Pentru analiza proprietăților structurale de *controlabilitate a stării* şi de *observabilitate a stării* se are în vedere modelul matematic intrare – stare – ieşire liniar şi invariant în timp:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

$$y = Cx + D(\cdot)u, \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{1.2}$$

cu starea inițială:

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Pentru o mărime de intrare $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, continuă pe porțiuni şi având cel mult o mulțime numărabilă de discontinuități de prima speță, soluția problemei Cauchy (1.1), (1.3) are expresia (v. relația (1.80)):

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Din (1.4) şi (1.2) rezultă că matricele $A, B, C, D(\cdot)$ (polii şi zerourile sistemului) determină cantitativ şi calitativ transferul intrare – stare – ieşire al sistemului. Aceasta are loc în contextul acțiunii intrării $u(t)$, iar evoluția stării (1.4) şi ieşirii (1.2) reflectă, prin evoluții caracteristice, însăşi structura sistemului.

În acest context se vor avea în vedere acele evoluții caracteristice care sunt legate de aprecierea apriorică a informației necesare pentru:

(a) Sinteza mărimii de intrare $u(t)$ care transferă starea $x(t)$, în timp finit, între orice stare inițială nulă şi orice stare finală finită.

(b) Determinarea stării inițiale x_0, oricare ar fi aceasta, cunoscându-se mărimea de intrare $u(t)$ şi mărimea de ieşire $y(t)$ peste un interval finit de timp.

Aceste doua probleme se asociază cu proprietățile structurale de *controlabilitate a stării* (a) şi de *observabilitate a stării* (b), aflate într-o relație directă cu proprietăți ale perechilor (A, B) şi respectiv (C, A), sau cu zerourile de decuplare la intrare şi respectiv la ieşire.

1.1. Definiții şi caracterizări

a. Controlabilitatea stării*; *gradul de controlabilitate

Definiția 1.1

A. Un sistem dinamic se numeşte de *stare complet controlabilă* dacă pentru orice $t_f > 0$ şi orice $x_f \in \mathbb{R}^n$, finiți, există o mărime de intrare $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, t_f]$, care transferă $x(t)$ din orice stare inițială $x(0) = x_0$ în orice stare finală $x(t_f) = x_f \neq x_0$.

B. În caz contrar sistemul se numeşte, după situație, de *stare incomplet controlabilă* sau de *stare necontrolabilă*. □

Matematic, Definiția 1.1 se referă la existența unei soluții $u(t)$, $t \in [0, t_f]$, a ecuației integrale (1.4). De exemplu, pentru $x_0 = 0$, $t = t_f$, $x(t_f) = x_f$, de forma:

$$x_f = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \theta)} B u(\theta) d\theta . \tag{1.5}$$

Fenomenologic însă, este vorba de proprietatea sistemului (1.1) de a putea fi comandat *punctual* pornind din starea inițială $x_0 = 0$ până la orice stare finală x_f, pe o traiectorie oarecare între acestea. Evident, pot exista o infinitate de traiectorii între $x_0 = 0$ şi x_f . Sub aspectul *controlabilităţii*, traiectoria cea mai semnificativă este cea parcursă utilizând *energia* de comandă minimă (v. şi VI.1.1.d). Soluţia în acest sens a ecuaţiei (1.5) se bazează pe *matricea Gram*:

$$M(0, t_f) \triangleq \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\theta)} BB^T e^{A^T(t_f-\theta)} d\theta , \tag{1.6}$$

simetrică, construită pe considerente uşor intuibile pornind chiar de la integrala din (1.5). Dacă $M(0, t_f)$ este nesingulară, se verifică imediat că

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_f-t)} M^{-1}(0, t_f) x_f , \quad t \in [0, t_f] , \tag{1.7}$$

este o soluţie a ecuaţiei (1.5), adică o comandă conform Definiţiei 1.1.

Observaţia 1.1

Pentru fiecare pereche fixată $(t_f, x_f) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, energia comenzii (1.7), pentru transferul stării între $x_0 = 0$ şi $x_f \neq 0$, este minimă. Se scrie:

$$E_{\min}^{\text{con}}(t_f, x_f) = \int_0^{t_f} \| u(\theta) \|^2 d\theta = \int_0^{t_f} u^T(\theta) u(\theta) d\theta = x_f^T M^{-1}(0, t_f) x_f . \tag{1.8}$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $\tilde{u}(t) \neq u(t), \quad t \in [0, t_f],$ au loc:

$$x_f = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\theta)} B \tilde{u}(\theta) d\theta , \tag{1.9}$$

$$\int_0^{t_f} \| \tilde{u}(\theta) \|^2 d\theta > \int_0^{t_f} \| u(\theta) \|^2 d\theta . \tag{1.10}$$

Din relaţiile (1.5) şi (1.9) rezultă:

$$\int_0^{t_f} e^{A(t_f-\theta)} B \tilde{u}(\theta) d\theta = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\theta)} B u(\theta) d\theta . \tag{1.11}$$

Se multiplică (1.11), la stânga, cu $x_f^T M^{-1}(0, t_f)$. Folosind (1.7) rezultă:

$$\int_0^{t_f} u^T(\theta) \tilde{u}(\theta) d\theta = \int_0^{t_f} u^T(\theta) u(\theta) d\theta ,$$

$$\int_0^{t_f} \tilde{u}^T(\theta) u(\theta) d\theta = \int_0^{t_f} \| u(\theta) \|^2 d\theta . \tag{1.12}$$

Din $\int_0^{t_f} \|\tilde{u}(\theta)-u(\theta)\|^2 d\theta = \int_0^{t_f} [\tilde{u}(\theta)-u(\theta)]^T [\tilde{u}(\theta)-u(\theta)] d\theta > 0$ şi (1.12) rezultă:

$$\int_0^{t_f} \left[\|\tilde{u}(\theta)\|^2 + \|u(\theta)\|^2 - 2\tilde{u}^T(\theta)u(\theta)\right] d\theta = \int_0^{t_f} \left[\|\tilde{u}(\theta)\|^2 - \|u(\theta)\|^2\right] d\theta > 0 .$$

Din aceasta rezultă inegalitatea (1.10), adică energia comenzii (1.7) este minimă. □

Rezultatul următor arată modul în care controlabilitatea stării rezidă în proprietăţile matricelor $e^{At}B$, $M(0, t_f)$ şi ale perechii (A, B).

Teorema 1.1

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet controlabilă.

(ii) Matricea $M(0, t)$ este nesingulară pentru orice $t > 0$ fixat.

(iii) Matricea următoare este de rang n:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_n \triangleq [B,\ AB,\ A^2B, \ldots,\ A^{n-1}B] . \tag{1.13}$$

$\mathcal{D}$. $(i) \Rightarrow (ii)$. Se presupune că $M(0, t_f)$ este singulară pentru orice $t_f > 0$, finit. Atunci există un vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$, astfel încât:

$$\alpha^T M(0, t_f)\alpha = \int_0^{t_f} \left\| B^T e^{-A^T\theta} \alpha \right\|^2 d\theta = 0 , \tag{1.14}$$

din care rezultă:

$$B^T e^{-A^T t}\alpha = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1.15}$$

Pe de altă parte, sistemul fiind de stare complet controlabilă, există o mărime de intrare $u(t)$ care transferă $x(t)$ din $x(0) = x_0 \neq 0$ în $x(t_f) = x_f = 0$, ceea ce, în conformitate cu (1.4), înseamnă:

$$x_0 = -\int_0^{t_f} e^{-A\theta} B u(\theta) d\theta . \tag{1.16}$$

Făcând acum produsul $x_0^T\alpha$ din (1.15), (1.16) se obţine:

$$x_0^T\alpha = -\int_0^{t_f} u^T(\theta) \underbrace{B^T e^{-A^T\theta}\alpha}_{=0} d\theta = 0 .$$

Alegând $x_0 = \alpha$ rezultă că $\alpha = 0$, ceea ce contrazice faptul că $\alpha \neq 0$. Urmează că $M(0, t_f)$ este nesingulară.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Dacă $M(0, t_f)$ este nesingulară, atunci mărimea de intrare:

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} M^{-1}(0, t_f)\left[x(0) - e^{-A t_f} x(t_f)\right], \quad t \in [0, t_f], \qquad (1.17)$$

transferă starea sistemului din orice $x(0)$ în orice $x(t_f)$. Într-adevăr, înlocuind (1.17) în (1.4), cu $t_0 = 0$, afirmația precedentă se confirmă.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Se presupune că sistemul (1.1), (1.2) nu este de stare complet controlabilă, ceea ce implică faptul că matricea $M(0, t_f)$ este singulară, respectiv relația (1.15) cu $\alpha \neq 0$ este adevărată. Derivând repetat (1.15) în $t = 0$ se obține:

$$\alpha^T A^k B = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \qquad (1.18)$$

Acestea sunt echivalente cu:

$$\alpha^T \mathcal{C} = 0, \qquad (1.19)$$

ceea ce, având în vedere că $\text{rang}\,\mathcal{C} = n$, este absurd. Urmează că sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet controlabilă.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Se presupune că $\text{rang}\,\mathcal{C} < n$. Urmează că există $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$, astfel încât are loc (1.19), respectiv are loc (1.18). Se amplifică (I.2.16) la stânga cu α^T şi la dreapta B. Cu (1.18) se obține (1.15), iar aceasta implică valabilitatea relației (1.14). Întrucât completa controlabilitate a stării este echivalentă cu nesingularitatea matricei $M(0, t_f)$ (s-a demonstrat deja $(i) \Leftrightarrow (ii)$), din (1.14) rezultă $\alpha = 0$. Aceasta contrazice faptul că $\alpha \neq 0$. Urmează că $\text{rang}\,\mathcal{C} = n$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Rezultă în mod evident, din demonstrațiile precedente. □

Observația 1.2

Condiția (*iii*), fiind independentă de timp – spre deosebire de (*ii*), reflectă natura structural – algebrică a controlabilității stării. Acest fapt rezultă din forma matricei $\mathcal{C}$, definită prin (1.13) şi numită *matricea de controlabilitate a stării*. Ea evidențiază dependența controlabilității stării de perechea (A, B) şi în acest sens se vorbeşte despre *controlabilitatea perechii* (A, B). Alte detalii se prezintă în paragraful 1.1.d şi în secțiunea 1.3. □

Matricea $\mathcal{C}$, din cele mn coloane, are cel mult n coloane liniar independente (v. Anexa A). Aceasta înseamnă că în evaluarea rangului se poate folosi un număr mai mic de coloane aşa cum se arată în următoarele două teoreme.

Teorema 1.2

Sistemul (1.1), (1.2), cu $\operatorname{rang} B = m$, este de stare complet controlabilă dacă şi numai dacă următoarea matrice este de rang n:

$$\mathcal{C}_{n-m+1} = [B,\ AB,\ A^2B, \ldots,\ A^{n-m}B]\,. \ \square \tag{1.20}$$

Teorema 1.3

Dacă sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet controlabilă, atunci există un cel mai mic număr natural μ astfel încât:

$$\operatorname{rang} \mathcal{C}_\mu = [B,\ AB,\ A^2B, \ldots,\ A^{\mu-1}B] = n\,. \ \square \tag{1.21}$$

Observația 1.3

Numărul μ se numeşte *indicele de controlabilitate*. Pentru $\operatorname{rang} B = m$ şi $1 \le m \le n$, numărul natural μ satisface condiția $n/m \le \mu \le \min(n-m+1,\ \eta)$, în care η este gradul polinomului minimal al matricei A. $\square$

Matricea simetrică $M(0,\,t)$, numită *gramianul de controlabilitate*, defineşte energia minimă $E_{\min}^{\text{con}}(t,x)$ conform Observației 1.1. Cu $t > 0$ final fixat şi x final pe hipersfera $\|x\| = 1$ din $\mathbb{R}^n$ ($\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ este norma euclideană, v. Anexa A), energia minimă depinde de poziția lui x situat pe $\|x\| = 1$.

În condițiile Teoremei 1.1, $M(0,\,t)$ este pozitiv definită (v. Anexa C). Cu $t > 0$ fixat, fie valorile proprii ale matricei $M(0,\,t)$:

$$\sigma_1(t) \ge \sigma_2(t) \ge \ldots \ge \sigma_n(t) > 0\,.$$

Corespunzător acestor valori proprii, fie $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,n$, vectorii proprii ortonormați ($\|x^i\| = 1$ şi $(x^i)^T x^j = 0$, $i \ne j$, $i,j = \overline{1,n}$) ai matricei $M(0,\,t)$. Pentru $x = x^i$, conform cu (1.8), se scrie:

$$E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i) = (x^i)^T M^{-1}(0,t) x^i = (x^i)^T \sigma_i^{-1}(t) x^i = \sigma_i^{-1}(t),\ \ i = 1,2,\ldots,n\,. \tag{1.22}$$

De fapt, $\sigma_i^{-1}(t), i=1,2,...,n,$ sunt semiaxele respectiv pe direcțiile $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,2,...,n$, ale *hiperelipsoidului energiei*. Pentru fiecare x de pe hipersfera $\|x\|=1$, consumul minim de energie $E_{\min}^{\text{con}}(t,x)$ este lungimea razei vectoare a punctului de pe hiperelipsoidul energiei aferent lui x. $\min_i E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i)=E_{\min}^{\text{con}}(t,x^1)=\sigma_1^{-1}(t)$ şi $\max_i E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i)=E_{\min}^{\text{con}}(t,x^n)=\sigma_n^{-1}(t)\geq\sigma_1^{-1}(t)$ sunt energiile minimă şi maximă ale stărilor finale x^1 şi respectiv x^n. Ele ilustrează concludent *anizotropia spațiului stărilor*, sub aspectul controlabilității. Cazul $n=2$ este prezentat în fig. II.1.1.

Observația 1.4

Utilizând (1.8), *calitatea controlabilității complete* a stării se apreciază prin:

- *energia minimă pe direcția de consum de energie maxim*:

$$E_{\min\max}^{\text{con}}(t)=\max_{\|x\|=1}E_{\min}^{\text{con}}(t,x)=\max_i E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i)=1/\sigma_n(t)\,; \quad (1.23)$$

- *gradul de controlabilitate* (raportul dintre consumurile *minim* şi *maxim*):

$$g^{\text{con}}(t)\triangleq\frac{E_{\min\min}^{\text{con}}(t)}{E_{\min\max}^{\text{con}}(t)}=\frac{\min_{\|x\|=1}E_{\min}^{\text{con}}(t,x)}{\max_{\|x\|=1}E_{\min}^{\text{con}}(t,x)}=\frac{\min_i E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i)}{\max_i E_{\min}^{\text{con}}(t,x^i)}=\frac{\sigma_n(t)}{\sigma_1(t)}\in(0,1]\,.(1.24)$$

Evident, este de dorit un consum de energie $E_{\min\max}^{\text{con}}(t)$, pe direcția de consum maxim, acceptabil de mic ($\sigma_n(t)$ relativ mare) şi un grad de controlabilitate apropiat de 1: $g^{\text{con}}(t)\simeq 1$ ($\sigma_1(t)\simeq\sigma_n(t)$, spațiul stărilor să fie aproape *izotrop*). Acestea arată că sistemul este complet controlabil, relativ uşor şi aproape uniform în toate direcțiile spațiului stărilor. □

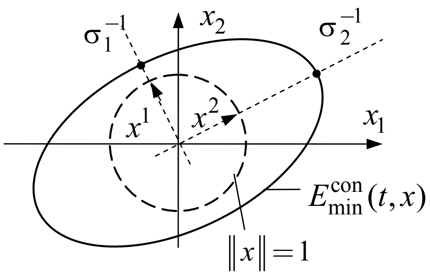

Fig. II.1.1. Elipsa energiei $E_{\min}^{\text{con}}(t,x)$

Controlabilitatea stării este o proprietate *intrinsecă*. Pentru a demonstra acest fapt fie transformarea liniară nesingulară de stare (de similitudine):

$$\tilde{x}=Sx,\;\; x=S^{-1}\tilde{x}\,. \quad (1.25)$$

Cu aceasta sistemul (1.1), (1.2) se transformă în *sistemul echivalent*:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.26}$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}(\cdot)u, \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{1.27}$$

$$\tilde{A} \triangleq SAS^{-1}, \tilde{B} \triangleq SB, \tilde{C} \triangleq CS^{-1}, \tilde{D}(\cdot) \triangleq D(\cdot). \tag{1.28}$$

Teorema 1.4

Controlabilitatea stării este invariantă în raport cu transformarea (1.25).

$\mathscr{D}$. Pentru $\tilde{\mathcal{C}}$ (v. (1.13)) al sistemului (1.26), (1.27), cu (1.28), se scrie:

$$\operatorname{rang}\tilde{\mathcal{C}} = \operatorname{rang}[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, ..., \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = \operatorname{rang} S\mathcal{C} = \operatorname{rang}\mathcal{C}. \ \square \tag{1.29}$$

b. Observabilitatea stării; gradul de observabilitate

Definiția 1.2

A. Un sistem dinamic se numeşte de *stare complet observabilă* dacă pe baza cunoaşterii mărimilor de intrare $u(t)$ şi de ieşire $y(t)$ peste un interval finit de timp $[0, t_f]$, $t_f > 0$, se poate determina starea inițială $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ oricare ar fi aceasta.

B. În caz contrar sistemul se numeşte, după situație, de *stare incomplet observabilă* sau de stare *neobservabilă*. □

Fără reducerea generalității, situația cea mai simplă de determinare a lui x_0 din (1.4), (1.2) este

$$u(t) \equiv 0, t \in [0, t_f], \tag{1.30}$$

ceea ce, din (1.4) şi (1.2), conduce la următoarea evoluție:

$$y(t) = Ce^{At}x_0, \ t \in [0, t_f]. \tag{1.31}$$

În termenii Definiției 1.2, se pune problema posibilității determinării stării inițiale x_0. Fiind vorba însă de cunoaşterea ieşirii $y(t)$ peste intervalul $[0, t_f]$, soluția se bazează pe *matricea Gram*:

$$N(0, t_f) \triangleq \int_0^{t_f} e^{A^T(t_f-\theta)}C^T C e^{A(t_f-\theta)} d\theta, \tag{1.32}$$

construită pentru a fi utilizată în următoarele operații. Se multiplică (1.31) la stânga cu $e^{A^T t}C^T$, se integrează pe $[0, t_f]$ şi apoi se ține seama de (1.32). Se obține:

$$N(0,\, t_f)\,x_0 = \int_0^{t_f} e^{A^T\theta} C^T y(\theta)\, d\theta \tag{1.33}$$

deoarece s-a avut în vedere că

$$\int_0^{t_f} e^{A^T\theta} C^T C e^{A\theta} d\theta = \int_0^{t_f} e^{A^T(t_f-\theta)} C^T C e^{A(t_f-\theta)} d\theta = N(0,t_f)\,.$$

Dacă $N(0,\, t_f)$ este nesingulară, din (1.33) se obține soluția căutată:

$$x_0 = N^{-1}(0,\, t_f) \int_0^{t_f} e^{A^T\theta} C^T y(\theta)\, d\theta\,. \tag{1.34}$$

Comparând $M(0,\, t_f)$ (relația (1.6)) cu $N(0,\, t_f)$ (relația (1.32)) se constată că înlocuind A cu A^T şi B cu C^T se transformă $M(0,\, t_f)$ în $N(0,\, t_f)$ şi invers. Proprietățile de controlabilitate şi observabilitate a stării se numesc *duale* şi orice rezultat de controlabilitate este valabil, *mutatis mutandis*, pentru observabilitate şi invers. În acest sens, prin *dualitate*, din Teorema 1.1 se obține rezultatul următor.

Teorema 1.5

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(*i*) Sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet observabilă.

(*ii*) Matricea $N(0,\, t)$ este nesingulară pentru orice $t > 0$ fixat.

(*iii*) Matricea următoare este de rang n:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n \triangleq \left[C^T,\, A^T C^T,\, (A^T)^2 C^T, \ldots, (A^T)^{n-1} C^T\right]^T. \ \square \tag{1.35}$$

Observația 1.5

Condiția (*iii*), fiind independentă de timp – spre deosebire de (*ii*), reflectă natura structural – algebrică a observabilității stării. Acest fapt rezultă din forma matricei $\mathcal{O}$, definită prin (1.35) şi numită *matricea de observabilitate a stării*. Ea evidențiază dependența observabilității stării de perechea $(C,\, A)$ şi în acest sens se vorbeşte despre *observabilitatea perechii* $(C,\, A)$. Alte detalii se prezintă în paragraful 1.1.d şi în secțiunea 1.3. □

Matricea $\mathcal{O}$, din cele np lini, are cel mult n linii liniar independente (v. Anexa A). Aceasta înseamnă că în evaluarea rangului ei se poate opera şi cu un număr mai mic de linii aşa cum se arată în următoarele două teoreme.

Teorema 1.6

Sistemul (1.1), (1.2), cu $\operatorname{rang} C = p$, este de stare complet observabilă dacă şi numai dacă următoarea matrice este de rang n:

$$\mathcal{O}_{n-p+1} = \left[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \ldots, (A^T)^{n-p} C^T\right]^T. \square \tag{1.36}$$

Teorema 1.7

Dacă sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet observabilă, atunci există un cel mai mic număr natural ν astfel încât:

$$\operatorname{rang} \mathcal{O}_\nu = \left[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \ldots, (A^T)^{\nu-1} C^T\right]^T = n. \square \tag{1.37}$$

Observația 1.6

ν este *indicele de observabilitate*. Pentru $\operatorname{rang} C = p$ şi $1 \le m \le n$, are loc $n/p \le \nu \le \min(n - p + 1, \eta)$, η fiind gradul polinomului minimal al lui A. $\square$

Observația 1.7

În virtutea dualității, sistemului (1.1), (1.2) i se asociază *sistemul dual*:

$$\dot{x}_* = A^T x_* + C^T u_*, \quad t \in \mathbb{R}_+, x_* \in \mathbb{R}^n, u_* \in \mathbb{R}^p, \tag{1.38}$$

$$y_* = B^T x_* + D^T(\cdot) u_*, \quad y_* \in \mathbb{R}^m. \tag{1.39}$$

Ținând seama de (1.6) şi (1.32), pentru sistemul dual se definesc:

$$M_*(0, t) \triangleq \int_0^t e^{A^T (t-\theta)} C^T C e^{A(t-\theta)} d\theta = N(0, t), \tag{1.40}$$

$$N_*(0, t) \triangleq \int_0^t e^{A (t-\theta)} B B^T e^{A^T (t-\theta)} d\theta = M(0, t), \tag{1.41}$$

ceea ce, conform Teoremelor 1.1 şi 1.5, conduce la următorul rezultat. $\square$

Teorema 1.8

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet controlabilă / observabilă dacă şi numai dacă dualul său (1.38), (1.39) este de stare complet observabilă / controlabilă. $\square$

Observația 1.8

În virtutea acestui rezultat, pentru $t > 0$ final fixat, *calitatea observabilității complete* a stării se apreciază prin calitatea controlabilității complete a stării dualului respectiv prin:

- *energia minimă pentru direcția de consum maxim* (a sistemului dual):

$$E_{\min\max}^{\text{obs}}(t) = E_{*\min\max}^{\text{con}}(t) = \max_i E_{*\min}^{\text{con}}(t, x^i) = 1/\zeta_n(t), \qquad (1.42)$$

în care

$$\zeta_1(t) \geq \zeta_2(t) \geq \ldots \geq \zeta_n(t) > 0$$

sunt valorile proprii ale *gramianului de observabilitate* $N(0, t)$, respectiv *gramianului de controlabilitate dual* $M_*(0, t)$;

- *gradul de observabilitate* (raportul dintre consumurile *minim* și *maxim*):

$$g^{\text{obs}}(t) \triangleq \frac{E_{\min\min}^{\text{obs}}(t)}{E_{\min\max}^{\text{obs}}(t)} = \frac{E_{*\min\min}^{\text{con}}(t)}{E_{*\min\max}^{\text{con}}(t)} = \frac{\min_i E_{*\min}^{\text{con}}(t, x^i)}{\max_i E_{*\min}^{\text{con}}(t, x^i)} = \frac{\zeta_n(t)}{\zeta_1(t)} \in (0,1]. \quad (1.43)$$

Evident, referitor la sistemul dual, este de dorit un consum de energie $E_{\min\max}^{\text{obs}}(t)$ pe direcția de consum maxim, acceptabil de mic ($\zeta_n(t)$ relativ mare) și un grad de observabilitate apropiat de 1: $g^{\text{obs}}(t) \simeq 1$ ($\zeta_1(t) \simeq \zeta_n(t)$, adică spațiul stărilor să fie aproape *izotrop*). Acestea arată că sistemul este complet observabil, relativ ușor și aproape uniform, în toate direcțiile spațiului stărilor. □

Observabilitatea stării este o proprietate *intrinsecă*, așa cum se arată mai jos.

Teorema 1.9

Observabilitatea stării este *invariantă* în raport cu transformarea (1.25).

$\mathscr{D}$. Pentru $\tilde{\mathscr{O}}$ (v. (1.35)) al sistemului (1.26), (1.27), cu (1.28), se scrie:

$$\operatorname{rang}\tilde{\mathscr{O}} = \operatorname{rang}\left[\tilde{C}^T, \tilde{A}^T\tilde{C}^T, \ldots, (\tilde{A}^T)^{n-1}\tilde{C}^T\right]^T = \operatorname{rang}\mathscr{O}S^{-1} = \operatorname{rang}\mathscr{O}. \;\square \quad (1.44)$$

c. Controlabilitatea ieșirii

Conceptele de controlabilitate și observabilitate a stării conduc și la acela de controlabilitate a ieșirii, cu considerarea și a transferului direct intrare – ieșire.

Definiția 1.3

A. Un sistem dinamic se numește de *ieșire complet controlabilă* dacă pentru orice $t_f > 0$ și orice $y_f \in \mathbb{R}^p$, finiți, există o mărime de intrare $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, t_f], t_f > 0$, care transferă $y(t)$ din orice $y(0) = y_0$ în orice $y(t_f) = y_f \neq y_0$.

B. În caz contrar sistemul se numeşte, după situaţie, de *ieşire incomplet controlabilă* sau de *ieşire necontrolabilă*. □

Pentru sistemul (1.1), (1.2), prin analogie cu Teorema 1.1 (*iii*) se poate formula şi demonstra următorul rezultat.

Teorema 1.10

Sistemul (1.1), (1.2), cu $D(\cdot) = D =$ constant, este de ieşire complet controlabilă dacă şi numai dacă:

$$\operatorname{rang}\mathcal{C}_{\text{ies}} = \operatorname{rang}\left[C\,B,\, C\,A\,B,\, C\,A^2B,\ldots,\, C\,A^{n-1}B,\; D\right] = p\,. \;\square$$

Din Teorema 1.10 cu $D \neq 0$ rezultă că, în general, controlabilitatea completă a ieşirii nu depinde de controlabilitatea completă a stării şi / sau de observabilitatea completă a stării. De pildă, pentru $\operatorname{rang} D = p$ are loc $\operatorname{rang}\mathcal{C}_{\text{ies}} = p$ chiar şi pentru $A = 0,\, B = 0,\, C = 0$.

d. Zerourile de decuplare

Controlabilitatea şi observabilitatea stării sistemului dinamic (1.1), (1.2) pot fi examinate şi cu ajutorul răspunsului la impuls în forma modală (de exemplu, în cazul valorilor proprii simple – relaţia (I.3.23)). Controlabilitatea stării este o calitate a conexiunii între mărimea de intrare şi *modurile proprii* w (v. relaţia (I.2.37)). Aceasta în sensul că un anumit mod propriu w este sau nu comandabil cu mărimea de intrare după cum există sau nu o conexiune între mărimea de intrare şi acel mod propriu. Similar, observabilitatea stării este o calitate a conexiunii între *modurile proprii* v (v. relaţia (I.2.36)) şi mărimea de ieşire. Aceasta în sensul că un anumit mod propriu v este sau nu prezent în mărimea de ieşire dacă există sau nu o conexiune între acel mod propriu şi mărimea de ieşire. Aşadar, este evident că între controlabilitatea şi observabilitatea stării şi zerourile de decuplare la intrare şi respectiv la ieşire există o relaţie directă (v. relaţia (I.3.22) şi fig. I.3.2).

Teorema 1.11

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet controlabilă dacă şi numai dacă are zerouri de decuplare la intrare. □

$\mathcal{D}$. Conform cu transformarea de similitudine (I.2.27), din (1.13) rezultă:

$$\operatorname{rang}\mathcal{C} = \operatorname{rang}\left[B_c,\, JB_c,\, J^2B_c,\ldots,J^{n-1}B_c\right], \tag{1.45}$$

în care $B_c \triangleq V^{-1}B$, $\det V \neq 0$. Pentru simplitate fie A cu valori proprii simple şi J diagonală. Din (1.45) rezultă echivalenţa controlabilităţii incomplete cu:

$$\operatorname{rang}\left[B_c,\, J\,B_c,\, J^2 B_c, \ldots, J^{n-1}B_c\right] < n\,,$$

respectiv cu faptul că B_c are cel puţin o linie complet nulă. Cu (I.3.18), acest lucru este echivalent cu existenţa a cel puţin unui zero de decuplare la intrare.

În cazul în care J este o matrice Jordan, pe baza unui raţionament asemănător, dar mai laborios sub aspectul calculelor, se obţine acelaşi rezultat. □

În mod similar sau prin dualitate se demonstrează şi următorul rezultat.

Teorema 1.12

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet observabilă dacă şi numai dacă are zerouri de decuplare la ieşire. □

Controlabilitatea şi / sau observabilitatea incompletă a stării (existenţa unor zerouri de decuplare la intrare şi / sau la ieşire) au ca efect anumite „simplificări” (eliminări) de divizori comuni în matricea de transfer. Ele au loc implicit în toate elementele cel puţin ale unei linii şi/sau coloane. Şi anume în fiecare element numitorii şi numărătorii au divizori comuni de forma $(s-\lambda)$, λ fiind un zero de decuplare (v. şi Observaţia I.4.2). Urmarea este că, în general, mulţimea polilor este inclusă în mulţimea valorilor proprii conform relaţiei (I.3.35),.

Exemplul 1.1

Se consideră sistemul

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & b & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{=B}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & c & 0 & 0\\ 1 & c & 1 & 0\\ 0 & c & 0 & 1\end{bmatrix}}_{=C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}.$$

Să se analizeze controlabilitatea şi observabilitatea stării pentru $b, c \in \mathbb{R}$, să se determine zerourile de decuplare (pentru care sistemul este de stare incomplet controlabilă / observabilă) şi să se calculeze matricea de transfer şi polii.

Sistemul este de ordinul $n = 4$. Prin calcule simple se verifică imediat că $\operatorname{rang} B = 3,\ b \in \mathbb{R}$, şi $\operatorname{rang} C = 3$, $c \in \mathbb{R}$. Conform Teoremelor 1.2 şi 1.6 se scrie:

$$\operatorname{rang}\mathcal{C}_2 = \operatorname{rang}[B, AB] = \operatorname{rang}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ b & b & b & -3b & -3b & -3b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] = \begin{cases} 3 \text{ pentru } b = 0, \\ 4 \text{ pentru } b \neq 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{rang}\mathcal{O}_2^T = \operatorname{rang}\left[C^T, (CA)^T\right] = \operatorname{rang}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ c & c & c & -2c & -2c & -2c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = \begin{cases} 3 \text{ pentru } c = 0, \\ 4 \text{ pentru } c \neq 0. \end{cases}$$

Pentru $b \neq 0,\ c \neq 0$ sistemul este de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă. Matricea de transfer, conform cu (4.2), are următoarea formă:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{(c+1)s+c+2}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \dfrac{(b+1)s+b+3}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{(b+c+1)s^2+(3b+4c+5)s+2b+3c+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \dfrac{b}{s+3} \\ 0 & \dfrac{c}{s+2} & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}.$$

Pentru $b = 0, c \neq 0$ sistemul este de stare incomplet controlabilă. A fiind diagonală, este direct vizibil din ecuaţia de stare că $\lambda_\mu = -3$ este zero de decuplare la intrare deoarece x_3 este decuplată la intrare. $G(s)$ devine:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{(c+1)s+c+2}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \dfrac{\cancel{(s+3)}}{(s+1)\cancel{(s+3)}} & \dfrac{[(c+1)s+c+2]\cancel{(s+3)}}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}} & \dfrac{0}{s+3} \\ 0 & \dfrac{c}{s+2} & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{(c+1)s+c+2}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{(c+1)s+c+2}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{s+2} & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}.$$

În elementele neidentic nule ale liniei a doua binomul $(s+3)$ este divizor comun între numărători şi numitori. Prin simplificare a fost eliminat din $G(s)$.

Pentru $b \neq 0, c = 0$ sistemul este de stare complet controlabilă şi incomplet observabilă. Similar, este direct vizibil din ecuaţia de stare că $\lambda_\eta = -2$ este zero de decuplare la ieşire deoarece x_2 este decuplată la ieşire. $G(s)$ devine:

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{\cancel{(s+2)}}{(s+1)\cancel{(s+2)}} & 0 \\ \dfrac{(b+1)s+b+3}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{[(b+1)s+b+3]\cancel{(s+2)}}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)} & \dfrac{b}{s+3} \\ 0 & \dfrac{0}{s+2} & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{(b+1)s+b+3}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{(b+1)s+b+3}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{b}{s+3} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}.$$

În elementele neidentic nule ale coloanei a doua, binomul $(s+2)$ este divizor comun între numărători şi numitori. Prin simplificare a fost eliminat din $G(s)$.

În fine pentru $b=c=0$ sistemul este stare incomplet controlabilă şi de stare incomplet observabilă. După simplificări, rezultă matricea de transfer:

$$G(s)=\begin{bmatrix} (s+1)^{-1} & (s+1)^{-1} & 0 \\ (s+1)^{-1} & (s+1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (s+4)^{-1} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+4)}\begin{bmatrix} s+4 & s+4 & 0 \\ s+4 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix},$$

a cărei formă Smith – McMillan este: $M(s)=\operatorname{diag}\left\{\operatorname{diag}\{[(s+1)(s+4)]^{-1},1\},0\right\}$.

Polii sistemului sunt $s=-1$ şi $s=-4$, în timp ce valorile proprii sunt: $-1,-2,-3,-4$. Se confirmă că $s=-2$ şi $s=-3$ sunt zerourile de decuplare.

Trebuie remarcat că simplificările se pot realiza explicit numai dacă se înlocuiesc $b=0$ şi/sau $c=0$ direct în $G(s)$. Dacă înlocuirile se fac în matricele B, C, atunci „simplificările” au loc implicit, zerourile de decuplare fiind eliminate prin calculul produselor dintre $(I_n s-A)^{-1}$ şi B şi respectiv C şi $(I_n s-A)^{-1}$. □

Fireşte că este posibilă stabilirea unor relaţii între Teoremele 1.11 şi 1.12 şi Teoremele I.6.3 şi respectiv I.6.5, toate în formă negată.

Teorema 1.13

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet controlabilă dacă şi numai dacă pentru valorile proprii λ_i, $i=\overline{1,n}$, ale sistemului au loc:

$$\operatorname{rang}\left[I_n\lambda_i-A \;\vdots\; -B\right]=\operatorname{nrang}\left[I_n s-A \;\vdots\; -B\right]=n,\quad i=\overline{1,n}. \;\square \quad (1.46)$$

Teorema 1.14

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare complet observabilă dacă şi numai dacă pentru valorile proprii λ_i, $i=\overline{1,n}$, ale sistemului au loc:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} I_n\lambda_i - A \\ \text{-------} \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{nrang}\begin{bmatrix} I_n s - A \\ \text{------} \\ C \end{bmatrix} = n, \quad i=\overline{1,\,n}\,. \;\square \tag{1.47}$$

e. Controlabilitatea şi observabilitatea stării sunt proprietăţi generice

Fie mulţimea tuturor perechilor de matrice (A,B), cu $n,\,m$ fixaţi,

$$\mathcal{F} \triangleq \{(A,B);\; A\in\mathbb{R}^{n\times n},\; B\in\mathbb{R}^{n\times m}\},$$

şi fie $\mathcal{F}_{\mathrm{cc}}$ submulţimea perechilor (A,B) complet controlabile şi $\mathcal{F}_{\mathrm{nc}} = \mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_{\mathrm{cc}}$ – submulţimea perechilor (A,B) incomplet controlabile (inclusiv necontrolabile).

În aceste ipoteze se poate demonstra că mulţimea $\mathcal{F}_{\mathrm{cc}}$ este *densă* în mulţimea $\mathbb{R}^{n(n+m)}$ a elementelor matricelor A,B, ceea ce este echivalent cu $\operatorname{int}\mathcal{F}_{\mathrm{nc}}=\varnothing$, în care $\operatorname{int}M$ este interiorul mulţimii M.

Totodată, $\mathcal{F}_{\mathrm{nc}}$ generează o *suprafaţă algebrică*, respectiv un obiect geometric de dimensiune 2, descris de o ecuaţie polinomială.

Evident, un rezultat similar se poate formula, prin dualitate, şi pentru mulţimile perechilor de matrice (C,A) complet observabile şi, respectiv incomplet observabile (inclusiv neobservabile).

Prin urmare, controlabilitatea şi observabilitatea stării sunt *proprietăţi generice*. Se spune că probabilitatea de a selecta aleatoriu o pereche (A,B) / (C,A) incomplet controlabilă / observabilă este nulă. Situaţie confirmată de altfel şi de marea majoritate a sistemelor întâlnite în aplicaţii, pentru care mult mai frecvente şi mai problematice sunt slaba calitate a controlabilităţii / observabilităţii complete a stării (v. Observaţiile 1.2 şi 1.5).

În acest context, se poate afirma că proprietăţile de controlabilitate şi observabilitate a stării definesc calitatea transferului intrare – stare – ieşire. Totodată, ele au o importanţă cardinală în obţinerea unor realizări echilibrate de ordin redus (v. secţiunea 4.3) şi în proiectarea reacţiei după stare (v. secţiunea III.4.1), după ieşire (v. secţiunea III.4.2) sau după starea estimată (v. secţiunea III.4.3).

1.2. Structura spațiului stărilor

Conceptele de controlabilitate şi observabilitate completă a stării se asociază cu abilitatea de a comanda starea în sensul transferului ei între două stări oarecare în timp finit, şi, respectiv, de a evalua starea inițială, oricare ar fi aceasta, pe baza cunoaşterii mărimilor de intrare şi de ieşire peste un interval finit de timp.

Proprietățile de controlabilitate şi observabilitate a stării au caracter intrinsec. Conform Teoremelor 1.4 şi 1.9, ele nu depind de alegerea bazei de vectori în spațiul stărilor în raport cu care se formulează reprezentarea intrare – stare – ieşire.

a. Subspațiul complet controlabil

Pentru simplificarea expunerii se particularizează Definiția 1.1 pentru cazul $x(t_0) = x_0 = 0$. Cu aceasta ecuația (1.4) devine:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\theta)} B u(\theta)\, d\theta, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1.48}$$

În această situație, pentru fiecare $t \in \mathbb{R}_+$ fixat, se poate defini subspațiul:

$$\mathcal{X}_{cc} \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x = \int_0^t e^{A(t-\theta)} B u(\theta) d\theta, \quad u \in \mathbb{R}^m \right\} \subseteq \mathbb{R}^n , \tag{1.49}$$

numit *subspațiul complet controlabil*. Acesta este subspațiul liniar al stărilor finale x, accesibile pornind din starea inițială $x_0 = 0$ prin aplicarea mărimii de intrare $u(\theta),\ x \in [0, t]$. $\mathcal{X}_{nc}$ fiind subspațiul necontrolabil, se scrie: $\mathcal{X}_{cc} \oplus \mathcal{X}_{nc} = \mathbb{R}^n$, în care $\oplus$ este suma directă de subspații.

Se introduce subspațiul liniar numit *imaginea matricei de controlabilitate* $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \{ x \in \mathbb{R}^n;\ x = \mathcal{C} z,\ z \in \mathbb{R}^{mn} \} . \tag{1.50}$$

Teorema 1.15

$$\mathcal{X}_{\mathcal{C}} = \mathrm{Im}\,\mathcal{C} . \tag{1.51}$$

$\mathcal{D}$. În conformitate cu (I.2.16), pentru (1.49) se poate scrie:

$$\int_0^t e^{A(t-\theta)} B u(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} B \int_0^t f_k(t-\theta) u(\theta) d\theta = \mathcal{C}\underline{u} ,$$

în care:

$$\underline{u} \triangleq \left[\int_0^t f_1(t-\theta)u^T(\theta)d\theta,.....,\int_0^t f_n(t-\theta)u^T(\theta)d\theta\right]^T \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Întrucât $f_k(t),\ k=\overline{1,n}$, sunt liniar independente (v. paragraful I.2.2.b), rezultă că prin alegerea adecvată a lui $u(\theta),\ \theta\in[0,\,t]$, se poate realiza orice $\underline{u}\in\mathbb{R}^{mn}$. În aceste condiții rezultatul (1.51), cu (1.49) şi (1.50), este evident. □

Teorema 1.16

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet controlabilă dacă şi numai dacă el este echivalent cu sistemul reprezentat prin ecuațiile:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\text{cc}} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\text{nc}} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\text{cc}} \\ 0 \end{bmatrix} u\,, \tag{1.52}$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \tilde{D}(\cdot)u\,, \tag{1.53}$$

în care $\dim\tilde{A}_{\text{cc}} < n$ şi perechea $(\tilde{A}_{\text{cc}},\tilde{B}_{\text{cc}})$ este complet controlabilă.

$\mathscr{D}$. *Necesitatea*. Fie $\operatorname{rang}\mathcal{C} = r < n$. Se aleg r coloane liniar independente din $\mathcal{C}$, fie ele $v_1, v_2, ..., v_r$ (v. Anexa A). Se poate scrie:

$$[v_1, v_2, ..., v_r] = \mathcal{C}M\ ,$$

în care M este matricea $mn\times r$ prin care se selectează respectivele r coloane.

În aceste condiții, făcând uz de (1.13) şi de teorema Cayley-Hamilton (v. paragraful I.2.2.b), se poate scrie:

$$A\big[v_1,v_2,...,v_r\big] = A\mathcal{C}M = \Big[AB, A^2B,..., \underbrace{A^n}_{\substack{-\sum_0^{n-1}\alpha_{n-k}A^k \\ \text{(Cayley-} \\ \text{Hamilton)}}} B\Big]M = \mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n I_m \\ I_m & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} I_m \\ 0 & I_m & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} I_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m & -\alpha_1 I_m \end{bmatrix} M\ .$$

Acest rezultat implică:

$$Av_k \in \operatorname{Im}\mathcal{C},\quad k=\overline{1,r}\,, \tag{1.54}$$

$$A v_k = \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{1,r},$$

unde $\tilde{a}_{jk}$, $j,k = \overline{1,r}$, sunt constante adecvat alese.

Se adaugă vectorii liniar independenți $v_{r+1},\ldots,v_n$ astfel ca $v_1, v_2,\ldots,v_n$ să fie bază de vectori în $\mathbb{R}^n$. Cu constantele adecvate $\tilde{a}_{jk}, j = \overline{1,r}, k = \overline{r+1,n}$ se scrie:

$$A v_k = \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{r+1,n}.$$

Totodată se defineşte *transformarea de similitudine* (v. (1.25) – (1.28)) prin:

$$S^{-1} = \left[v_1,\ldots,v_r \,\middle|\, v_{r+1},\ldots,v_n \right], \quad S = \left[w_1^T,\ldots,w_r^T \,\middle|\, w_{r+1}^T,\ldots,w_n^T \right]^T,$$

$$w_i v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i,j = \overline{1,n},$$

unde w_i, $i = \overline{1,n}$, sunt liniile matricei S. În această situație din (1.28) rezultă:

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\mathrm{cc}} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\mathrm{nc}} \end{bmatrix}, \tag{1.55}$$

în care $\dim \tilde{A}_{\mathrm{cc}} = r < n$ deoarece:

$$w_i A v_k = \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{jk} w_i v_j = 0, \quad i = \overline{r+1,n}, \; k = \overline{1,r}.$$

Pe de altă parte, coloanele b_k, $k = \overline{1,m}$, ale matricei B au proprietatea:

$$b_k = \sum_{j=1}^{r} \tilde{b}_{jk} v_j, \quad k = \overline{1,m},$$

în care $\tilde{b}_{jk}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,m}$, sunt constante adecvate. Ca urmare, din (1.28) rezultă:

$$\tilde{B} = S B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\mathrm{cc}} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.56}$$

în care s-a avut în vedere că:

$$w_i b_k = \sum_{j=1}^{r} \tilde{b}_{jk} w_i v_j = 0, \quad i = \overline{r+1,n}, \; k = \overline{1,m}.$$

În aceste circumstanţe prin transformarea $\tilde{x} = Sx$ (v. (1.25)) sistemul (1.1), (1.2) se transformă în echivalentul (1.26), (1.27), cu (1.28), în care matricele $\tilde{A}$ şi $\tilde{B}$ au formele (1.55) şi (1.56). Acestea corespund de fapt ecuaţiilor (1.52), (1.53), cu $\dim \tilde{A}_{\mathrm{cc}} = r < n$. Matricele $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ au forme determinabile.

Pentru a arăta că perechea $(\tilde{A}_{\mathrm{cc}}, \tilde{B}_{\mathrm{cc}})$ este complet controlabilă se are în vedere Teorema 1.4. Se scrie:

$$r = \operatorname{rang}\mathcal{C} = \operatorname{rang} S\mathcal{C} = \operatorname{rang}\tilde{\mathcal{C}} = \operatorname{rang}[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \ldots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \tilde{B}_{\mathrm{cc}}, & \tilde{A}_{\mathrm{cc}}\tilde{B}_{\mathrm{cc}}, & \cdots, & \tilde{A}_{\mathrm{cc}}^{r-1}\tilde{B}_{\mathrm{cc}}, & \tilde{A}_{\mathrm{cc}}^{r}\tilde{B}_{\mathrm{cc}}, & \cdots, & \tilde{A}_{\mathrm{cc}}^{n-1}\tilde{B}_{\mathrm{cc}} \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\left[\tilde{B}_{\mathrm{cc}}, \tilde{A}_{\mathrm{cc}}\tilde{B}_{\mathrm{cc}}, \ldots, \tilde{A}_{\mathrm{cc}}^{r-1}\tilde{B}_{\mathrm{cc}}\right] = \dim \tilde{A}_{\mathrm{cc}}.$$

Aceasta dovedeşte că perechea $(\tilde{A}_{\mathrm{cc}}, \tilde{B}_{\mathrm{cc}})$ este complet controlabilă.

Suficienţa este evidentă. □

Observaţia 1.9

Relaţia (1.54) arată că dacă $v \in \mathcal{X}_{\mathrm{cc}}$ atunci $Av \in \mathcal{X}_{\mathrm{cc}}$. Se spune că spaţiul controlabil $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}}$ este A*-invariant* şi se scrie:

$$A\mathcal{X}_{\mathrm{cc}} \subset \mathcal{X}_{\mathrm{cc}}\,. \;\square \qquad (1.57)$$

Observaţia 1.10

Teorema 1.16 evidenţiază structura sistemului sub aspectul controlabilităţii stării. Se disting două subsisteme: unul de stare complet controlabilă ($\tilde{A}_{\mathrm{cc}}$) şi unul de stare necontrolabilă ($\tilde{A}_{\mathrm{nc}}$). Echivalent, spaţiul stărilor este suma subspaţiilor controlabil $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}}$ şi necontrolabil $\mathcal{X}_{\mathrm{nc}}$, adică $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}} \oplus \mathcal{X}_{\mathrm{nc}} = \mathbb{R}^n$. Evident, $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}} = \mathbb{R}^n$ este echivalentă cu completa controlabilitate a sistemului. Pentru $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}} \subset \mathbb{R}^n$ sistemul este de stare incomplet controlabilă şi pentru $\mathcal{X}_{\mathrm{cc}} = \{0\}$ este de stare necontrolabilă. □

Observaţia 1.11

Teorema 1.16 arată că valorile proprii ale matricei $\tilde{A}_{\mathrm{nc}}$ sunt zerourile de decuplare la intrare ale sistemului (1.52), (1.53) sau ale echivalentului (1.1), (1.2).

Ca urmare, conform Teoremei 1.15 rezultă că:

$$n_{\mathrm{cc}} = \dim \mathcal{X}_{\mathrm{cc}} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{C} = \dim \tilde{A}_{\mathrm{cc}} = n - \dim \tilde{A}_{\mathrm{nc}} = n - n_{\mathrm{nc}} = r\ ,$$

unde $n_{\mathrm{nc}} \triangleq \dim A_{\mathrm{nc}}$ este numărul zerourilor de decuplare la intrare. □

Exemplul 1.2

Se consideră sistemul:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Să se determine subspaţiul controlabil şi descompunerea structurală de forma (1.52), (1.53).

În conformitate cu Teorema 1.1 (*iii*) se poate scrie:

$$\operatorname{rang} \mathcal{C} = \operatorname{rang}[B, AB, A^2 B] = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3\,.$$

În aceste circumstanţe $\operatorname{Im}\mathcal{C}$ este subspaţiul a cărui bază de vectori este definită de coloanele liniar independente ale lui $\mathcal{C}$ (v. Anexa A). Ca atare:

$$\operatorname{Im}\mathcal{C} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pentru a determina sistemul echivalent (1.52), (1.53) se construieşte matricea S din (1.28). În acest sens, bazei lui $\operatorname{Im}\mathcal{C}$, $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$, i se adaugă $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ astfel ca v_1, v_2, v_3 să fie liniar independenţi. Ca urmare:

$$S^{-1} = \left[v_1 \quad v_2 \;\vdots\; v_3 \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad S = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \hdashline w_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

În conformitate cu (1.28) rezultă:

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad \tilde{A}_{\mathrm{cc}}$$

$$\tilde{B} = SB = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad \tilde{B}_{\mathrm{cc}}$$

$$\tilde{C} = CS^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u, \quad y = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}. \ \square$$

b. Subspaţiul neobservabil

Pentru simplificarea tratării se particularizează Definiţia 1.2 pentru $u(t) \equiv 0$. În aceste condiţii din (1.2), (1.4) pentru fiecare t fixat se obţine:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 .$$

Situaţia tipică în care x_0 nu poate fi determinat este aceea în care $y(t) \equiv 0$. Din relaţia precedentă rezultă că, pentru fiecare t fixat, ecuaţia:

$$Ce^{At}x_0 = 0$$

defineşte stările iniţiale x_0 neobservabile. Ca urmare se defineşte:

$$\mathcal{X}_{\mathrm{no}} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; Ce^{At}x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n . \tag{1.58}$$

numit *subspaţiul neobservabil*. Acesta este subspaţiul liniar al stărilor iniţiale x nedeterminabile deşi se cunosc $u(t) \equiv 0$ şi $y(t) \equiv 0$ peste orice interval de timp finit $[0, t]$. $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$ fiind subspaţiul complet observabil, se scrie $\mathcal{X}_{\mathrm{co}} \oplus \mathcal{X}_{\mathrm{no}} = \mathbb{R}^n$, în care $\oplus$ este suma directă de subspații.

Se introduce subspațiul liniar numit *nucleul matricei de observabilitate* $\mathcal{O}$:

$$\operatorname{Ker}\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{O}x = 0\}\,. \tag{1.59}$$

Teorema 1.17

$$\mathcal{X}_{\text{no}} = \operatorname{Ker}\mathcal{O}\,. \tag{1.60}$$

$\mathcal{D}$. În conformitate cu (I.2.16), pentru (1.58) se poate scrie:

$$Ce^{At}x = \sum\nolimits_{k=1}^{n} CA^{k-1} f_k(t)x = \left[I_p f_1(t),\ldots,I_p f_n(t)\right]\mathcal{O}x = 0\,.$$

Întrucât $f_k(t),\ k = \overline{1,n}$, sunt liniar independente (v. paragraful I.2.2.b), rezultă că:

$$\mathcal{O}x = 0\,.$$

Aceasta înseamnă că (1.60), cu (1.58), (1.59), este adevărată. □

Teorema 1.18

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet observabilă dacă şi numai dacă el este echivalent cu sistemul reprezentat prin ecuațiile:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\text{co}} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{\text{no}} \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}u\,, \tag{1.61}$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\text{co}} & 0 \end{bmatrix}\tilde{x} + \tilde{D}(\cdot)u\,, \tag{1.62}$$

în care perechea $(\tilde{C}_{\text{co}}, \tilde{A}_{\text{co}})$ este complet observabilă, cu $\dim \tilde{A}_{\text{co}} < n$.

$\mathcal{D}$. *Necesitatea*. Fie $\operatorname{rang}\mathcal{O} = r < n$. Se aleg r linii liniar independente din $\mathcal{O}$, fie ele $w_1, w_2, \ldots, w_r$ (v. Anexa A). La acestea se adaugă liniile $w_{r+1}, \ldots, w_n$ astfel încât vectorii $w_1^T, w_2^T, \ldots, w_r^T, w_{r+1}^T, \ldots, w_n^T$ să formeze o bază de vectori în $\mathbb{R}^n$.

Totodată se defineşte *transformarea de similitudine* (v. (1.25) – (1.28)) prin:

$$S = \left[w_1^T, \ldots, w_r^T \,\middle|\, w_{r+1}^T, \ldots, w_n^T\right]^T,\ \ S^{-1} = \left[v_1, \ldots, v_r \,\middle|\, v_{r+1}, \ldots, v_n\right],$$

în care $v_i, i = \overline{1,n}$, sunt coloanele matricei S.

Coloanele $v_{r+1},\ldots,v_n$ formează o bază de vectori în subspaţiul $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}$. Aceasta implică:

$$\mathcal{O}\left[v_{r+1},\ldots,v_n\right]=0 .$$

În astfel de condiţii, făcând uz de (1.35) şi de teorema Cayley-Hamilton (v. I.2.2.b), se poate scrie:

$$\mathcal{O}A\left[v_{r+1},\ldots,v_n\right]=\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \underbrace{CA^n}_{=-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n-k}A^k \ \text{Cayley–Hamilton}} \end{bmatrix}\left[v_{r+1},\ldots,v_n\right]=\begin{bmatrix} 0 & I_p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_p \\ -\alpha_n I_p & -\alpha_{n-1} I_p & \cdots & -\alpha_1 I_p \end{bmatrix}\mathcal{O}\left[v_{r+1},\ldots,v_n\right]=0 .$$

Acest rezultat implică:

$$A v_k \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{O},\quad k=\overline{r+1,n}, \tag{1.63}$$

adică:

$$A v_k=\sum\nolimits_{j=r+1}^{n}\tilde{a}_{jk}v_j,\quad k=\overline{r+1,n},$$

unde $\tilde{a}_{jk},\ j,k=\overline{r+1,n}$, sunt constante adecvat alese.

Liniile lui S şi coloanele lui S^{-1} satisfac condiţiile:

$$w_i v_j=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq 0\end{cases},\quad i,j=\overline{1,n} .$$

În această situaţie din prima relaţie din (1.28) rezultă:

$$\tilde{A}=S\,A\,S^{-1}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{co}} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{\mathrm{no}}\end{bmatrix}, \tag{1.64}$$

în care $\dim\tilde{A}_{\mathrm{o}}=r<n$, deoarece are loc:

$$w_i A v_k=\sum\nolimits_{j=r+1}^{n}\tilde{a}_{jk}w_i v_j=0,\quad i=\overline{1,r},\ k=\overline{r+1,n} .$$

Pe de altă parte, $C v_k=0,\quad k=\overline{r+1,n}$, ceea ce conduce la:

$$\tilde{C} = C S^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\mathrm{co}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.65}$$

În aceste circumstanțe prin transformarea $\tilde{x} = S x$ (v. (1.25)) sistemul (1.1), (1.2) se transformă în echivalentul (1.26), (1.27), cu (1.28), în care matricele $\tilde{A}$ şi $\tilde{C}$ au formele (1.64) şi (1.65). Acestea corespund de fapt ecuațiilor (1.61), (1.62), cu $\dim \tilde{A}_{\mathrm{co}} = r < n$. Matricele $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ au forme determinabile.

Pentru a arăta că perechea $(\tilde{C}_{\mathrm{co}}, \tilde{A}_{\mathrm{co}})$ este complet observabilă se aplică Teorema 1.9. Se scrie:

$$r = \operatorname{rang} \mathcal{O} = \operatorname{rang} \mathcal{O} S^{-1} = \operatorname{rang} \tilde{\mathcal{O}} = \operatorname{rang}\left[\tilde{C}^T, \tilde{A}^T \tilde{C}^T, ..., (\tilde{A}^T)^{n-1} \tilde{C}^T\right]^T =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, & \tilde{A}_{\mathrm{co}}^T \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, & \cdots, & (\tilde{A}_{\mathrm{co}}^T)^{r-1} \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, & (\tilde{A}_{\mathrm{co}}^T)^{r} \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, & \cdots, & (\tilde{A}_{\mathrm{co}}^T)^{n-1} \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & 0, & \cdots, & 0, \end{bmatrix}^T =$$

$$= \operatorname{rang}\left[\tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, \tilde{A}_{\mathrm{co}}^T \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T, ..., (\tilde{A}_{\mathrm{co}}^T)^{r-1} \tilde{C}_{\mathrm{co}}^T\right]^T = \dim \tilde{A}_{\mathrm{co}}.$$

Aceasta demonstrează că perechea $(\tilde{C}_{\mathrm{co}}, \tilde{A}_{\mathrm{co}})$ este complet observabilă.

Suficiența este evidentă. □

Observația 1.12

Relația (1.63) arată că dacă $v \in \mathcal{X}_{\mathrm{no}}$ atunci $A v \in \mathcal{X}_{\mathrm{no}}$. Se spune că spațiul neobservabil $\mathcal{X}_{\mathrm{no}}$ este A*-invariant* şi se scrie:

$$A \mathcal{X}_{\mathrm{no}} \subset \mathcal{X}_{\mathrm{no}}. \ \square \tag{1.66}$$

Observația 1.13

Teorema 1.18 evidențiază structura sistemului sub aspectul observabilității stării. Se disting două subsisteme: unul de stare complet observabilă ($\tilde{A}_{\mathrm{co}}$) şi unul de stare neobservabilă ($\tilde{A}_{\mathrm{no}}$). Echivalent, spațiul stărilor este suma subspațiilor observabil $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$ şi neobservabil $\mathcal{X}_{\mathrm{no}}$, adică $\mathcal{X}_{\mathrm{co}} \oplus \mathcal{X}_{\mathrm{no}} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{X}_{\mathrm{co}} = \mathbb{R}^n$ este echivalentă cu completa observabilitate a sistemului. Pentru $\mathcal{X}_{\mathrm{co}} \subset \mathbb{R}^n$ sistemul este de stare incomplet observabilă şi pentru $\mathcal{X}_{\mathrm{co}} = \{0\}$ este de stare neobservabilă. □

Observația 1.14

Teorema 1.18 arată că valorile proprii ale matricei $\tilde{A}_{\mathrm{no}}$ sunt zerourile de decuplare la ieşire ale sistemului (1.61), (1.62) sau ale sistemului echivalent (1.1), (1.2). Ca urmare, conform Teoremei 1.17 rezultă că:

$$\dim \mathcal{X}_{\mathrm{no}} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{O} = \dim \tilde{A}_{\mathrm{no}} = n_{\mathrm{no}} = n - r ,$$

unde $n_{\mathrm{no}} \triangleq \dim A_{\mathrm{no}}$ este numărul zerourilor de decuplare la ieşire. □

Exemplul 1.3

Se consideră sistemul de la exemplul 1.2. Să se determine subspațiul neobservabil şi descompunerea structurală de forma (1.61), (1.62).

În conformitate cu Teorema 1.5 (*iii*) se poate scrie:

$$\operatorname{rang} \mathcal{O} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 2 < n = 3 .$$

Ca urmare, din (1.59) rezultă:

$$\operatorname{Ker} \mathcal{O} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ;\;\; x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \alpha ;\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} .$$

În aceste condiții se alege $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, şi se adaugă $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, astfel încât v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenți(v. Anexa A). În această situație se obțin:

$$S^{-1} = \left[v_1 \quad v_2 \;\vdots\; v_3 \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad S = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \hline w_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Folosind relațiile (1.28) rezultă:

$$\tilde{A} = S A S^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & \boxed{-1}^{\,\tilde{A}_{\mathrm{co}}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array} \right],$$

$$\tilde{B} = S\,B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = C\,S^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\underbrace{-3 \quad -5}_{\tilde{C}_{co}} \mid 0].$$

Aşadar sistemul echivalent (1.61), (1.62) are forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [-3 \quad -5 \mid 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}. \ \square$$

c. Descompunerea canonică Kalman

Prin Definiţiile 1.1 şi 1.2, Teoremele 1.1 – 1.4, 1.11, 1.13, 1.15, 1.16 şi respectiv 1.5 – 1.7, 1.9, 1.12, 1.14, 1.17, 1.18 au fost definite şi caracterizate două proprietăţi duale (Teorema 1.8) distincte: controlabilitatea şi observabilitatea stării.

Ambele proprietăţi sunt structural dihotomice (Teoremele 1.15, 1.16 şi 1.17, 1.18). Ca urmare, sistemul (1.1), (1.2) poate fi descompus în *patru subsisteme* şi anume: S_1 – de stare complet controlabilă şi neobservabilă, S_2 – de stare complet controlabilă şi complet observabilă, S_3 – de stare necontrolabilă şi neobservabilă, S_4 – şi de stare necontrolabilă şi complet observabilă. Subspaţiile corespunzătoare sunt: $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$. În legătură cu acestea se poate formula următorul rezultat.

Teorema 1.19

Sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet controlabilă şi incomplet observabilă dacă şi numai dacă el este echivalent cu sistemul reprezentat prin:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\,, \tag{1.67}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{bmatrix} x + \tilde{D}(\cdot)\, u\,, \tag{1.68}$$

în care A_{ii} sunt matricele de evoluție ale subsistemelor $S_i, i=\overline{1,4}$, de dimensiuni:

$$\begin{cases} \dim \tilde{A}_{11} = n_1 = \dim \mathrm{Im}\, \mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}\, \mathcal{O} < n, \\ \dim \tilde{A}_{22} = n_2 = \dim \mathrm{Im}\, \mathcal{C} - n_1 > 0, \\ \dim \tilde{A}_{33} = \qquad \dim \mathrm{Ker}\, \mathcal{O} - n_1 > 0, \\ \dim \tilde{A}_{44} = \qquad n - n_1 - n_2 > 0. \square \end{cases} \tag{1.69}$$

$\mathcal{D}$. *Necesitatea*. Fie subspațiul de stare complet controlabilă şi de stare neobservabilă:

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{Im}\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{O}. \tag{1.70}$$

Atunci subspațiul controlabil, Im$\mathcal{C}$ (v. Teorema 1.15), se exprimă ca suma directă a subspațiilor: $\mathcal{X}_1$ – de stare complet controlabilă şi de stare neobservabilă, şi $\mathcal{X}_2$ – de stare complet controlabilă şi de stare complet observabilă. Se scrie:

$$\mathrm{Im}\mathcal{C} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2. \tag{1.71}$$

Fie subspațiile $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ cu următoarele caracteristici:

$$\begin{aligned} &\dim \mathcal{X}_1 = n_1 < n, \quad \mathcal{X}_1 = \left\{v_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, v_{n_1}\right\}, \\ &\dim \mathcal{X}_2 = n_2 > 0, \quad \mathcal{X}_2 = \left\{v_{n_1+1}, \ldots\ldots\ldots, v_{n_1+n_2}\right\}, \\ &\dim \mathcal{X}_3 = n_3 > 0, \quad \mathcal{X}_3 = \left\{v_{n_1+n_2+1}, \ldots, v_{n_1+n_2+n_3}\right\}, \\ &\dim \mathcal{X}_4 = n_4 > 0, \quad \mathcal{X}_4 = \left\{v_{n_1+n_2+n_3+1}, \ldots\ldots, v_n\right\}, \end{aligned}$$

în care, prin relațiile din dreapta, s-au dat reprezentările prin bazele de vectori.

Întrucât Im$\mathcal{C}$ şi Ker$\mathcal{O}$ sunt A*-invariante* (v. Observațiile 1.9 şi 1.12), din (1.70) rezultă că şi $\mathcal{X}_1$ este A*-invariant*. Ca urmare se poate scrie:

$$Av_k = \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{1, n},$$

în care $\tilde{a}_{jk}$ sunt constante adecvat alese. De asemenea, conform cu (1.71) se scrie:

$$Av_k = \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{n_1+1, n_1+n_2}.$$

În mod similar, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3$ este A-*invariant* şi ca urmare:

$$A v_k = \sum\nolimits_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{jk} v_j + \sum\nolimits_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{n_1+n_2+1,\, n_1+n_2+n_3}\,,$$

unde $\tilde{a}_{jk}$ sunt constante adecvat alese. Dar $\mathcal{X}_4$ nu este A-*invariant* şi se scrie:

$$A v_k = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} v_j, \quad k = \overline{n_1+n_2+n_3+1,\, n}\,,$$

unde $\tilde{a}_{jk}$ sunt constante adecvat alese. Totodată, se introduc matricele:

$$S^{-1} = \left[v_1,\ldots,v_{n_1} \,\middle|\, v_{n_1+1},\ldots,v_{n_1+n_2} \,\middle|\, v_{n_1+n_2+1},\ldots,v_{n_1+n_2+n_3} \,\middle|\, v_{n_1+n_2+n_3+1},\ldots,v_n \right],$$

$$S = \left[w_1^T,\ldots,w_{n_1}^T \,\middle|\, w_{n_1+1}^T,\ldots,w_{n_1+n_2}^T \,\middle|\, w_{n_1+n_2+1}^T,\ldots,w_{n_1+n_2+n_3}^T \,\middle|\, w_{n_1+n_2+n_3+1}^T,\ldots,w_n^T \right]^T,$$

$$w_i v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, n}\,.$$

În această situaţie, folosind prima relaţie din (1.28) rezultă:

$$\tilde{A} = S A S^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix},$$

în care s-a avut în vedere că:

$$\begin{aligned} w_i A v_k = 0,\ & i = \overline{n_1+1,\, n_1+n_2}, & & k = \overline{1, n_1}, k = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3}, \\ & i = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3}, & & k = \overline{1, n_1+n_2}, \\ & i = \overline{n_1+n_2+n_3+1,\, n}, & & k = \overline{1, n_1+n_2+n_3}. \end{aligned}$$

Matricele $\tilde{B}$ şi $\tilde{C}$ rezultă pe baza Teoremelor 1.16 şi 1.18.

Suficienţa este evidentă. □

O problemă importantă din punctul de vedere al aplicaţiilor este determinarea subspaţiului $\mathcal{X}_1 = \mathrm{Im}\,\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{O}$ (v. relaţia (1.70)). Fie

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \{v_1,\ldots,v_{n_{\mathrm{cc}}}\}, \quad n_{\mathrm{cc}} = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{C} = n - \dim \tilde{A}_{\mathrm{nc}} = n - n_{\mathrm{nc}}\,,$$

$$\operatorname{Ker}\mathcal{O} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n_{\text{no}}}\}, \quad n_{\text{no}} = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{O} = \dim \tilde{A}_{\text{no}},$$

în care $\tilde{A}_{\text{nc}}$ şi $\tilde{A}_{\text{no}}$ au semnificaţiile din Teoremele 1.16 şi 1.18 şi cărora le corespund respectiv subspaţiile ortogonale $\{[v_1, \dots, v_{n_{\text{cc}}}]^{\perp}\}$, $\{[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n_{\text{no}}}]^{\perp}\}$.
Pentru $\mathcal{X}_1$ rezultă, [50]:

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ \left[[v_1, \dots, v_{n_{\text{cc}}}]^{\perp}, \ [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n_{\text{no}}}]^{\perp} \right]^{\perp} \right\}.$$

Aceste subspaţii ortogonale se determină prin inversarea matricelor:

$$S^{-1} = [v_1, \dots, v_{n_{\text{cc}}}, v_{n_{\text{cc}}+1}, \dots, v_n],$$

$$\underline{S}^{-1} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n_{\text{co}}}, \underline{v}_{n_{\text{co}}+1}, \dots, \underline{v}_n],$$

în care $v_{n_{\text{cc}}+1}, \dots, v_n$ şi $\underline{v}_{n_{\text{co}}+1}, \dots, \underline{v}_n$ au fost adăugaţi în mod corespunzător pentru constituirea a două baze de vectori în $\mathbb{R}^n$.

În acest fel se obţin:

$$S = [w_1^T, \dots, w_{n_{\text{cc}}}^T, w_{n_{\text{cc}}+1}^T, \dots, w_n^T]^T,$$

$$\underline{S} = [\underline{w}_1^T, \dots, \underline{w}_{n_{\text{co}}}^T, \underline{w}_{n_{\text{co}}+1}^T, \dots, \underline{w}_n^T]^T,$$

ceea ce înseamnă că:

$$\left\{ [v_1, \dots, v_{n_{\text{cc}}}]^{\perp} \right\} = \left\{ w_{n_{\text{cc}}+1}^T, \dots, w_n^T \right\},$$

$$\left\{ [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n_{\text{co}}}]^{\perp} \right\} = \left\{ \underline{w}_{n_{\text{co}}+1}^T, \dots, \underline{w}_n^T \right\},$$

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ [w_{n_{\text{cc}}+1}^T, \dots, w_n^T, \underline{w}_{n_{\text{co}}+1}^T, \dots, \underline{w}_n^T]^{\perp} \right\}.$$

Reprezentarea (1.67), (1.68) se numeşte *descompunerea canonică Kalman*. Ea pune în evidenţă structura sistemului (1.1), (1.2) şi relevă un fapt esenţial: transferul intrare – ieşire are loc numai prin subsistemul $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2, \tilde{D}(\cdot))$. Pentru a aborda această problemă se demonstrează mai întâi următorul rezultat.

Teorema 1.20

Matricea de transfer a sistemului (1.1), (1.2) este invariantă în raport cu transformările liniare nesingulare ale vectorului de stare de forma (1.25).

𝒟. Se demonstrează că matricele de transfer $G(s)=C(I_n s-A)^{-1}B+D(s)$ (a sistemului (1.1), (1.2)) şi $\tilde{G}(s)=\tilde{C}(I_n s-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D}(s)$ (a echivalentului (1.26), (1.27), obţinut cu (1.25) şi (1.28) satisfac identitatea $\tilde{G}(s)\equiv G(s)$. Într-adevăr,

$$\tilde{G}(s)=\tilde{C}(I_n s-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D}(s)=C\,S^{-1}(S\,S^{-1}s-S\,A\,S^{-1})^{-1}S\,B+D(s)=$$
$$=CS^{-1}S(I_n s-A)^{-1}S^{-1}S\,B+D(s)=C(I_n s-A)^{-1}B+D(s)=G(s).\square$$

Teorema 1.21

Dacă sistemul (1.1), (1.2) este de stare incomplet controlabilă şi incomplet observabilă, atunci matricea de transfer are expresia:

$$G(s)=\tilde{C}_2(I_{n_2}s-\tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2+\tilde{D}(s)\,, \tag{1.72}$$

în care $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{D}(\cdot)$ şi n_2 au semnificaţiile de la Teorema 1.19.

𝒟. În virtutea Teoremelor 1.19 şi 1.20 se poate scrie:

$$G(s)=\begin{bmatrix}0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_1}s-\tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} & -\tilde{A}_{13} & -\tilde{A}_{14}\\ 0 & I_{n_2}s-\tilde{A}_{22} & 0 & -\tilde{A}_{24}\\ 0 & 0 & I_{n_3}s-\tilde{A}_{33} & -\tilde{A}_{34}\\ 0 & 0 & 0 & I_{n_4}s-\tilde{A}_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\tilde{D}(s)=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(I_{n_1}s-\tilde{A}_{11})^{-1} & \times & \times & \times\\ 0 & (I_{n_2}s-\tilde{A}_{22})^{-1} & 0 & \times\\ 0 & 0 & (I_{n_3}s-\tilde{A}_{33})^{-1} & \times\\ 0 & 0 & 0 & (I_{n_4}s-\tilde{A}_{44})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+$$
$$+\tilde{D}(s)=\tilde{C}_2(I_{n_2}s-\tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2+D(s).$$

Prin $\times$ s-au desemnat matrice determinabile. Forma lor concretă nu este relevantă pentru demonstraţie deoarece, pe parcurs, se înmulţesc cu matrice nule. □

Teorema 1.21

În polinomul caracteristic al sistemului (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} d(s) &= \det(I_n s - A) \equiv \det(I_n s - \tilde{A}) \equiv \\ &\equiv \det(I_{n_1} s - \tilde{A}_{11})\det(I_{n_2} s - \tilde{A}_{22})\det(I_{n_3} s - \tilde{A}_{33})\det(I_{n_4} s - \tilde{A}_{44}) \end{aligned} \tag{1.73}$$

se disting: *polinomul polilor* (identic cu polinomul caracteristic al matricei $\tilde{A}_{22}$)

$$p(s) \equiv d_2(s) = \det(I_{n_2} s - \tilde{A}_{22}) \tag{1.74}$$

şi *polinomul zerourilor de decuplare*:

$$z^0(s) = \det(I_{n_1} s - \tilde{A}_{11})\det(I_{n_3} s - \tilde{A}_{33})\det(I_{n_4} s - \tilde{A}_{44}), \tag{1.75}$$

în care $\det(I_{n_3} s - \tilde{A}_{33})\det(I_{n_4} s - \tilde{A}_{44})$ este *polinomul zerourilor de decuplare la intrare*, $\det(I_{n_1} s - \tilde{A}_{11})\det(I_{n_3} s - \tilde{A}_{33})$ este *polinomul zerourilor de decuplare la ieşire*, şi $\det(I_{n_3} s - \tilde{A}_{33})$ este *polinomul zerourilor de decuplare la intrare – ieşire*. □

Exemplul 1.4

Se consideră sistemul de la Exemplul 1.2. Să se determine descompunerea canonică Kalman, funcţia de transfer, polii şi zerourile de decuplare.

De la Exemplele 1.2 şi 1.3 se ştie că:

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se constată că:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

ceea ce implică $\mathrm{Im}\,\mathcal{C} \supset \mathrm{Ker}\,\mathcal{O}$. Ca urmare:

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{Im}\,\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad n_1 = 1.$$

Fie acum:

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

ceea ce implică $n_2 = 1$, $n_3 = 0$ ($\mathcal{X}_{33} = \{0\}$) şi $n_4 = 1$.

În consecinţă, spaţiul stărilor, $\mathbb{R}^3$, se reprezintă prin următoarea sumă directă de subspaţii:

$$\mathbb{R}^3 = \overbrace{\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{=\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}} \oplus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}^{=\mathrm{Im}\,\mathcal{C}} \oplus \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{completare}}.$$

Folosind acum transformarea de similitudine (1.25), bazată pe:

$$S^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad S = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

se obţin:

$$\tilde{A} = S\,A\,S^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} -1 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

$$\tilde{B} = SB = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline -1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \tilde{C} = CS^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

În mod concret, $\tilde{A}_{11} = -1$, $\tilde{A}_{22} = -1$, $\tilde{A}_{44} = -1$, $\tilde{B}_1 = 1$, $\tilde{B}_2 = -1$, $\tilde{C}_2 = -2$ şi $\tilde{C}_4 = 1$. Urmează că: $d(s) = (s+1)^3$, $z^0(s) = (s+1)^2$ (cu un zero de decuplare la intrare şi un zero de decuplare la ieşire), $p(s) \equiv d_2(s) = s+1$, şi $G(s) = -2(s+1)^{-1}$. □

1.3. Forme canonice

a. Forma canonică controlabilă

Demonstrația Teoremei 1.16 sugerează o procedură de obținere a unei reprezentări intrare – stare – ieşire având o formă prestabilită în ipoteza că perechea (A, B) din (1.1), (1.2) este complet controlabilă şi $\operatorname{rang} B = m \leq n$. Aşadar $\operatorname{rang}\mathcal{C} = n$ şi în consecință se poate constitui o matrice de transformare S, pe baza matricei $\mathcal{C}$, procedând după cum urmează:

1º Se trec în revistă coloanele matricei de controlabilitate, $\mathcal{C}$, de la stânga la dreapta, şi se colectează numai acele coloane care sunt liniar independente (v. Anexa A) față de coloanele deja selectate.

2º Cu respectivele coloane se construieşte matricea:

$$F = \left[b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1 - 1} b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{\mu_2 - 1} b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{\mu_m - 1} b_m\right], \quad (1.76)$$

în care b_i, $i = \overline{1, m}$, sunt coloanele matricei B, şi μ_i, $i = \overline{1, m}$, obținuți implicit prin selecția de la 1º, se numesc *indicii de controlabilitate*, cu $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = n$.

Se remarcă în acest context că $\mu = \max_{1 \leq i \leq m} \mu_i$ este *indicele de controlabilitate a stării* sau *a perechii* (A, B), definit deja la Observația 1.3.

3º Se calculează:

$$F^{-1} = \left[f_1^T, f_2^T, \dots, f_n^T\right]^T, \quad (1.77)$$

în care f_i, $i = \overline{1, n}$, sunt liniile matricei F^{-1}.

4º Fie f_{k_i}, linia corespunzătoare indicelui

$$k_i = \sum_{j=1}^{i} \mu_j, \; i = \overline{1, m}.$$

Cu aceste linii se defineşte matricea:

$$S = \left[f_{k_1}^T, \dots, (A^T)^{\mu_1 - 1} f_{k_1}^T, f_{k_2}^T, \dots, (A^T)^{\mu_2 - 1} f_{k_2}^T, \dots, f_{k_m}^T, \dots, (A^T)^{\mu_m - 1} f_{k_m}^T\right]. \quad (1.78)$$

5º Se utilizează S şi S^{-1} în transformarea (1.28) şi se obține:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \cdots & \tilde{A}_{mm} \end{bmatrix},$$

$$\underset{\substack{(\mu_i \times \mu_i) \\ i=\overline{1,m}}}{\tilde{A}_{ii}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \times & \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}, \quad \underset{\substack{(\mu_i \times \mu_j) \\ i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}}{\tilde{A}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix}, \tag{1.79}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{B}_m \end{bmatrix}, \quad \underset{\substack{(\mu_i \times m) \\ i=\overline{1,m}}}{\tilde{B}_i} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \\ \uparrow \text{coloana } i \end{array}. \tag{1.80}$$

Prin $\times$ s-au marcat elementele, posibil, nenule.

$\tilde{C}$ nu are, în acest context, o formă remarcabilă.

Reprezentarea (1.26), (1.27) cu $\tilde{A}$ şi $\tilde{B}$ precizate mai sus se numeşte *forma canonică controlabilă* a sistemului (1.1), (1.2). Denumirea este justificată prin aceea că proprietatea de controlabilitate completă a perechii de matrice $(\tilde{A}, \tilde{B})$ este implicit asigurată prin definiție.

Este interesant de observat că numărul de coeficienți nenuli din $\tilde{A}$, alții decât elementele unitare, depinde de indicii de controlabilitate. Numărul lor maxim posibil este mn şi corespunde situației în care primele n coloane ale lui $\mathcal{C}$ sunt liniar independente (v. Anexa A).

Exemplul 1.5

Se consideră sistemul descris de ecuațiile (1.1), (1.2) în care matricele A, B, C, D au următoarele forme:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&-2\\-22&-11&-4&0\\-23&-6&0&-6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ D=0\,.$$

Se cere să se determine forma canonică controlabilă.

Se porneşte de la matricea de controlabilitate:

$$\mathcal{C}=\left[B,AB,A^2B,A^3B\right]=\begin{bmatrix}0&0&1&3&-6&-18&25&75\\0&0&-2&-6&13&39&-56&-168\\0&1&0&-4&0&16&-11&-97\\1&3&-6&-18&25&75&-90&-270\end{bmatrix},$$

din care se selectează coloanele 1 – 3 şi 5. Prin urmare: $\mu_1=3$ şi $\mu_2=1$.

În conformitate cu (1.76) şi (1.77), se obţine:

$$F=\begin{bmatrix}0&1&-6&0\\0&-2&13&0\\0&0&0&1\\1&-6&25&3\end{bmatrix},$$

$$F^{-1}=\begin{array}{l}\begin{bmatrix}28&11&-3&1\\13&6&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow f_3\ \ (k_1=\mu_1=3)\\ \leftarrow f_4\ \ (k_2=\mu_1+\mu_2=4)\end{array}.$$

Cu (1.78) se determină matricea transformării de similitudine (1.25):

$$S=\begin{bmatrix}f_3\\f_3A\\f_3A^2\\\hline f_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$S^{-1}=\left[\begin{array}{ccc:c}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right].$$

În aceste condiții din relațiile (1.28) rezultă matricele sistemului echivalent, în forma canonică controlabilă:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\-6&-11&-6&0\\ \hdashline -11&0&0&-4\end{array}\right],\ \tilde{B}=\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&0\\1&3\\ \hline 0&1\end{array}\right],\ \tilde{C}=\left[\begin{array}{ccc:c}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right].\ \square$$

b. Forma canonică observabilă

Această formă canonică poate fi construită prin dualitate, pornind de la forma canonică controlabilă.

Pentru sistemul (1.1), (1.2) cu $\operatorname{rang}\mathcal{O}=n$ şi $\operatorname{rang}C=p\le n$ se poate construi o matrice de transformare S, pe baza matricei $\mathcal{O}$, procedând după cum urmează:

1º Se trec în revistă liniile matricei de observabilitate, $\mathcal{O}$, de sus în jos, şi se colectează numai acele linii care sunt liniar independente față de liniile deja selectate (v. Anexa A).

2º Cu respectivele linii se construieşte matricea:

$$F=\left[c_1^T,..,(A^T)^{\nu_1-1}c_1^T,c_2^T,...,(A^T)^{\nu_2-1}c_2^T,..,c_p^T,...,(A^T)^{\nu_p-1}c_p^T\right]^T,\quad(1.81)$$

în care $c_i,\ i=\overline{1,p}$, sunt liniile matricei C, şi $\nu_i,\ i=\overline{1,p}$, obținuți în mod implicit prin selecția de la 1º, se numesc *indicii de observabilitate*, cu $\sum_{i=1}^{p}\nu_i=n$.

Se remarcă în acest context că $\nu=\max_{1\le i\le p}\nu_i$ este *indicele de observabilitate a stării* sau *a perechii* (C,A), deja definit la Observația 1.6.

3º Se calculează inversa matricei F:

$$F^{-1}=\left[f_1,\ f_2,\dots,f_n\right], \tag{1.82}$$

în care $f_i,\ i=\overline{1,n}$, sunt coloanele matricei F^{-1}.

4º Fie f_{k_i} coloana corespunzătoare indicelui

$$k_i=\sum\nolimits_{j=1}^{i}\nu_j,\ i=\overline{1,p}\,.$$

Cu aceste coloane se defineşte matricea:

$$S^{-1}=\left[f_{k_1},\dots,A^{\nu_1-1}f_{k_1},\dots,A^{\nu_2-1}f_{k_2},\dots,f_{k_p},\dots,A^{\nu_p-1}f_{k_p}\right]. \tag{1.83}$$

5º Se calculează S. Se utilizează S şi S^{-1} în relațiile (1.28) şi se obține:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{A}_{p1} & \cdots & \tilde{A}_{pp}\end{bmatrix},$$

$$\underset{\substack{(\nu_i\times\nu_i)\\ i=\overline{1,p}}}{\tilde{A}_{ii}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \times\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \times\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \times\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \times\end{bmatrix},\quad \underset{\substack{(\nu_i\times\nu_j)\\ i,j=\overline{1,p}\\ i\neq j}}{\tilde{A}_{ij}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \times\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times\end{bmatrix}, \tag{1.84}$$

$$\tilde{C}=\left[\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2,\dots,\tilde{C}_p\right],\quad \underset{\substack{(p\times\nu_i)\\ i=\overline{1,p}}}{\tilde{C}_i}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \times\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \times\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow \text{linia } i\,.\\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.85}$$

Şi în acest caz prin $\times$ s-au marcat elementele, posibil, nenule.

$\tilde{B}$ nu are, în această situaţie, o formă remarcabilă.

Reprezentarea (1.26), (1.27), cu $\tilde{A}$ şi $\tilde{C}$ precizate mai sus, se numeşte *forma canonică observabilă* a sistemului (1.1), (1.2). Denumirea se justifică prin aceea că proprietatea de observabilitate completă a perechii de matrice $(\tilde{C}, \tilde{A})$ este asigurată implicit prin definiţie.

Exemplul 1.6

Se consideră sistemul (1.1), (1.2) cu următoarele matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0 .$$

Se cere să se determine forma canonică observabilă.

Se porneşte de la matricea de observabilitate:

$$\mathcal{O}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se aleg din $\mathcal{O}^T / \mathcal{O}$ coloanele / liniile 1 – 3 şi 4 – 5. Prin urmare: $\nu_1 = 3,\ \nu_2 = 2$.

În conformitate cu (1.81), şi (1.82) se obţin matricele:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$F^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow f_3 & & \uparrow f_5\end{array}\\ k_1=\nu_1=3;\ k_2=\nu_1+\nu_2=5\end{array}.$$

Având în vedere (1.83), se determină matricea transformării de similitudine (1.25):

$$S^{-1}=\left[f_3, Af_3, A^2 f_3, f_5, Af_5\right]=\left[\begin{array}{ccc:cc}-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

$$S=\left[\begin{array}{ccccc}-1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right].$$

Cu acestea, din relaţiile (1.28) rezultă matricele sistemului echivalent, în forma canonică observabilă:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc}0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right],\ \tilde{B}=\left[\begin{array}{cc}-1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right],\ \tilde{C}=\left[\begin{array}{ccc:cc}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right].\ \square$$

2. Analiza bazată pe reprezentarea polinomială

Relațiile stabilite între reprezentarea polinomială (I.6.1), (I.6.2) şi reprezentarea intrare – stare – ieşire (1.1), (1.2) constituie calea firească a extinderii conceptelor de *controlabilitate* / *observabilitate a stării* la cele de *controlabilitate* / *observabilitate a stării parțiale*. Aceste extinderi se realizează *mutatis mutandis* (înlocuind în mod adecvat în Definițiile 1.1 şi 1.2 starea $x \in \mathbb{R}^n$ cu starea parțială $w \in \mathbb{R}^r$).

2.1. Controlabilitatea stării parțiale

Definiția 2.1

A. Un sistem dinamic se numeşte de *stare parțială complet controlabilă* dacă pentru orice $t_f > 0$ şi orice $w_f \in \mathbb{R}^r$, finiți, există o mărime de intrare $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, t_f]$, care transferă $w(t)$ din orice stare inițială $w(0) = w_0$ în orice stare finală $w(t_f) = w_f \neq w_0$.

B. În caz contrar sistemul se numeşte, după situație, de *stare parțială incomplet controlabilă* sau de *stare parțială necontrolabilă*. □

S-a arătat în secțiunea I.6.2 (v. relația (I.6.12)) că sistemul (I.6.1), (I.6.2) poate fi reprezentat prin matricea de sistem:

$$T(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & V(s) \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Totodată şi sistemul (1.1), (1.2) poate fi reprezentat prin matricea de sistem (v. secțiunea I.6.2, relația (I.6.13)):

$$T_1(s) \triangleq \begin{bmatrix} I_n s - A & -B \\ C & D(s) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Extinderile avute în vedere se bazează pe *echivalența în sens strict* (v. secțiunea I.6.3) între matricea de sistem (2.1) şi matricea de sistem (2.2), prin care controlabilitatea stării parțiale este echivalentă cu controlabilitatea stării, [84], [111], [141].

În aceste circumstanţe, prin analogie cu Teorema 1.13 se poate formula următorul rezultat de controlabilitate completă a stării parţiale.

Teorema 2.1

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială complet controlabilă dacă şi numai dacă pentru valorile proprii λ_i, $i = \overline{1,n}$, ale sistemului au loc:

$$\operatorname{rang}\left[P(\lambda_i) \mid -Q(\lambda_i)\right] = \dim P(s) = r, \quad i = \overline{1,n}\ .\square \tag{2.3}$$

În virtutea echivalenţei în sens strict şi prin analogie cu Teorema 1.11 se poate formula şi următorul rezultat.

Teorema 2.2

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială incomplet controlabilă dacă şi numai dacă are zerouri de decuplare la intrare. □

Utilizând acum ireductibilitatea reprezentării polinomiale (v. Definiţia I.6.3), se obţine următorul rezultat de controlabilitate completă.

Teorema 2.3

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială complet controlabilă dacă şi numai dacă matricele $P(s)$ şi $Q(s)$ din (I.6.3) sunt relativ prime la stânga. □

Se ştie că zerourile de decuplare la intrare ale sistemului (I.6.1), (I.6.2) (cu matricea de sistem (2.1)) sunt zerourile matricei (v. Teorema I.6.4):

$$T_u(s) \triangleq \left[P(s) \mid -Q(s)\right]. \tag{2.4}$$

Din acest fapt urmează că folosind Teorema 2.1 se poate formula şi următorul rezultat.

Teorema 2.4

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială complet controlabilă dacă şi numai dacă pentru toţi $s \in \mathbb{C}$ are loc:

$$\operatorname{nrang}\left[P(s) \mid -Q(s)\right] = \dim P(s) = r\ .\ \square \tag{2.5}$$

Exemplul 2.1

Se consideră sistemul cu reprezentarea polinomială de la Exemplul I.6.3. Să se studieze controlabilitatea parţială a stării.

Valorile proprii ale sistemului se determina ca zerouri ale polinomului:

$\det P(s) = s^2(s+1)(s+2)(s+3)$.

Acestea sunt: $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = -2,\ \lambda_5 = -3$.

Se evaluează: $\mathrm{rang}\left[P(\lambda_i) \mid -Q(\lambda_i)\right] = r_i,\ i = \overline{1,5}$. Pentru $\lambda_{1,2} = 0$ se obține:

$$\mathrm{rang}\left[P(0) \mid -Q(0)\right] = 2 < 3$$

şi conform Teoremei 2.1 sistemul este de stare parțială incomplet controlabilă. □

2.2. Observabilitatea stării parțiale

Definiția 2.2

A. Un sistem dinamic se numeşte de *stare parțială complet observabilă* dacă pe baza cunoaşterii mărimilor de intrare $u(t)$ şi de ieşire $y(t)$ peste un interval finit de timp $[0, t_f]$, $t_f > 0$, se poate determina starea parțială inițială $w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^n$ oricare ar fi aceasta.

B. În caz contrar sistemul se numeşte, după situație, de *stare parțială incomplet observabilă* sau de *stare parțială neobservabilă*. □

În virtutea argumentelor invocate deja la începutul acestui subcapitol, prin dualitate, pe baza Teoremei 2.1 se poate formula următorul rezultat de observabilitate completă a stării parțiale.

Teorema 2.5

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parțială complet controlabilă dacă şi numai dacă pentru valorile proprii $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, ale sistemului au loc:

$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix} P(\lambda_i) \\ \hdashline R(\lambda_i) \end{bmatrix} = \dim P(s) = r, \quad i = \overline{1,\, n} \text{ . □} \tag{2.6}$$

Utilizând acum ireductibilitatea reprezentării polinomiale (v. Definiția I.6.3), prin analogie cu Teorema 2.3 se obține următorul rezultat de observabilitate completă a stării parțiale.

Teorema 2.6

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parțială complet observabilă dacă şi numai dacă matricele $P(s)$ şi $R(s)$ din (I.6.3) sunt relativ prime la dreapta. □

Pornind de la teoremele precedente, în virtutea echivalenţei în sens strict şi prin analogie cu Teorema 1.12 se poate formula şi următorul rezultat.

Teorema 2.7

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială incomplet observabilă dacă şi numai dacă are zerouri de decuplare la ieşire. □

Se ştie că zerourile de decuplare la ieşire ale sistemului (I.6.1), (I.6.2) (cu matricea de sistem (2.1)) sunt zerourile matricei (v. Teorema I.6.6):

$$T_y(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) \\ --- \\ R(s) \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Din acest fapt urmează că folosind Teorema 2.5 se poate formula şi următorul rezultat.

Teorema 2.8

Sistemul (I.6.1), (I.6.2) este de stare parţială complet observabilă dacă şi numai dacă pentru toţi $s \in \mathbb{C}$ are loc:

$$\text{nrang}\begin{bmatrix} P(s) \\ --- \\ R(s) \end{bmatrix} = \dim P(s) = r\,. \;\square \tag{2.8}$$

Exemplul 2.2

Se consideră sistemul de la Exemplul 2.1. Să se studieze observabilitatea stării parţiale.

S-a arătat la Exemplul 2.1 că valorile proprii ale sistemului sunt: $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = -2,\ \lambda_5 = -3$. Pentru a utiliza Teorema 2.8 se evaluează: $\text{rang}\begin{bmatrix} P(\lambda_i) \\ R(\lambda_i) \end{bmatrix} = r_i,\ i = \overline{1,5}$. Pentru $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -1$ se obţin:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} P(0) \\ R(0) \end{bmatrix} = 2 < 3\,,\quad \text{rang}\begin{bmatrix} P(-1) \\ R(-1) \end{bmatrix} = 2 < 3\,.$$

Conform Teoremei 2.5 sistemul este de stare parţială incomplet observabilă. □

3. Controlabilitatea funcțională şi observabilitatea funcțională

Proprietățile de controlabilitate şi observabilitate, aşa cum au fost statuate prin Definițiile 1.1 – 1.3 şi 2.1, 2.2, au, în mod evident, un caracter punctual. Concret, de exemplu în cazul controlabilității ieşirii (conform Definiției 1.3), esențială este existența unei mărimi de intrare $u(t)$ care să realizeze evoluția ieşirii $y(t)$ din orice ieşire inițială $y(0)=y_0$ în orice ieşire finală $y(t_f)=y_f$, fără ca traiectoria dintre ele să fie impusă.

Din punctul de vedere al aplicațiilor există situații în care traiectoria pe care evoluează mărimea de ieşire $y(t)$ sub acțiunea mărimii de intrare $u(t)$ are o semnificație aparte. Acest lucru trebuie înțeles în sensul *existenței* unei mărimi de intrare $u(t)$ care determină (în sens cauzal) evoluția mărimii de ieşire $y(t)$ de-a lungul *oricărei traiectorii prescrise*. Evident că acest tip de controlabilitate a ieşirii are caracter *funcțional* şi se deosebeşte esențial de controlabilitatea ieşirii (v. paragraful 1.1.c), care are caracter *punctual*.

În mod similar şi prin dualitate, se introduce observabilitatea *funcțională* a intrării prin care se înțelege *posibilitatea determinării* mărimii de intrare (unice) $u(t)$, *oricare ar fi aceasta*, care produce o mărime de ieşire $y(t)$, cunoscută.

Ambele concepte s-au dovedit foarte utile în analiza sistemelor automate multivariabile (v. secțiunea IV.1.1), ca şi în unele aspecte legate de interconectarea sistemelor dinamice, [94].

Pornind de la acest mod de abordare, mai degrabă euristic, al controlabilității funcționale şi al observabilității funcționale, pentru a pregăti un studiu riguros, se vor da mai întâi câteva rezultate pregătitoare.

3.1. Inversabilitatea matricelor de transfer

Este de domeniul evidenței că în abordarea matematică a controlabilității / observabilității funcționale, problema de fond este aceea a *surjectivității* / *injectivității* transformării funcționale liniare $Y(s)=G(s)U(s)$ (v. (1.4.1)), prin matricea de transfer $G(s)$. Concret şi în ultimă analiză, această problemă este intim legată de existența unei *inverse la stânga* / *dreapta* a matricei $G(s)$.

Definiția 3.1

O matrice $G_R(s)$, de dimensiuni $m \times p$, se numeşte o *inversă la dreapta* a matricei de transfer $G(s)$ dacă:

$$G(s)G_R(s) = I_p . \square \tag{3.1}$$

Din această definiție rezultă imediat că existența unei inverse la dreapta a matricei $G(s)$ implică în mod necesar ca $p \le m$.

Teorema 3.1

Matricea de transfer $G(s)$ are o inversă la dreapta dacă şi numai dacă:

$$\operatorname{nrang} G(s) = p . \tag{3.2}$$

$\mathscr{D}$. *Necesitatea*. Se presupune că (3.2) nu are loc, adică $\operatorname{nrang} G(s) < p$. Dar, conform ipotezei, există o anumită matrice $\hat{G}_R(s)$ pentru care $G(s)\hat{G}_R(s) = I_p$. Atunci, conform inegalității Sylvester, privitor la rangul produsului $G(s)\hat{G}_R(s)$ se poate scrie:

$$p = \operatorname{rang} I_p = \operatorname{nrang} G(s)\hat{G}_R(s) \le \min[\operatorname{nrang} G(s), \operatorname{nrang} \hat{G}_R(s)] < p .$$

Evident, acest rezultat este absurd şi, ca urmare, necesitatea este dovedită.

Suficiența. Dacă $\operatorname{nrang} G(s) = p$, atunci există, în mod particular, o matrice M constantă, de dimensiuni $m \times p$ şi $\operatorname{rang} M = p$, astfel încât $G(s)M$ este pătratică şi nesingulară. De exemplu, o astfel de matrice este cea care colectează în $G(s)M$ toate coloanele liniar independente ale matricei $G(s)$. În aceste condiții este posibil să se construiască:

$$\text{(a1)}\quad G_R(s) = M\left[G(s)M\right]^{-1} . \tag{3.3}$$

Aceasta este o inversă la dreapta a matricei $G(s)$, fapt verificabil folosind (3.1). □

Este evident că inversa la dreapta a matricei $G(s)$, conform relației (3.3), nu este unică, deoarece matricea M nu este unică. În general, M poate fi înlocuită cu o matrice polinomială sau cu elemente raționale. O astfel de inversă este *pseudo-inversa la dreapta* (numită şi *inversa Moore – Penrose la dreapta*):

$$\text{(a2)}\quad G_R^{+}(s) = G^T(s)\left[G(s)G^T(s)\right]^{-1} . \tag{3.4}$$

Definiţia 3.2

O matrice $G_L(s)$, de dimensiuni $m \times p$, se numeşte o *inversă la stânga* a matricei de transfer $G(s)$ dacă:

$$G_L(s)G(s) = I_m \, . \, \square \tag{3.5}$$

Din această definiţie rezultă imediat că existenţa unei inverse la stânga a matricei $G(s)$ implică în mod necesar ca $m \leq p$.

Teorema 3.2

Matricea de transfer $G(s)$ are o inversă la stânga dacă şi numai dacă:

$$\mathrm{nrang}\, G(s) = m \, . \, \square \tag{3.6}$$

Demonstraţia este similară cu aceea a Teoremei 3.1.

Analog cu (a1) şi (a2), se pot construi următoarele două inverse la stânga:

(b1) $$G_L(s) = \left[N\, G(s)\right]^{-1} N \, , \tag{3.7}$$

în care N este o matrice constantă, de dimensiuni $m \times p$ şi $\mathrm{rang}\, N = m$, care colectează în $N\, G(s)$ toate liniile liniar independente ale matricei $G(s)$.

(b2) $$G_L^{+}(s) = \left[G^T(s)\, G(s)\right]^{-1} G^T(s) \, , \tag{3.8}$$

care este *pseudo-inversa la stânga* (numită şi *inversa Moore – Penrose la stânga*).

În cazul soluţionării ecuaţiilor matriceale pseudo-inversele sunt unice [8].

Exemplul 3.1

Se consideră matricea de transfer de la Exemplul I.4.2.

Să se studieze existenţa unei inverse.

Întrucât $p = 2 < m = 3$, rezultă că este posibilă numai existenţa unei inverse la dreapta. Într-adevăr, $\mathrm{nrang}\, G(s) = 2$ şi conform relaţiei (3.3) se poate scrie:

$$G_R(s) = M\left(G(s)M\right)^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s+2 & s+2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \, \square$$

3.2. Controlabilitatea funcțională a ieşirii

Definiția 3.3

A. Un sistem dinamic se numeşte de *ieşire complet controlabilă funcțional* dacă există o mărime de intrare $u(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, care generează o evoluție dorită a mărimii de ieşire $y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, oricare ar fi aceasta.

B. În caz contrar şi în mod nuanțat sistemul se numeşte de *ieşire incomplet controlabilă funcțional* sau de *ieşire necontrolabilă funcțional*. □

Teorema 3.3

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Sistemul (I.4.1) este de ieşire complet controlabilă funcțional.

(ii) $G(s)$ are o inversă la dreapta.

(iii) $\operatorname{nrang} G(s) = p$.

$\mathscr{D}$. Conform Teoremei 3.1 rezultă $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Condiția (i) este echivalentă cu existența unei soluții $U(s)$ a ecuației (I.4.1) oricare ar fi $Y(s)$. Folosind *inversa generalizată* $G^g(s)$ a lui $G(s)$, [8], se scrie:

$$U(s) = G^g(s)Y(s) + \left[G^g(s)G(s) - I_m\right]\hat{U}(s) , \qquad (3.9)$$

care există dacă şi numai dacă pentru orice $Y(s)$ are loc *condiția de consistență*:

$$\left[G(s)G^g(s) - I_p\right]Y(s) = 0 . \qquad (3.10)$$

$\hat{U}(s) \in \mathbb{C}^m$ este arbitrar, iar inversa generalizată $G^g(s)$ se defineşte prin:

$$G(s)G^g(s)G(s) = G(s) . \qquad (3.11)$$

Pornind de la (3.1), şi consistent cu (3.11), se adoptă:

$$G^g(s) = G_R(s) . \qquad (3.12)$$

Înlocuind (3.12) în (3.9) se obține soluția:

$$U(s) = G_R(s)Y(s) + \left[G_R(s)G(s) - I_m\right]\hat{U}(s) , \qquad (3.13)$$

care există pentru orice $Y(s)$. Aceasta deoarece condiția de consistență (3.10) are loc pentru orice (3.12) cu (3.1) şi pentru orice $Y(s)$. Urmează că $(i) \Leftrightarrow (ii)$. □

Exemplul 3.2

Pentru sistemul de la Exemplu 1.1, cu $b = c = 0$, să se analizeze controlabilitatea funcţională a ieşirii.

Pentru $b = c = 0$ se obţin:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}\begin{bmatrix} s+4 & s+4 & 0 \\ s+4 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}, \ \det G(s) \not\equiv 0, \ \ G_R(s) = G^{-1}(s).$$

Ca urmare sistemul este de ieşire complet controlabilă funcţional. □

Observaţia 3.1

Se reaminteşte că sistemul de la Exemplul 1.1, pentru cazul $b = c = 0$, are două zerouri de decuplare – unul la intrare şi unul la ieşire. Conform Teoremelor 1.11 şi 1.12 sistemul este de stare incomplet controlabilă şi incomplet observabilă. Acest fapt nu are vreo influenţă asupra controlabilităţii funcţionale a ieşirii. □

3.3. Observabilitatea funcţională a intrării

Definiţia3. 4

A. Un sistem dinamic se numeşte de *intrare complet observabilă funcţional* dacă pe baza cunoaşterii evoluţiei mărimii de ieşire $y(t),\ t \in \mathbb{R}_+$, se poate determina mărimea de intrare (unică) $u(t),\ t \in \mathbb{R}_+$, oricare ar fi aceasta.

B. În caz contrar şi în mod nuanţat sistemul se numeşte de *intrare incomplet observabilă funcţional* sau de *intrare neobservabilă funcţional*. □

Teorema 3.4

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Sistemul (I.4.1) este de intrare complet observabilă funcţional.

(ii) $G(s)$ are o inversă la stânga.

(iii) $\operatorname{nrang} G(s) = m$.

$\mathscr{D}$. Conform Teoremei 3.2 rezultă $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Condiţia (i) este echivalentă cu existenţa unei soluţii (unice) $U(s)$ a ecuaţiei (I.4.1) pentru un $Y(s)$ dat (generat de $U(s)$). S-a văzut că ecuaţia (I.4.1) are soluţia (3.9) dacă şi numai dacă are loc (3.10), cu (3.11).

Pornind de la (3.5), şi consistent cu (3.11), se adoptă:

$$G^g(s) = G_L(s)\,. \tag{3.14}$$

Urmează că $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Într-adevăr, înlocuind (3.14) în (3.9) rezultă soluția:

$$U(s) = G_L(s)Y(s) \tag{3.15}$$

(unică pentru $G_L(s) = G_L^+(s)$, v. relația (3.8)), care există dacă şi numai dacă:

$$\left[G(s)G_L(s) - I_p\right]Y(s) = 0\,. \tag{3.16}$$

Condiția (3.16) rezultă din (3.10) şi (3.14). Evident, ea este satisfăcută deoarece $Y(s)$ nu este arbitrar, ci este generat (cauzal) de $U(s)$ conform ecuației (I.4.1). □

Exemplul 3.3

Pentru sistemul de la Exemplu 1.1, cu $b = c = 0$, să se analizeze observabilitatea funcțională a intrării.

La Exemplul 3.2 s-a arătat că există $G^{-1}(s)$. Urmează că sistemul este de intrare complet observabilă funcțional. □

Observația 3.2

Sistemul de la Exemplul 1.1 are două zerouri de decuplare (la intrare şi la ieşire), adică este de stare incomplet controlabilă / observabilă (v. Teoremele 1.11, 1.12). Acest fapt nu influențează observabilitatea funcțională a intrării. □

Observația 3.3

Controlabilitatea funcțională a ieşirii şi observabilitatea funcțională a intrării sunt *proprietăți duale*. Pentru a susține această afirmație se definește sistemul:

$$Y_*(s) = G^T(s)U_*(s),\ \ u_* = \mathscr{L}^{-1}\{U_*\} \in \mathbb{R}^p,\ y_* = \mathscr{L}^{-1}\{Y_*\} \in \mathbb{R}^m\ , \tag{3.17}$$

care este dualul sistemului (I.4.1). Conform Teoremelor 3.1 şi 3.2, se poate construi o inversă la dreapta a sistemului (I.4.1) pe baza unei inverse la stânga a dualului (3.17) şi viceversa. Ca urmare se poate formula următorul rezultat. □

Teorema 3.5

Sistemul (I.4.1) este de ieşire / intrare complet controlabilă / observabilă funcțional dacă şi numai dacă dualul său (3.17) este de intrare / ieşire complet observabilă / controlabilă funcțional. □

Observaţia 3.4

Simultaneitatea controlabilităţii şi observabilităţii funcţionale complete a ieşirii şi respectiv intrării este echivalentă cu existenţa inversei $G^{-1}(s)$, iar aceasta implică în mod necesar $m = p$. □

Observaţia 3.5

Între controlabilitatea / observabilitatea stării (parţiale) şi controlabilitatea / observabilitatea funcţională a intrării / ieşirii nu există relaţii de interdependenţă. Acest fapt a fost ilustrat în cadrul Exemplelor 3.2. şi 3.3. □

3.4. Condiţii de inversabilitate

Condiţiile de inversabilitate (3.2) şi (3.6) sunt dificil de aplicat deoarece $G(s)$ este o matrice cu elemente raţionale. O altă abordare, interesantă şi teoretic, se bazează pe reprezentarea de stare. Sistemul (I.4.1) are forma (I.2.1), (I.2.2), iar inversul său (la dreapta – (3.13) sau la stânga – (3.15)) are reprezentarea:

$$\dot{z} = \overline{A}z + \overline{B}y, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; z \in \mathbb{R}^{\overline{n}}, \; y \in \mathbb{R}^p, \tag{3.18}$$

$$u = \overline{C}z + \overline{D}(\cdot)y, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{3.19}$$

Matricea de transfer a acestui sistem are expresia:

$$\overline{G}(s) = \overline{C}(I_{\overline{n}}s - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D}(s). \tag{3.20}$$

De exemplu, pentru inversa la dreapta are loc $G_R(s) = \overline{G}(s)$ şi, totodată trebuie să fie satisfăcută (3.1) cu (I.4.2) şi (3.20), adică:

$$\left[C(I_n s - A)^{-1}B + D(s)\right]\left[\overline{C}(I_{\overline{n}}s - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D}(s)\right] = I_p .$$

Se consideră acum transpusa relaţiei precedente şi se obţine:

$$\left[\overline{B}^T(I_{\overline{n}}s - \overline{A}^T)^{-1}\overline{C}^T + \overline{D}^T(s)\right]\left[B^T(I_n s - A^T)^{-1}C^T + D^T(s)\right] = I_p .$$

Această relaţie conduce la constatarea că sistemul următor:

$$\dot{z}_* = \overline{A}^T z_* + \overline{C}^T y_*, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; z_* \in \mathbb{R}^{\overline{n}}, \; y_* \in \mathbb{R}^m,$$

$$u_* = \overline{B}^T z_* + \overline{D}^T(\cdot)y_*, \quad u_* \in \mathbb{R}^p,$$

care este dualul sistemului (3.18), (3.19), este în acelaşi timp inversul la stânga al sistemului:

$$\dot{x}_* = A^T x_* + C^T u_*, \qquad t \in \mathbb{R}_+,\ x_* \in \mathbb{R}^n,\ y_* \in \mathbb{R}^p,$$
$$y_* = B^T x_* + D^T(\cdot) u_*,\ y_* \in \mathbb{R}^m.$$

Acesta, la rândul său, este dualul sistemului (I.2.1), (I.2.2).

Desigur că se poate considera că (3.20) este o inversă la stânga, dar rezultatul la care se va ajunge este previzibil prin dualitate. Concluzia este cea deja enunțată prin Observația 3.3 şi Teorema 3.5.

În situația în care un sistem dat este cunoscut prin reprezentarea de stare (I.2.1), (I.2.2), cu $D(\cdot) = D =$ constant, câteva condiții de inversabilitate la dreapta, echivalente între ele, sunt cuprinse în rezultatul următor. Condiții similare de inversabilitate la stânga se pot obține prin dualitate.

Teorema 3.6

Pentru sistemul reprezentat prin ecuațiile (I.2.1), (I.2.2), cu $D(\cdot) = D =$ constant, afirmațiile următoarele sunt echivalente:

(i) Sistemul este inversabil la dreapta (complet controlabil funcțional la ieşire):

(ii) $\operatorname{rang}\Phi(A, B, C, D) = p(n+1)$, (3.21)

$$\Phi(A, B, C, D) \triangleq \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B & \dots & CA^{2n-1}B \\ 0 & D & CB & \dots & CA^{n-2}B & \dots & CA^{2n-2}B \\ 0 & 0 & D & \dots & CA^{n-3}B & \dots & CA^{2n-3}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

(iii) $\operatorname{rang}\Psi(A, B, C, D) = (n+1)(p+1)$, (3.23)

$$\Psi(A, B, C, D) \triangleq \begin{bmatrix} -A & -B & I_n & 0 & 0 & & & \\ C & D & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -A & -B & I_n & & & \\ 0 & 0 & C & D & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & -A & -B & I_n \\ & & & & & C & D & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

$$(iv)\ \ \text{nrang}\begin{bmatrix} I_n s - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p\,.\ \square \tag{3.25}$$

Pe baza relaţiilor (3.21), (3.23) şi (3.25) şi pentru $D = 0$ este posibilă obţinerea unor condiţii aplicabile practic, mai puţin laborioase sub aspectul calculelor.

Se porneşte de la faptul că pentru $\text{rang}\, B = m \leq n$ există o matrice M, de ordinul n, nesingulară, astfel încât:

$$\tilde{B} \triangleq M\,B = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Folosind transformarea $\tilde{x} = M\,x$ în (I.2.1), (I.2.2) se obţine sistemul echivalent (1.26), (1.27) cu (3.26) şi cu matricele:

$$\tilde{A} = MAM^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{m} & \underbrace{\qquad}_{n-m} \end{array} \end{array},\quad \tilde{C} = CM = \big[\underbrace{\tilde{C}_1}_{m}\quad \underbrace{\tilde{C}_2}_{n-m}\big],\quad \tilde{D} = 0\,. \tag{3.27}$$

Teorema 3.7

Pentru sistemul (I.2.1), (I.2.2), care este echivalent cu (1.26), (1.27), cu (3.26), (3.27), următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Sistemul este inversabil la dreapta (complet controlabil funcţional la ieşire).

$$(ii)\ \ \text{nrang}\left[\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 (I_{m-n} s - \tilde{A}_{22})^{-1} \tilde{A}_{21}\right] = p\,. \tag{3.28}$$

$$(iii)\ \ \text{rang}\ \Phi(\tilde{A}_{22}, \tilde{A}_{21}, \tilde{C}_2, \tilde{C}_1) = p(n - m + 1)\,. \tag{3.29}$$

$$(iv)\ \ \text{rang}\ \Psi(\tilde{A}_{22}, \tilde{A}_{21}, \tilde{C}_2, \tilde{C}_1) = (n - m + 1)(n - m + p)\,. \tag{3.30}$$

$$(v)\ \ \text{nrang}\begin{bmatrix} I_{n-m} s - \tilde{A}_{22} & -\tilde{A}_{21} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{C}_1 \end{bmatrix} = n - m + p\,.\ \square \tag{3.31}$$

Matricele Φ şi Ψ au fost definite prin relaţiile (3.22) şi respectiv (3.24).

Condiţii similare de inversabilitate la stânga se pot obţine prin dualitate.

Exemplul 3.4

Se consideră sistemul (I.2.1), (I.2.1) cu $n=3,\ m=p=2$ şi:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\-1&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ D=0\,.$$

Să se afle dacă este inversabil la dreapta (complet controlabil la intrare).

În conformitate cu (3.26) se poate scrie:

$$\tilde{B}=MB=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hdashline 0&0\end{array}\right].$$

În continuare se utilizează (3.27):

$$\tilde{A}=MAM^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}-2&4&4\\0&4&1\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\underbrace{0\qquad 2}_{\tilde{A}_{21}}}&\underbrace{5}_{\tilde{A}_{22}}\end{array}\right],$$

$$\tilde{C}=CM=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}\multicolumn{2}{c:}{\overbrace{1\qquad 0}^{\tilde{C}_1}}&\overbrace{0}^{\tilde{C}_2}\\2&2&1\end{array}\right],\quad \tilde{D}=0\,.$$

Se observă că (3.31) este satisfăcută deoarece $n-m+p=3-2+2=3$ şi

$$\text{nrang}\left[\begin{array}{c:c}I_{n-m}s-\tilde{A}_{22}&-\tilde{A}_{21}\\ \hdashline \tilde{C}_2&\tilde{C}_1\end{array}\right]=\text{nrang}\left[\begin{array}{c:cc}s-5&0&-2\\ \hdashline 0&1&0\\1&2&2\end{array}\right]=3\,.$$

Urmează că sistemul considerat este inversabil la dreapta (complet controlabil funcţional la ieşire). În mod similar se poate arăta că sistemul este inversabil la stânga (complet observabil funcţional la intrare). □

4. Realizări ale matricei de transfer

4.1. Realizări directe

S-a arătat la I.4.1 că problema obţinerii unei *realizări* a matricei de transfer $G(s)$, de dimensiuni $p \times m$ şi cu elemente raţionale, se reduce la determinarea matricelor A, B şi C de dimensiuni respectiv $n \times n$, $n \times m$, şi $p \times n$ astfel încât:

$$C(I_n s - A)^{-1} B = G^0(s)\,, \tag{4.1}$$

în care $G^0(s)$ este partea strict proprie, unic determinată, a matricei $G(s)$ (v. relaţia (I.4.7)). În ceea ce priveşte partea polinomială $D(s)$ a matricei $G(s)$, prin transformarea inversă Laplace, corespondentul ei în (I.2.2) este $D(^{\boldsymbol{\cdot}})$.

Pentru aprecierea posibilităţilor de soluţionare a problemei (4.1), de mare utilitate sunt Teoremele 1.19 şi 1.21 (v. paragraful 1.2.c). Conform relaţiei (1.72), $G^0(s)$ este complet determinată de tripletul $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2)$ al subsistemului de stare complet controlabilă şi complet observabilă. Restul subsistemelor (de stare necontrolabilă şi / sau neobservabilă) nu au nici o contribuţie în $G^0(s)$. Consecinţa acestui fapt este că problema (4.1) nu are soluţie unică. Şi anume în sensul că, pe de o parte, ordinul n al realizării (A, B, C) nu este unic şi, pe de altă parte, pentru n dat, conform Teoremei 1.20 (v. paragraful 1.2.c), există o infinitate de triplete (A, B, C), echivalente între ele (prin relaţii de forma (1.28)) care satisfac (4.1).

Desigur că, în aceste circumstanţe, prima problemă de rezolvat este aceea a existenţei unei realizări (A, B, C) conform relaţiei (4.1).

Teorema 4.1

Fiind dată matricea strict proprie $G^0(s)$, de dimensiuni $p \times m$, există o realizare (A, B, C) conform relaţiei (4.1) cu n adecvat ales.

$\mathscr{D}$. Se vor da două demonstraţii constructive. Fie:

$$q(s) = s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_{r-1} s + a_r$$

c.m.m.m.c. al numitorilor tuturor elementelor neidentic nule ale matricei $G^0(s)$.

Ca urmare, $q(s)G^0(s)$ este o matrice polinomială şi se poate scrie:

$$G^0(s) = q^{-1}(s)\sum_{k=1}^{r} G_k^0 s^{r-k} \,, \tag{4.2}$$

în care G_k^0, $k=\overline{1,r}$, sunt matrice $p\times m$ constante, unic determinate. Se va arăta în continuare că pe această bază se pot construi două realizări conform relației (4.1), cu n adecvat ales.

<u>Prima demonstrație</u>. Fie

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 I_m & \cdots & -a_{r-1}I_m & -a_r I_m \\ I_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & I_m & 0 \end{bmatrix}}_{(mr\times mr)}, \; B = \underbrace{\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(mr\times m)}, \; C = \underbrace{\begin{bmatrix} (G_1^0)^T \\ (G_2^0)^T \\ \vdots \\ (G_{r-1}^0)^T \\ (G_r^0)^T \end{bmatrix}^T}_{(p\times mr)} . \tag{4.3}$$

Cu acestea se calculează următoarea matrice de dimensiuni $mr\times m$:

$$Z = (I_{mr}s - A)^{-1}B \,,$$

În acest scop se multiplică la stânga cu $(I_{mr}s - A)$ şi se obține:

$$sZ - AZ = B \,.$$

Se înlocuiesc A şi $Z \triangleq \left[Z_1^T,\ldots,Z_r^T\right]^T$ ($Z_k, k=\overline{1,r}$, de ordinul m). Rezultă:

$$sZ_1 + \sum_{k=1}^{r} a_k Z_k = I_m, \quad sZ_{i+1} - Z_i = 0, \quad i=\overline{1,r-1}.$$

Mai departe, prin substituții succesive, se obțin:

$$Z = \left[s^{r-1}I_m, s^{r-2}I_m,\ldots,I_m\right]^T Z_r, \quad Z_r = q^{-1}(s)I_m \,.$$

În aceste circumstanțe se poate scrie:

$$C(I_{mr}s - A)^{-1}B = CZ = \left[G_1^0, G_2^0,\ldots,G_r^0\right] q^{-1}(s)\left[s^{r-1}I_m, s^{r-2}I_m,\ldots,I_m\right]^T =$$

$$= q^{-1}(s)\sum_{k=1}^{r} G_k^0 s^{r-k} = G^0(s) \,.$$

A doua demonstrație. Fie

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 I_p & I_p & \cdots & 0 \\ -a_2 I_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{r-1} I_p & 0 & \cdots & I_p \\ -a_r I_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{(pr\times pr)},\ B=\underbrace{\begin{bmatrix} G_1^0 \\ G_2^0 \\ \vdots \\ G_{r-1}^0 \\ G_r^0 \end{bmatrix}}_{(pr\times m)},\ C=\underbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{(p\times pr)}. \tag{4.4}$$

Cu acestea se calculează mai întâi matricea de dimensiuni $p\times pr$:

$W = C(I_{pr}s - A)^{-1}$.

În acest scop se multiplică la dreapta cu $(I_{pr}s - A)$ şi se obține:

$sW - WA = C$.

Se înlocuiesc A şi $W \triangleq [W_1, W_2, ..., W_r]$ ($W_k, k=\overline{1,r}$, de ordinul p). Rezultă:

$sW_1 + \sum_{k=1}^{r} a_k W_k = I_p,\quad sW_{i+1} - W_i = 0,\ i=\overline{1,r-1}$.

Mai departe, prin substituții succesive, se obțin:

$W = W_r\left[s^{r-1}I_p,\, s^{r-2}I_p, ..., I_p\right],\quad W_r = q^{-1}(s)I_p$.

În această situație se poate scrie:

$$C(I_{pr}s - A)^{-1}B = WB = q^{-1}(s)\left[s^{r-1}I_p,\, s^{r-2}I_p, ..., I_p\right]\left[(G_1^0)^T, ..., (G_r^0)^T\right]^T =$$

$$= q^{-1}(s)\sum_{k=1}^{r} G_k^0 s^{r-k} = G^0(s)\ .\ \square$$

Relațiile (4.3) şi (4.4) oferă posibilitatea obținerii, de o manieră foarte simplă, a unei realizări a matricei de transfer strict proprii (4.2). Din acest motiv (4.3) şi (4.4) se mai numesc şi *realizări directe*. Proprietățile lor de controlabilitate şi observabilitate a stării se prezintă în rezultatele următoare.

Teorema 4.2

Fie matricea de transfer $G^0(s)$, $p\times m$, strict proprie, cu $q(s)$ c.m.m.m.c. al numitorilor tuturor elementelor neidentic nule şi $q_G(s)$ polinomul polilor lui $G^0(s)$.

(a1) Realizarea directă (4.3) este de stare complet controlabilă.
(a2) Ea este de stare complet observabilă dacă şi numai dacă:

$$q_G(s) \equiv q^m(s)\,. \tag{4.5}$$

(b1) Realizarea directă (4.4) este de stare complet observabilă.
(b2) Ea este de stare complet controlabilă dacă şi numai dacă:

$$q_G(s) \equiv q^p(s)\,. \tag{4.6}$$

$\mathscr{D}$. (a1) Conform Teoremei 1.2 (v. 1.1.a) se poate scrie:

$$\operatorname{rang} \underbrace{\mathscr{C}_{(r-1)m+1}}_{\substack{\text{dimensiuni:}\\ mr\times m[(r-1)m+1]}} = \operatorname{rang}\left[\begin{array}{ccccc:cc} I_m & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots \\ 0 & I_m & \cdots & \times & \times & \times & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m & \times & \times & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_m & \times & \cdots \end{array}\right] = mr\,, \tag{4.7}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{mr \text{ coloane}}$$

unde $\times$ sunt submatrice determinabile, dar nerelevante în cadrul demonstraţiei. Este evident că (4.3) este de stare complet controlabilă.

(a2) Pentru analiza observabilităţii stării se au în vedere Teoremele 1.12 şi 1.14 (v. 1.1.d). Mai întâi se evaluează polinomul caracteristic al matricei A. Întrucât A din (4.3) este o matrice de tip Frobenius de submatrice, după calcule relativ simple, bazate pe dezvoltarea după prima linie de submatrice, se obţine:

$$d(s) = \det(I_{mr}s - A) = q^m(s)\,. \tag{4.8}$$

Întrucât $q_G(s)$ este polinomul polilor, rezultă că

$$z^0_{\text{ies}}(s) = d(s)/q_G(s) = q^m(s)/q_G(s) \tag{4.9}$$

este polinomul zerourilor de decuplare la ieşire. Motivul este că realizarea (4.3) nu are zerouri de decuplare la intrare deoarece este de stare complet controlabilă (v. Teoremele 1.11 şi 1.13 de la 1.1.d). Este clar că, având în vedere Teoremele 1.12 şi 1.14 (v. 1.1.d), realizarea (4.3) este de stare complet observabilă dacă şi numai dacă $z^0_{\text{ies}}(s) = q^m(s)/q_G(s) \equiv 1$. Acest fapt este echivalent cu (4.5).

($b1$) Conform Teoremei 1.6 (v. 1.1.b) se poate scrie:

$$\text{rang} \underbrace{\mathcal{O}_{(r-1)p+1}}_{\substack{\text{dimensiuni:} \\ p[(r-1)p+1]\times pr}} = \text{rang} \left[\begin{array}{ccccc} I_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \times & I_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \times & \times & \cdots & I_p & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & I_p \\ \hline \times & \times & \cdots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \left.\vphantom{\begin{array}{c} I \\ I \\ I \\ I \\ I \end{array}}\right\} pr \text{ linii} = pr\,, \qquad (4.10)$$

unde $\times$ sunt submatrice determinabile, dar nerelevante în cadrul demonstrației. Este evident că (4.4) este de stare complet observabilă.

($b2$) În continuare se face uz de Teoremele 1.11 şi 1.13 (v. 1.1.d). Matricea A din (4.4) este o matrice de tip Frobenius de submatrice. Prin urmare, polinomul caracteristic are expresia:

$$d(s) = \det(I_{pr}s - A) = q^{p}(s)\,. \qquad (4.11)$$

În consecință:

$$z^0_{\text{int}}(s) = d(s)/q_G(s) = q^{p}(s)/q_G(s) \qquad (4.12)$$

este polinomul zerourilor de decuplare la intrare. Motivul este că realizarea (4.4) nu are zerouri de decuplare la ieşire deoarece este de stare complet observabilă (v. Teoremele 1.12 şi 1.14 de la 1.1.d). Este evident că, ținând seama de Teoremele 1.11 şi 1.13 (v. 1.1.d), realizarea (4.4) este de stare complet controlabilă dacă şi numai dacă $z^0_{\text{int}}(s) = q^{p}(s)/q_G(s) \equiv 1$. Acest fapt este echivalent cu (4.6). □

Observația 4.1

Proprietățile evidențiate de Teorema 4.2 justifică utilizarea următoarelor denumiri: (4.3) se numeşte *realizare directă de stare complet controlabilă*, iar (4.4) se numeşte *realizare directă de stare complet observabilă*. □

Exemplul 4.1

Se consideră matricea de transfer de la exemplul I.4.2.

Să se determine realizările directe (4.3) şi (4.4) şi să se analizeze respectiv observabilitatea stării şi controlabilitatea stării.

Matricea de transfer de la Exemplul I.4.2 poate fi pusă sub forma:

$$G^0(s) = \frac{1}{\underbrace{s^3+2s^2-s-2}_{=q(s)}}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(a) Conform cu (4.3), pentru $r=3, m=3, p=2$ şi $mr=9$, se scrie:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], C = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hdashline 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ \hdashline -2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right]^T.$$

De la exemplul I.4.2 se ştie că polinomul polilor are forma:

$q_G(s) = (s-1)(s+1)(s+2)^2$.

Pe de altă parte polinomul caracteristic (relația (4.8)) este

$d(s) = q^3(s) = \left[(s-1)(s+1)(s+2)\right]^3$.

Aceasta înseamnă că polinomul zerourilor de decuplare la ieşire are expresia:

$z^0_{\text{ies}}(s) = d(s)/q_G(s) = (s-1)^2(s+1)^2(s+2)$.

Realizarea este incomplet observabilă cu $\dim \mathcal{X}_{\text{no}} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{O}_7 = 5$.

(b) În conformitate cu (4.4), pentru $pr = 6$, se poate scrie:

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right], C = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

În acest caz polinomul caracteristic (v. relația (4.11)) are forma:

$$d(s) = q^2(s) = \left[(s-1)(s+1)(s+2)\right]^2 .$$

Aceasta înseamnă că polinomul zerourilor de decuplare la intrare are forma:

$$z_{\text{int}}^0(s) = d(s)/q_G(s) = (s-1)(s+1) .$$

Realizarea este incomplet controlabilă cu $\dim \mathcal{X}_{\text{c}} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{C}_3 = 4$. □

Observația 4.2

Se remarcă faptul că în realizările directe se pot introduce zerouri de decuplare (la ieşire – în realizarea directă de stare complet controlabilă şi la intrare – în cea de stare complet observabilă), care nu au, în mod necesar, corespondente în structura sistemului real, reprezentat prin matricea de transfer considerată. □

4.2. Realizări minimale

La exemplul 4.1 s-a văzut că pentru una şi aceeaşi funcție de transfer strict proprie este posibilă determinarea unor realizări de ordine diferite. În mod firesc se poate formula următoarea definiție.

Definiția 4.1

O realizare (A, B, C) a matricei de transfer $G^0(s)$, conform cu (4.1), se numeşte *minimală* dacă $\dim A = n$ este cea mai mică posibil. □

Teorema 4.3

O realizarea (A, B, C) a matricei de transfer $G^0(s)$, conform cu (4.1), este minimală dacă şi numai dacă este de stare complet controlabilă şi complet observabilă.

$\mathscr{D}$. *Necesitatea* se demonstrează imediat folosind Teorema 1.19 (.v. 1.2.c).

Suficiența. Fie (A, B, C) o realizare de stare complet controlabilă şi complet observabilă a matricei de transfer $G^0(s)$, conform relației (4.1). Pentru demonstrația prin reducere la absurd, fie $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ o altă realizare de stare complet controlabilă a aceleiaşi matrice de transfer cu $\dim \hat{A} = \hat{n} < n$. Evident că:

$$C(I_n s - A)^{-1} B \equiv \hat{C}(I_{\hat{n}} s - \hat{A})^{-1} \hat{B} . \tag{4.13}$$

Se utilizează în continuare dezvoltările în serie:

$$(I_n s - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1} s^{-i}, \quad (I_{\hat{n}} s - \hat{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{A}^{i-1} s^{-i}. \quad (4.14)$$

Ele sunt extinderi la cazul matriceal ale seriei geometrice: $(1-x)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}$.

Din (4.13) şi (4.14) se obţine:

$$CA^{i-1}B = \hat{C}\hat{A}^{i-1}\hat{B}, \ i = 1,2,3,.... \ . \quad (4.15)$$

În această situaţie se evaluează produsul $\mathcal{O}\mathcal{C}$ în care se înlocuiesc (4.15):

$$\mathcal{O}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB,...,A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \cdots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} \\ \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^2\hat{B} & \cdots & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} & \cdots & \hat{C}\hat{A}^{2n-2}\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B},...,\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \hat{\mathcal{O}}_n \hat{\mathcal{C}}_n. \quad (4.16)$$

Întrucât $\operatorname{rang}\mathcal{O} = n$ şi $\operatorname{rang}\mathcal{C} = n$ din (4.16) rezultă:

$$n = \operatorname{rang}\mathcal{O}\mathcal{C} = \operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_n \hat{\mathcal{C}}_n. \quad (4.17)$$

Pe de altă parte, $\operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_n = \operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_{\hat{n}} = \hat{n} < n$, $\operatorname{rang}\hat{\mathcal{C}}_n = \operatorname{rang}\hat{\mathcal{C}}_{\hat{n}} = \hat{n} < n$. În conformitate cu (4.17) şi folosind *inegalitatea Sylvester* se obţine:

$$n = \operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_n \hat{\mathcal{C}}_n = \operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_{\hat{n}} \hat{\mathcal{C}}_{\hat{n}} \le \min(\operatorname{rang}\hat{\mathcal{O}}_{\hat{n}}, \operatorname{rang}\hat{\mathcal{C}}_{\hat{n}}) = \hat{n}.$$

Prin urmare $n \le \hat{n}$, ceea ce este absurd deoarece s-a admis că $\hat{n} < n$. □

Această teoremă statuează unicitatea ordinului unei realizări minimale, dar nu şi unicitatea respectivei realizări minimale.

Teorema 4.4

Dacă (A,B,C) şi $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ sunt realizări minimale ale matricei de transfer $G^0(s)$, conform cu (4.1), atunci ele sunt echivalente.

$\mathscr{D}$. Din $C(I_n s - A)^{-1}B = \tilde{C}(I_n s - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$, similar cu (4.15), rezultă că:

$$CA^iB = \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B}, \quad i = 0,1,2,\dots \; . \tag{4.18}$$

Fie $n = \dim A = \dim \tilde{A}$ şi $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}$ matricele de controlabilitate ale celor două realizări definite conform cu (1.13). În aceste condiţii din (4.18) rezultă:

$$C\mathcal{C} = \tilde{C}\tilde{\mathcal{C}} \; . \tag{4.19}$$

Întrucât $\operatorname{rang}\mathcal{C} = \operatorname{rang}\tilde{\mathcal{C}} = n$, se poate defini matricea pătratică nesingulară:

$$S^{-1} = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}^T\left[\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^T\right]^{-1}. \tag{4.20}$$

Aceasta, utilizată adecvat în (4.19), conduce la:

$$CS^{-1} = \tilde{C}\,. \tag{4.21}$$

Fie acum $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ cele două matrice de observabilitate. În mod similar, din (4.18) rezultă:

$$\mathcal{O}B = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{B} \; . \tag{4.22}$$

Întrucât $\operatorname{rang}\mathcal{O} = \operatorname{rang}\tilde{\mathcal{O}} = n$, se poate defini matricea pătratică nesingulară:

$$\tilde{S} = \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O}\,. \tag{4.23}$$

Aceasta, utilizată adecvat în (4.22), conduce la:

$$\tilde{S}B = \tilde{B}\,. \tag{4.24}$$

În continuare, în conformitate cu (4.18) se poate scrie:

$$\mathcal{O}\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}}, \quad \mathcal{O}A\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{\mathcal{C}} \; , \tag{4.25}$$

din care, conform cu (4.20), (4.23), rezultă:

$$\tilde{S}AS^{-1} = \tilde{A}\,. \tag{4.26}$$

Pe de altă parte, din (4.20), (4.23) şi prima relaţie din (4.25) se obţine:

$$\tilde{S}S^{-1} = \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O}\mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{T}}\left[\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^T\right]^{-1} = \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^T\left[\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^T\right]^{-1} = I_n\,.$$

Acest rezultat implică $\tilde{S} = S$. În atare situație, din (4.26), (4.24) şi (4.21) rezultă (1.28), ceea ce confirmă echivalența celor două realizări minimale. □

a. Ordinul unei realizări minimale

Desigur că, în acest stadiu al analizei, o problemă subsecventă este aceea a determinării ordinului realizării minimale. În situația determinării efective a unei realizări minimale, pentru o matrice de transfer dată, problema ordinului ei trebuie soluționată înainte de orice tentativă de construcție a unei realizări minimale.

O primă indicație este oferită de *gradul McMillan* (v. Observația I.4.3), respectiv de gradul polinomului polilor matricei $G^0(s)$. Autenticitatea acestei informații se justifică prin faptul că forma Smith – McMillan este *ireductibilă*.

Utilizarea parametrilor Markov. O altă posibilitate de determinare a ordinului realizării minimale este sugerată de demonstrația Teoremei 4.3.

Fie $G^0(s)$ o matrice de transfer strict proprie, de dimensiuni $p \times m$, şi fie dezvoltarea în serie în punctul $s = \infty$:

$$G^0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k s^{-k}, \tag{4.27}$$

în care M_k, $k = 1,2,3,\ldots$, sunt *matricele parametrilor Markov* ai matricei $G^0(s)$. Se defineşte *matricea Hankel* de submatrice:

$$\mathcal{H}_{i,j}^{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \ldots & M_j \\ M_2 & M_3 & \ldots & M_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_i & M_{i+1} & \ldots & M_{i+j-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times jm}, \quad i, j = 1,2,\ldots\ . \tag{4.28}$$

Teorema 4.5

Fie $\alpha, \beta \geq 1$ întregii cei mai mici astfel încât

$$\operatorname{rang} \mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{M} = \operatorname{rang} \mathcal{H}_{\alpha+i,\beta+j}^{M}, \quad i, j = 1,2,\ldots\ . \tag{4.29}$$

Atunci $\alpha = \beta = n$, în care n este ordinul realizării minimale a matricei $G^0(s)$.

$\mathcal{D}$. Fie (A, B, C) o realizare minimală cu $\operatorname{rang} \mathcal{C} = n$ şi $\operatorname{rang} \mathcal{O} = n$. Folosind (4.1) şi (4.14) rezultă:

$$G^0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} C A^{k-1} B s^{-k}, \tag{4.30}$$

ceea ce, cu (4.27), conduce la egalităţile:

$$M_k = C A^{k-1} B,\quad k = 1,2,3,\dots \,. \tag{4.31}$$

În continuare, din (4.28) şi (4.31) se obţine:

$$\mathcal{H}_{i,j}^{M} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{j-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^jB \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{i-1}B & CA^iB & \dots & CA^{i+j-2}B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}}_{=\mathcal{O}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} B, & AB, \dots, A^{j-1}B \end{bmatrix}}_{=\mathcal{C}_j} = \mathcal{O}_i \mathcal{C}_j,$$

$i, j = 1,2,\dots$;

$$\rho_{\alpha,\beta} \triangleq \operatorname{rang} \mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{M} = \operatorname{rang} \mathcal{O}_\alpha \mathcal{C}_\beta \quad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho_{\alpha,\beta} < n, \text{ pentru } \alpha,\beta < n \\ \rho_{\alpha,\beta} = n, \text{ pentru } \alpha,\beta \ge n \end{matrix} \right\},$$

$$\rho_{\alpha+i,\beta+j} \triangleq \operatorname{rang} \mathcal{H}_{\alpha+i,\beta+j}^{M} =$$

$$= \operatorname{rang} \mathcal{O}_{\alpha+i} \mathcal{C}_{\beta+j} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho_{\alpha+i,\beta+j} < n, \text{ pentru } \alpha,\beta < n \\ \rho_{\alpha+i,\beta+j} = n, \text{ pentru } \alpha,\beta \ge n \end{matrix} \right\},\ i,j \ge 1 \,.$$

Urmează că $\alpha = \beta = n$ sunt cei mai mici întregi pentru care are loc (4.29).□

Exemplul 4.2

Se consideră matricea de transfer de la exemplul I.4.2.

Se cere să se determine ordinul unei realizări minimale.

Dezvoltarea în serie în punctul $s = \infty$ (relaţia (4.27)) are forma:

$$128G(s) = \begin{bmatrix} -128 & 0 & 128 \\ 128 & -64 & -64 \end{bmatrix} s^{-1} + \begin{bmatrix} 128 & 0 & -160 \\ 128 & 32 & 32 \end{bmatrix} s^{-2} +$$
$$+ \begin{bmatrix} -128 & 0 & 208 \\ 128 & -16 & -16 \end{bmatrix} s^{-3} + \begin{bmatrix} 128 & 0 & -232 \\ 128 & 8 & 8 \end{bmatrix} s^{-4} +$$
$$+ \begin{bmatrix} -128 & 0 & 244 \\ 128 & -4 & -4 \end{bmatrix} s^{-5} + \begin{bmatrix} 128 & 0 & -250 \\ 128 & 2 & 2 \end{bmatrix} s^{-6} + \begin{bmatrix} -128 & 0 & 253 \\ 128 & -1 & -1 \end{bmatrix} s^{-7} + \dots \,.$$

S-a înmulțit $G(s)$ cu 128 pentru eliminarea numitorului comun. De la Exemplul I.4.2 se ştie că gradul McMillan este $\operatorname{grd} p(s) = 4$. Se construieşte matricea Hankel de blocuri de matrice $\mathcal{H}^M_{4+1,4+1}$. Se face abstracție de factorul 128.

$$\mathcal{H}^M_{5,5} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} -128 & 0 & 64 & 128 & 0 & -160 & -128 & 0 & 208 & 128 & 0 & -232 \\ 128 & -64 & -64 & 128 & 32 & 32 & 128 & -16 & -16 & 128 & 8 & 8 \\ \hdashline 128 & 0 & -160 & -128 & 0 & 208 & 128 & 0 & -232 & -128 & 0 & 244 \\ 128 & 32 & 32 & 128 & -16 & -16 & 128 & 8 & 8 & 128 & -4 & -4 \\ \hdashline -128 & 0 & 208 & 128 & 0 & -232 & -128 & 0 & 244 & 128 & 0 & -250 \\ 128 & -16 & -16 & 128 & 8 & 8 & 128 & -4 & -4 & 128 & 2 & 2 \\ \hdashline 128 & 0 & -232 & -128 & 0 & 244 & 128 & 0 & -250 & -128 & 0 & 253 \\ 128 & 8 & 8 & 128 & -4 & -4 & 128 & 2 & 2 & 128 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Pentru calculul rangului acestei matrice, se elimină coloanele 7, 10, care sunt identice respectiv cu 1, 4. Similar, se elimină coloanele 8, 11 – proporționale cu 5. În matricea rămasă, de dimensiuni (8×7), se scade coloana 1 din 4, se adaugă coloana 6 înmulțită cu 2 la coloana 5, şi se adună coloana 7 înmulțită cu 2 la coloana 6. Se obține astfel o matrice cu coloanele 4-6 proporționale din care se pot elimina coloanele 5 şi 6. În acest fel pentru (4.29) rezultă:

$$\operatorname{rang}\mathcal{H}^M_{4+1,4+1} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} -128 & 0 & 64 & 256 & -232 \\ 128 & -64 & -64 & 0 & 8 \\ 128 & 0 & -160 & -256 & 244 \\ 128 & 32 & 32 & 0 & -4 \\ -128 & 0 & 208 & 256 & -250 \\ 128 & -16 & -16 & 0 & 2 \\ 128 & 0 & -232 & -256 & 253 \\ 128 & 8 & 8 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se adună linia 4 înmulțită cu 2 la linia 2, linia 6 înmulțită cu 2 la linia 4, şi linia 8 înmulțită cu 2 la linia 6. Apoi se adună linia 5 la linia 7, linia 3 la linia 5 şi linia 1 la linia 3. Rezultă o matrice cu liniile 3, 5, 7 proporționale şi liniile 2, 4, 6 identice. Evident, liniile 4-7 pot fi eliminate. Se obține:

$$\mathrm{rang}\mathcal{H}_{4,4}^{M} = \mathrm{rang}\mathcal{H}_{4+1,4+1}^{M} = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -128 & 0 & 64 & 256 & -232 \\ 384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & 0 & 12 \\ 128 & 8 & 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 .$$

În final rezultă că $n = \alpha = \beta = 4$ deoarece acelaşi rang se obţine, prin calcule similare, şi pentru matrice Hankel de forma $\mathcal{H}_{4+i,4+j}^{M}$, $i, j = 2,3\ldots$. □

<u>*Utilizarea coeficienţilor Taylor*</u>. În ipoteza că $G^0(s)$ nu are poli în origine se poate utiliza dezvoltarea în serie Taylor:

$$G^0(s) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} T_k s^{k-1} , \tag{4.32}$$

în care:

$$T_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} G^0(s)\right]_{s=0} , \quad k = 1,2,\ldots , \tag{4.33}$$

sunt *matricele coeficienţilor* Taylor ai matricei $G^0(s)$. Se defineşte *matricea Hankel* de submatrice:

$$\mathcal{H}_{i,j}^{T} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \ldots & T_j \\ T_2 & T_3 & \ldots & T_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_i & T_{i+1} & \ldots & T_{i+j-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times jm}, \quad i, j = 1,2,\ldots \tag{4.34}$$

Ca o generalizare a unui rezultat valabil pentru $m = p = 1$, [92], se poate demonstra, în mod similar cu Teorema 4.5, şi următoarea aserţiune:

Teorema 4.6

Fie $G^0(s)$, fără poli în $s = 0$. Fie $\alpha, \beta \geq 1$ întregii cei mai mici astfel încât

$$\mathrm{rang}\,\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{T} = \mathrm{rang}\,\mathcal{H}_{\alpha+i,\beta+j}^{T} , \quad i, j = 1,2,\ldots . \tag{4.35}$$

Atunci $\alpha = \beta = n$, în care n este ordinul realizării minimale a matricei $G^0(s)$. □

Exemplul 4.3

Se consideră matricea de transfer:

$$G^0(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}.$$

Să se determine ordinul unei realizări minimale.

În conformitate cu (4.32) se scrie:

$$T_k=(-1)^{k-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2^{-k}\end{bmatrix},\quad k=1,2,\ldots\ .$$

Utilizând (4.34) rezultă:

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}^T_{\alpha+i,\beta+j}=\operatorname{rang}\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c}
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots\\
1 & 2^{-1} & -1 & -2^{-2} & 1 & 2^{-3} & -1 & -2^{-4} & \cdots\\ \hline
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots\\
-1 & -2^{-2} & 1 & 2^{-3} & -1 & -2^{-4} & 1 & 2^{-5} & \cdots\\ \hline
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots\\
1 & 2^{-3} & -1 & -2^{-4} & 1 & 2^{-5} & -1 & -2^{-6} & \cdots\\ \hline
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots\\
-1 & -2^{-4} & 1 & 2^{-5} & -1 & -2^{-6} & 1 & 2^{-7} & \cdots\\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right].$$

Liniile 3, 5, 7, ... pot fi eliminate deoarece sunt proporționale cu linia 1. Se scrie:

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}^T_{\alpha+i,\beta+j}=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots\\
1 & 2^{-1} & -2^{-2} & 2^{-3} & -2^{-4} & \cdots\\
-1 & -2^{-2} & 2^{-3} & -2^{-4} & 2^{-5} & \cdots\\
1 & 2^{-3} & -2^{-4} & 2^{-5} & -2^{-6} & \cdots\\
-1 & -2^{-4} & 2^{-5} & -2^{-6} & 2^{-7} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}.$$

Se multiplică linia a 2-a cu $2^{-1}, -2^{-2}, 2^{-3}, -2^{-4},\ldots$ şi se sumează respectiv la liniile 3, 4, 5, 6… . Se procedează apoi similar pe coloane. Se obține:

$$\operatorname{rang}\mathcal{H}^T_{\alpha+i,\beta+j} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 7 & \cdots \\ 1 & 2^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 2^{-1} & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = 3\,.$$

Rezultă $\operatorname{rang}\mathcal{H}^T_{\alpha,\beta} = \operatorname{rang}\mathcal{H}^T_{\alpha+i,\beta+j} = 3$ pentru $\alpha = \beta = 3,\ i, j = 1,2,\ldots$. Urmează că ordinul căutat este $n = \alpha = \beta = 3$, acesta fiind totodată şi gradul McMillan. □

b. Determinarea unei realizări minimale

Două soluții imediate, [77], sunt următoarele:

Soluția 1: se obține mai întâi o realizare complet controlabilă (de exemplu (1.52), (1.53) sau (4.3) etc.) şi apoi se aplică procedura din demonstrația teoremei 1.18 (cu reținerea numai a părții de stare complet observabilă).

Soluția 2: se obține mai întâi o realizare complet observabilă (de exemplu (1.61), (1.62) sau (4.4) etc.) şi apoi se aplică procedura din demonstrația teoremei 1.16 (cu reținerea numai a părții de stare complet controlabilă).

Prezentarea soluției 1**.** Fie coloanele matricei $G^0(s)$

$$g^c_k(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{1k}(s)}{r_{1k}(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{pk}(s)}{r_{pk}(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^c_k(s)}\begin{bmatrix} q_{1k}(s) \\ \vdots \\ q_{pk}(s) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,m}\,, \tag{4.36}$$

în care

$$r^c_k(s) = s^{n_k} + \alpha_{k,n_k-1}s^{n_k-1} + \ldots + \alpha_{k,0}, \quad k = \overline{1,m}\,, \tag{4.37}$$

este c.m.m.m.c. al numitorilor din $g^c_k(s)$, şi

$$q_{ij}(s) = \beta_{ij,n_j-1}s^{n_j-1} + \beta_{ij,n_j-2}s^{n_j-2} + \ldots + \beta_{ij,0}, \quad i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,m}\,. \tag{4.38}$$

$G^0(s)$ poate fi realizată în următoarea formă canonică controlabilă, [77]:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_{k,0} & -\alpha_{k,1} & \cdots & -\alpha_{k,n_k-1} \end{bmatrix}, b_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} \beta_{1k,0} & \beta_{1k,1} & \cdots & \beta_{1k,n_k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{pk,0} & \beta_{pk,1} & \cdots & \beta_{pk,n_k-1} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{bmatrix}, \; C = \left[C_1, ..., C_m \right]. \quad (4.40)$$

Urmează ca din (A, B, C), complet controlabilă, să se separe partea de stare complet observabilă, conform cu demonstraţia Teoremei 1.18.

Fie $\operatorname{rang} \mathcal{O} = \underline{n} < n = \dim A$. Prin urmare se pot selecta din matricea $\mathcal{O}$ liniile liniar independente $w_1, ..., w_{\underline{n}}$, cu ajutorul cărora se constituie matricea:

$$S = \left[w_1^T, ..., w_{\underline{n}}^T \right]^T. \quad (4.41)$$

Se determină apoi matricea U astfel încât:

$$SU = I_{\underline{n}}. \quad (4.42)$$

În aceste condiţii realizarea minimală este dată de matricele:

$$\underline{A} = SAU, \quad \underline{B} = SB, \quad \underline{C} = CU. \quad (4.43)$$

Exemplul 4.4

Să se determine o realizare minimală a matricei de transfer:

$$G^0(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 4s + 6 & 2s + 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conform cu (4.36) – (4.38) se obţin polinoamele $q_{11}(s) = 4s + 6$, $q_{21} = -2$, $q_{12}(s) = 2s + 3$, $q_{22}(s) = -1$, $r_1^c(s) = r_2^c(s) = s^2 + 3s + 2$. Apoi cu (4.39) şi (4.40) rezultă:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{cc:cc} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

În aceste condiții se obține:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

CA depinde liniar de C. Rezultă că și CA^2, CA^3 depind liniar de C. Prin urmare, $\operatorname{rang}\mathcal{O} = \underline{n} = 2 < \dim A = 4$ și, în conformitate cu (4.41) – (4.43), rezultă:

$$S = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dimensiunea minimă 2 a acestei realizări este confirmată de faptul că polinomul polilor, $p(s) = s^2 + 3s + 2$, este de gradul 2 (identic cu gradul McMillan). □

<u>Prezentarea soluției 2</u>. Fie liniile matricei $G^0(s)$

$$g_k^l(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{k1}(s)}{r_{k1}(s)} & \cdots & \dfrac{a_{km}(s)}{r_{km}(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_k^l(s)}\left[q_{k1}(s) \ldots . q_{km}(s)\right], \quad k = \overline{1, p}, \quad (4.44)$$

în care

$$r_k^l(s) = s^{n_k} + \alpha_{k, n_k - 1} s^{n_k - 1} + \ldots + \alpha_{k,0}, \quad k = \overline{1, p}, \qquad (4.45)$$

este c.m.m.m.c. al numitorilor din $g_k^l(s)$, și

$$q_{ij}(s)=\beta_{ij,n_i-1}s^{n_i-1}+\beta_{ij,n_i-2}s^{n_i-2}+...+\beta_{ij,0},\quad i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,m}\ .(4.46)$$

$G^0(s)$ poate fi realizată în următoarea formă canonică observabilă, [77]:

$$A_k=\begin{bmatrix}0\cdots 0 & -\alpha_{k,0}\\ 1\cdots 0 & -\alpha_{k,1}\\ \vdots\quad\vdots & \vdots\\ 0\cdots 1 & -\alpha_{k,n_k-1}\end{bmatrix},\ B_k=\begin{bmatrix}\beta_{k1,0} & \cdots & \beta_{km,0}\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_{k1,n_k-1} & \cdots & \beta_{km,n_k-1}\end{bmatrix},\ c_k=[0\cdots 0\ \ 1].(4.47)$$

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_p\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}c_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & c_p\end{bmatrix}. \qquad (4.48)$$

În continuare din (A,B,C), cu (C,A) complet observabilă, se separă partea de stare complet controlabilă, conform cu demonstrația Teoremei 1.16.

Fie $\mathrm{rang}\,\mathcal{C}=\underline{n}<n=\dim A$. Se aleg din $\mathcal{C}$ coloanele liniar independente $v_1,...,v_{\underline{n}}$, cu ajutorul cărora se construiesc matricele U şi S după cum urmează:

$$U=\left[v_1,v_2,...,v_{\underline{n}}\right], \qquad (4.49)$$

$$SU=I_{\underline{n}}\,. \qquad (4.50)$$

În aceste circumstanțe realizarea minimală este constituită de matricele:

$$\underline{A}=SAU,\quad \underline{B}=SB,\quad \underline{C}=CU\ .\ \square \qquad (4.51)$$

Exemplul 4.5

Pentru $G^0(s)$ de la Exemplul 4.4 să se determine o realizare minimală.

Conform cu (4.44) – (4.46): $q_{11}(s)=4s+6$, $q_{12}(s)=2s+3$, $q_{21}=-2$, $q_{22}(s)=-1$, $r_1^l(s)=r_2^l(s)=s^2+3s+2$. Cu (4.47), (4.48) se obține:

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix},\ c_1=[0\quad 1],$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ c_2=[0\quad 1],$$

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ \hline -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],\quad C=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 & -4 & \cdots \\ 4 & 2 & -6 & -3 & \cdots \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \cdots \end{bmatrix}.$$

$\operatorname{rang}\mathcal{C}=\underline{n}=2<n=\dim A=4$ şi conform cu (4.49) – (4.51) rezultă:

$$U=[v_1,\ \ v_2]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T,\quad S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\quad \underline{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \underline{C}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \ \square$$

4.3. Realizări echilibrate

Este posibil ca o realizare minimală $(A,\ B,\ C)$ să nu fie, satisfăcător, de stare complet controlabilă şi / sau complet observabilă. Dacă A este *hurwitziană* (v. III.1.2), calitatea acestor proprietăţi este reflectată şi de *gramianii pe orizont infinit*:

$$M \triangleq \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau\,, \tag{4.52}$$

$$N \triangleq \int_0^{\infty} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau\,, \tag{4.53}$$

obţinuţi din (1.6) şi (1.32) cu $\tau=t_f-\theta$, $t_f=\infty$. A fiind hurwitziană (toate valorile ei proprii au partea reală strict negativă), M şi N există şi sunt finite.

Observaţia 4.3

Spaţiului stărilor este anizotrop după cum urmează:

- pentru controlabilitate: în sistemul de axe definit de vectorii proprii ortonormaţi ai lui M, de hiperelipsoidul având semiaxele egale cu valorile proprii ale lui M;

- pentru observabilitate: în sistemul de axe definit de vectorii proprii ortonormați ai lui N, de hiperelipsoidul având semiaxele egale cu valorile proprii ale lui N.

Interpretările energetice şi semnificațiile calitative au fost prezentate la Observațiile 1.4 şi respectiv 1.8. □

În general, cele două anizotropii ale spațiului stărilor pot fi foarte diferite deoarece cele două sisteme de axe şi, respectiv, cele două hiperelipsoide nu coincid. O astfel de situație poate fi depăşită utilizând următoarele rezultate.

Definiția 4.2

O realizare minimală (A, B, C) asimptotic stabilă (cu A hurwitziană, v. III.1.2) se numeşte *echilibrată* dacă gramianii de controlabilitate (4.52) şi de observabilitate (4.53) pe orizont infinit sunt egali şi diagonali. □

Teorema 4.7

Pentru o realizare minimală (A, B, C) asimptotic stabilă există o realizarea echivalentă $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ echilibrată.

$\mathscr{D}$. Fie transformarea $\tilde{x} = Sx,\ x = S^{-1}\tilde{x}$, care conduce la realizarea echivalentă $\tilde{A} = SAS^{-1},\ \tilde{B} = SB,\ \tilde{C} = CS^{-1}$. Se va arăta că pentru acest sistem echivalent se pot obține matricele diagonale egale:

$$\tilde{M} = SMS^T,\ \ \tilde{N} = (S^{-1})^T NS^{-1}. \tag{4.54}$$

M este matrice simetrică şi pozitiv definită. Există matricea U, a vectorilor proprii ortonormați ai lui M (cu $U^T = U^{-1}$), astfel încât $M = UM_\mathrm{d}U^T$, cu $M_\mathrm{d} \triangleq \mathrm{diag}\{\sigma_1,...,\sigma_n\}$, în care $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_n > 0$ sunt valorile proprii. Folosind transformarea $Q = (M_\mathrm{d})^{-1/2}U$ (similară cu S din (4.54)), din M şi N se obțin:

$$\hat{M} = QMQ^T = M_\mathrm{d}^{-1/2}UMU^TM_\mathrm{d}^{-1/2} = I_n, \tag{4.55}$$

$$\hat{N} = (Q^{-1})^T NQ^{-1}. \tag{4.56}$$

$\hat{N}$ este matrice simetrică şi pozitiv definită. Există matricea V, a vectorilor proprii ortonormați ai lui $\hat{N}$ (cu $V^T = V^{-1}$), astfel încât $\hat{N} = VN_\mathrm{d}V^T$, cu

$N_{\mathrm{d}} \triangleq \mathrm{diag}\{\zeta_1,...,\zeta_n\}$, în care $\zeta_1 \geq ... \geq \zeta_n > 0$ sunt valorile proprii. Folosind acum transformarea $R = (N_{\mathrm{d}})^{1/4} V^T$ (similară cu S din (4.54)), din $\hat{M}$ şi $\hat{N}$ (v. (4.55) şi (4.56)) se obțin:

$$\tilde{M} = R\hat{M}R^T = N_{\mathrm{d}}^{1/4}\, V^T I_n V\, N_{\mathrm{d}}^{1/4} = N_{\mathrm{d}}^{1/2}, \tag{4.57}$$

$$\tilde{N} = (R^{-1})^T \hat{N} R^{-1} = N_{\mathrm{d}}^{-1/4} V^T V\, N_{\mathrm{d}} V^T V\, N_{\mathrm{d}}^{-1/4} = N_{\mathrm{d}}^{1/2}, \tag{4.58}$$

$$\tilde{M} = \tilde{N} = \mathrm{diag}\{\zeta_1{}^{1/2},...,\zeta_n{}^{1/2}\}. \tag{4.59}$$

În (4.57) – (4.59) valorile

$$\zeta_1{}^{-1} \leq \zeta_2{}^{-1} \leq ... \leq \zeta_n{}^{-1} \tag{4.60}$$

sunt consumurile minime de energie de comandă pe direcțiile vectorilor proprii (v. Observația 1.3), pentru transferul din $x = 0$ pe hipersfera de rază 1, $\|x\| = 1$.

Transformarea căutată este

$$S = QR = N_{\mathrm{d}}^{-1/2}\, U\, N_{\mathrm{d}}^{1/4} V^T. \;\square \tag{4.61}$$

Observația 4.4

Tripletul $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, cu $\tilde{A}$ matrice hurwitziană, este o realizare echivalentă echilibrată. Cu alte cuvinte, pentru sistemul minimal echivalent:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{4.62}$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} \tag{4.63}$$

anizotropia spațiului stărilor este aceeaşi atât pentru controlabilitatea stării cât şi pentru observabilitatea stării. Revenind la cele afirmate în cadrul Observației 4.3, se constată că sistemele de axe şi hiperelipsoidele asociate matricelor M şi respectiv N sunt identice. □

4.4. Realizări de ordin redus

Evident, şi în cazul realizării echivalente echilibrate $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ este posibil ca proprietățile de controlabilitate şi de observabilitate, acum reflectate de gramianii egali şi diagonali (4.59), să nu fie calitativ satisfăcătoare. Şi anume în sensul că doar primele ρ, $1 \le \rho < n$, consumuri minime de energie (v. relațiile (4.59), (4.60)), sunt sub un anumit consum admisibil $E_{\mathrm{admis}} > 0$. Se scrie:

$$\zeta_1^{-1} \le \zeta_2^{-1} \le \ldots \le \zeta_\rho^{-1} \le E_{\mathrm{admis}} \,. \tag{4.64}$$

Ca urmare, gramianii (4.59) pot fi partiționați astfel:

$$\tilde{M} = \tilde{N} = \mathrm{diag}\{\zeta_1^{1/2}, \ldots, \zeta_\rho^{1/2}, \zeta_{\rho+1}^{1/2}, \ldots, \zeta_n^{1/2}\} \,. \tag{4.65}$$

În mod similar, transformarea (4.61) se exprimă prin:

$$S = \left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array}\right], \quad \dim S_{11} = \rho \,. \tag{4.66}$$

Cu aceasta sistemul echilibrat (4.62), (4.63) se scrie sub forma:

$$\dot{\tilde{x}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array}\right] \tilde{x} + \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \end{array}\right] u \,, \tag{4.67}$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{array}\right] \tilde{x} \,. \tag{4.68}$$

Conform cu (4.64) rezultă că numai subsistemul $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ participă *semnificativ* la transferul intrare – stare – ieşire. Subsistemul $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2)$ fiind „mai greu” controlabil şi observabil, poate fi neglijat. $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ este o *realizare de ordin redus* a matricei strict proprii $G^0(s)$. Se utilizează aproximarea:

$$G^0(s) \cong \tilde{G}_1^0(s) = \tilde{C}_1 (I_\rho s - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1 \,, \tag{4.69}$$

dar numai dacă $\left\| G^0(s) - \tilde{G}_1^0(s) \right\| \le \varepsilon$, cu un $\varepsilon > 0$ dat, acceptabil de mic.

Similar, cvadruplul $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D(\cdot))$ (v. relația (I.4.7)) este o *realizare de ordin redus* a matricei de transfer $G(s)$ şi se scrie:

$$G(s) = G^0(s) + D(s) \cong \tilde{G}(s) = \tilde{G}_1^0(s) + D(s) = \tilde{C}_1 (I_\rho \, s - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1 + D(s) \,. \tag{4.70}$$

Capitolul III
STABILITATEA ŞI STABILIZAREA SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

Stabilitatea este cea mai importantă proprietate a sistemelor dinamice, fiind adesea, în mod implicit, una din condițiile lor de existență şi funcționalitate. Este de domeniul evidenței că un sistem tehnic instabil nu poate realiza scopul pentru care a fost proiectat. Prin urmare, un sistem proiectat în conformitate cu anumite prescripții tehnologice trebuie să fie analizat şi sub aspectul stabilității înainte de a fi realizat fizic şi / sau utilizat. Dacă proprietatea de stabilitate este asigurată, atunci este posibil să se înzestreze sistemul considerat şi cu alte proprietăți cum ar fi: optimalitatea, fiabilitatea etc. În cazul în care cerințele de bază privind stabilitatea nu sunt satisfăcute, este necesară modificarea procedurii de proiectare, respectiv a parametrilor şi / sau structurii sistemului pentru a îndeplini cu prioritate cerințele de stabilitate. În aceste circumstanțe, practica actuală a proiectării sistemelor dinamice se bazează pe analize teoretice aprofundate şi pe verificări adecvate prin simulare, ca etape premergătoare indispensabile şi ca premise de realizare şi a altor proprietăți, în plus față de aceea de stabilitate.

1. Stabilitatea internă

1.1. Definiții

Fenomenologic şi conceptual, stabilitatea internă a unui sistem dinamic este direct legată de echilibrul intern al sistemului (substanțial şi energetic). Acest echilibru se caracterizează prin aceea că *vitezele tuturor mărimilor sunt nule*.

Definiția 1.1

Starea $x = \bar{x}$ = constant, soluție a ecuației intrare – stare $\dot{x} = Ax + Bu$ (v. ecuația (II.1.1)), se numeşte *stare* (*punct*) *de echilibru* ($\dot{x} = \dot{\bar{x}} = 0$) dacă

$$A\bar{x} + Bu = 0 \,. \square \tag{1.1}$$

Noţiunile de *stare de echilibru* şi de *punct de echilibru* sunt echivalente şi vor fi utilizate în funcţie de context.

Pentru $u = 0$ din (II.1.1) se obţine *ecuaţia omogenă* a stării:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

a cărei stare de echilibru este $\overline{x} = 0$.

Observaţia 1.1

Pentru orice altă stare de echilibru $\overline{x} \neq 0$, care se obţine din (1.1) în cazurile $u = \text{constant} \neq 0$ şi / sau $\det A = 0$, se aplică schimbarea de variabilă $z = x - \overline{x}$. Conform cu (1.1), din (II.1.1) se obţine ecuaţia $\dot{z} = Az$ a cărei stare de echilibru este $z = 0$. Urmează că analiza stabilităţii interne a sistemului (II.1.1) se poate baza, fără reducerea generalităţii, pe ecuaţia (1.2) şi pe studiul *soluţiei banale* (stării de echilibru) $x = 0$ la care este reductibilă orice altă stare de echilibru. □

Observaţia 1.2

Pornind de la considerente intuitive, se spune că starea de echilibru, respectiv soluţia banală $x = 0$, a sistemului (1.2) este stabilă dacă după ce a fost perturbată prin alocarea stării iniţiale $x(0) = x_0$, plasată arbitrar într-o vecinătate a lui $x = 0$, starea $x(t),\ t \geq 0$ rămâne în orice vecinătate, suficient de mică, a lui $x = 0$. Rezultă că stabilitatea stării de echilibru este o *problemă de continuitate* a soluţiei ecuaţiei (1.2) în raport cu condiţia iniţială $x(0)$. □

Se disting următoarele patru noţiuni de stabilitate internă, utilizabile pentru caracterizarea sistemelor dinamice (atât liniare cât şi neliniare).

Definiţia 1.2

A. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\| x_0 \| < \delta$ implică $\| x(t) \| < \varepsilon,\ t \geq 0$.

B. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *global stabilă* (se spune că *sistemul este stabil*) dacă este stabilă pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$. □

Definiţia 1.3

A. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *asimptotic stabilă* dacă aceasta este stabilă şi $\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$.

B. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *global asimptotic stabilă* (se spune că *sistemul este asimptotic stabil*) dacă este asimptotic stabilă pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$. □

Definiția 1.4

A. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *instabilă* dacă nu este stabilă.

B. Starea de echilibru $x = 0$ se numeşte *global instabilă* (se spune că *sistemul este instabil*) dacă este instabilă pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$. □

Un rezultat imediat este acela că, în fiecare caz, globalitatea implică, în mod necesar, unicitatea stării de echilibru $x = 0$, ceea ce, conform ecuației (1.1) cu $u = 0$, este echivalent cu $\det A \neq 0$.

Având în vedere soluția Cauchy a ecuației (1.2):

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

în care $x(0) = x_0$ este starea inițială a sistemului, se trag următoarele concluzii:

(a) Stabilitatea asimptotică a soluției unice $x = 0$ este echivalentă cu stabilitatea asimptotică a sistemului.

(b) Instabilitatea soluției unice $x = 0$ este echivalentă cu instabilitatea sistemului.

Din Definițiile 1.2 şi 1.3 rezultă că stabilitatea asimptotică implică stabilitatea. Implicația inversă nu este adevărată. Acest fapt prilejuieşte următoarea nuanțare.

Definiția 1.5

Starea de echilibru $x = 0$ a unui sistem dinamic se numeşte *neutral stabilă* dacă ea este stabilă, dar nu este asimptotic stabilă. □

În cazul $n = 2$ sistemul evoluează în planul stărilor, fiind posibilă o interpretare geometrică simplă a Definițiilor 1.2 – 1.4. Evoluția pentru $t \geq 0$ are loc din cauza perturbării stării de echilibru $x = 0$ (în care se afla sistemul până în $t = 0$) prin alocarea, la $t = 0$, a stării inițiale x_0. Inegalitățile $\| x \| < \delta$ şi $\| x \| < \varepsilon$ (în norma euclideană, v. Anexa A) au ca imagini discuri mărginite de cercurile C_ε, C_δ, cu centrul în origine şi de raze ε şi respectiv δ.

Dacă $x = 0$ este o stare de echilibru stabilă, atunci *oricare* ar fi cercul C_ε, *există* în interiorul său un cerc C_δ, astfel încât *orice* traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ rămâne în interiorul lui C_ε – fig. III.1.1.a.

Dacă $x = 0$ este o stare de echilibru asimptotic stabilă, atunci orice traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ rămâne în C_ε şi în plus ea converge, în timp, către origine – fig. III.1.1.b.

O comportare contrară aceleia din fig. III.1.1.a., respectiv *există* un C_ε astfel încât pentru *orice* C_δ *există* o traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ şi iese din interiorul lui C_ε, arată că starea de echilibru $x = 0$ este instabilă – fig. III.1.1.c.

O examinarea comparativă a definiţiilor 1.2 – 1.5 conduce la constatarea că situaţia cea mai avantajoasă (calitativ şi practic) este starea de echilibru *global asimptotic stabilă*.

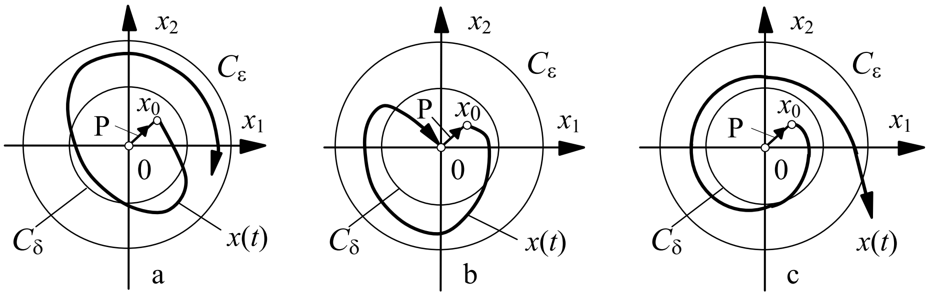

Fig. III.1.1. Definiţiile 1.2 – 1.4, imagini geometrice; P *– perturbarea stării de echilibru* $x = 0$ *, la* $t = 0$*, prin alocarea stării iniţiale* x_0 *; starea de echilibru este*: *a – stabilă (neutral), b – asimptotic stabilă, c – instabilă.*

1.2. Caracterizări

Teorema 1.1

Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (1.2) (respectiv (I.2.1), (I.2.2)) este stabilă dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală nepozitivă şi cele cu partea reală nulă sunt de multiplicitate geometrică egală cu multiplicitatea algebrică; în acest ultim caz $x = 0$ este neutral stabilă.

$\mathscr{D}$. Din (1.3) şi (I.2.54), trecând la norme, rezultă:

$$\| x(t) \| \le \alpha \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p_i} \sum_{k=1}^{k_{ij}} \left| e^{\lambda_i t} \right| \sum_{l=1}^{k} \frac{t^{k-l}}{(k-l)!} \| x_0 \|, \quad t \ge 0, \ (1.4)$$

în care s-a făcut uz de majorarea:

$\left\| v_{ij}^{k} w_{ij}^{l} \right\| \le \alpha, \quad i=\overline{1,r},\ i=\overline{1,p_i},\ k=\overline{1,k_{ij}},\ l=\overline{1,k}$.

Este evident că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$\left\| x(t) \right\| < \varepsilon, \quad t \ge 0 \text{, pentru orice } \left\| x_0 \right\| < \delta(\varepsilon), \tag{1.5}$$

dacă şi numai dacă $\mathrm{Re}\lambda_i \le 0,\ i=\overline{1,r}$, iar pentru acei i pentru care $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$, au loc $k_{ij}=1,\ j=\overline{1,p_i}$. Aceasta, în conformitate cu $\sum_{j=1}^{p_i} k_{ij} = q_i$, este echivalentă cu $p_i = q_i$. În acest ultim caz $\lim_{t\to\infty} \left\| x(t) \right\| \ne 0$, ceea ce înseamnă că $x=0$ este neutral stabilă. □

Teorema 1.2

Sistemul (1.2) (respectiv (I.2.1), (I.2.2)) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală strict negativă.

$\mathscr{D}$. Din (1.4) rezultă: $\lim_{t\to\infty} \left\| x(t) \right\| = 0$ dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei A satisfac condiția: $\lambda_i \in \mathbb{C}_- \triangleq \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s < 0\}$, $i=\overline{1,r}$. În plus, $\det A \ne 0$, ceea ce dovedeşte că starea de echilibru $x=0$ este unică şi, ca urmare, ea este global asimptotic stabilă. □

Teorema 1.3

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (1.2) (respectiv (I.2.1), (I.2.2)) este instabilă dacă şi numai dacă cel puțin o valoare proprie a matricei A are partea reală nenegativă şi în cazul că este nulă multiplicitatea ei geometrică este mai mică decât cea algebrică (există o submatricea canonică Jordan este de ordin ≥ 2).

$\mathscr{D}$. Această teoremă se obține prin negarea Teoremei 1.1. □

Relativ la Teorema 1.3 trebuie remarcat faptul că globalitatea instabilității este asigurata numai în cazul în care matricea A nu are valori proprii în $s=0$, respectiv pentru $\det A \ne 0$. Acest fapt este echivalent cu unicitatea stării de echilibru $x=0$.

Observația 1.3

Matricea A cu valorile proprii $\lambda_i \in \mathbb{C}_-,\ i=\overline{1,r}$, respectiv *polinomul caracteristic* $d(s)=\det(I_n s - A)$ se numesc *hurwitziene*. Sistemul (I.2.1), (I.2.2) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă A, respectiv $d(s)$ sunt hurwitziene. De

Exemplul 1.1

Se consideră sistemul (1.2) cu:

$$A=\begin{bmatrix} a-b & b & b \\ -b+c & a+b-c & b+c \\ c & -c & a+c \end{bmatrix}.$$

Să se analizeze stabilitatea sistemului în funcţie de valorile parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Polinomul caracteristic al matricei A are forma:

$$d(s)=(s-a)^3.$$

Matricea A are valoarea proprie $\lambda_1 = a$, de multiplicitate algebrică $q_1 = 3$.

Pentru $a<0$ sistemul este asimptotic stabil, în timp ce pentru $a>0$ acesta este instabil (starea de echilibru $x=0$ este unică).

Pentru $a=0$ starea de echilibru $x=0$ nu este unică deoarece $\det A = 0$. Pentru a evalua multiplicitatea geometrică se utilizează (I.2.38) şi se obţine:

$$p_1 = 3-\operatorname{rang}(I_3 \underbrace{\lambda_1}_{=a=0} - A) = 3-\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b & -b & -b \\ b-c & -b+c & -b-c \\ -c & c & -c \end{bmatrix}=$$

$$=3-\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b & -b \\ b-c & -b-c \\ -c & -c \end{bmatrix}=3-\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b & -b \\ -c & -c \end{bmatrix}=\begin{cases}1, & b\neq 0, \quad c\neq 0, \\ 2, & b\neq c=0,\ c\neq b=0, \\ 3, & b=c=0.\end{cases}$$

Rezultă că pentru b, c nenuli sau nesimultan nuli, starea $x=0$ este instabilă în timp ce pentru $b=c=0$, starea $x=0$ este neutral stabilă. Pentru confirmarea acestor ultime rezultate se utilizează (1.3) cu (I.2.54) pentru $a=0$ şi $p_1 = 1, 2, 3$.

Pentru $r=1, q_1=3, p_1=1$, şi implicit $k_{11}=3$, starea de echilibru $x=0$ este instabilă deoarece din soluţia:

$$x(t)=(v_{11}^1 w_{11}^1 + t v_{11}^1 w_{11}^2 + v_{11}^2 w_{11}^2 + t^2 v_{11}^1 w_{11}^3/2 + t v_{11}^2 w_{11}^3 + v_{11}^3 w_{11}^3)x_0$$

se obţine $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = \infty$.

Pentru $p_1 = 2$, şi (de exemplu) $k_{11} = 1$ şi $k_{12} = 2$, rezultă soluţia:

$$x(t) = (v_{11}^1 w_{11}^1 + v_{12}^1 w_{12}^1 + t\, v_{12}^1 w_{12}^2 + v_{12}^2 w_{12}^2)x_0 .$$

Şi în această situaţie sistemul este instabil deoarece $\lim_{t\to\infty}\| x(t) \| = +\infty$.

În schimb, pentru $p_1 = 3$ şi, implicit, $k_{11} = k_{12} = k_{13} = 1$ se obţine:

$$x(t) = (v_{11}^1 w_{11}^1 + v_{12}^1 w_{12}^1 + v_{13}^1 w_{13}^1)x_0 = \text{constant} \neq 0 .$$

În acest caz starea de echilibru $x = 0$ (neunică) este neutral stabilă. □

1.3. Structura spaţiului stărilor

Consistent cu Definiţia 1.3, se poate afirma că starea iniţială x_0 este „asimptotic stabilă” (adică evoluţia stării sistemului (1.2) are loc spre starea de echilibru $x = 0$ asimptotic stabilă) dacă şi numai dacă (1.3) satisface condiţia:

$$\lim_{t\to\infty}\| x(t) \| = \lim_{t\to\infty}\left\| e^{At} x_0 \right\| = 0 . \tag{1.6}$$

Pentru a evalua toate condiţiile iniţiale „asimptotic stabile” ale sistemului (1.2) se separă în polinomul caracteristic $d(s)$ al matricei A două polinoame: $d^-(s)$ şi $d^+(s)$ ale căror zerouri sunt situate în $\mathbb{C}_-$ şi respectiv $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-$. Este evident că polinomul caracteristic se poate factoriza după cum urmează:

$$d(s) = d^+(s) d^-(s) . \tag{1.7}$$

Polinoamele $d^+(s)$, $d^-(s)$ sunt relativ prime. Acest lucru este echivalent (v. Anexa B.3) cu existenţa polinoamelor $c_1(s)$ şi $c_2(s)$ astfel încât:

$$c_1(s) d^+(s) + c_2(s) d^-(s) = 1. \tag{1.8}$$

Înlocuind în (1.8) formal s cu A şi înmulţind la dreapta cu $x \in \mathbb{R}^n$ se obţine:

$$c_1(A) d^+(A) x + c_2(A) d^-(A) x = x, \quad x \in \mathbb{R}^n . \tag{1.9}$$

Dar conform teoremei Cayley – Hamilton (v. I.2.2.b) se poate scrie:

$$d(A) = d^+(A)d^-(A) = 0 .$$

Din aceasta rezultă că pentru:

$$x \in \mathrm{Im}[c_1(A)d^+(A)], \tag{1.10}$$

în care $\mathrm{Im}\,M$ este imaginea matricei M, se obține:

$$d^-(A)x = 0 . \tag{1.11}$$

Din (1.10) (care arată că x aparține nucleului $\mathrm{Ker}\,d^-(A)$) şi (1.11) rezultă:

$$\mathrm{Im}[c_1(A)d^+(A)] \subset \mathrm{Ker}\,d^-(A) . \tag{1.12}$$

Pe de altă parte, pentru $d^-(A)x = 0$ folosind relația (1.9) se obține $c_1(A)d^+(A)x = x$, adică:

$$\mathrm{Ker}\,d^-(A) \subset \mathrm{Im}[c_1(A)d^+(A)] . \tag{1.13}$$

Cu (1.12) şi (1.13) s-a demonstrat de fapt că:

$$\mathrm{Ker}\,d^-(A) = \mathrm{Im}[c_1(A)d^+(A)] . \tag{1.14}$$

În mod similar se poate demonstra că:

$$\mathrm{Ker}\,d^+(A) = \mathrm{Im}[c_2(A)d^-(A)] . \tag{1.15}$$

Prin urmare, folosind (1.9), (1.14) şi (1.15), spațiul stărilor $\mathbb{R}^n$ se poate exprima ca o sumă directă de subspații:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}^-(A) \oplus \mathcal{X}^+(A) . \tag{1.16}$$

În această sumă se disting subspațiile:

$$\mathcal{X}^-(A) = \mathrm{Ker}\,d^-(A) , \tag{1.17}$$

numit *subspațiul condițiilor inițiale „asimptotic stabile*”, şi

$$\mathcal{X}^+(A) = \mathrm{Ker}\,d^+(A) , \tag{1.18}$$

numit *subspațiul condițiilor inițiale „neutral stabile sau instabile*”.

Evident că sistemul (1.3) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă

$\mathcal{X}^-(A) = \mathbb{R}^n$.

Este relativ uşor de arătat că bazele de vectori ale subspaţiilor $\mathcal{X}^-$ şi $\mathcal{X}^+$ sunt constituite din vectorii proprii asociaţi valorilor proprii care sunt zerourile polinoamelor $d^-(s)$ şi respectiv $d^+(s)$ (v. relaţia (1.7)), de grade n^- şi n^+ cu $n^- + n^+ = n$. Într-adevăr, dacă $v_1^-,...,v_{n^-}^-$ şi $v_1^+,...,v_{n^+}^+$ sunt cele două categorii de vectori, asociate valorilor proprii simple $\lambda_1^-,...,\lambda_{n^-}^- \in \mathbb{C}_-$ şi respectiv $\lambda_1^+,...,\lambda_{n^+}^+ \in \mathbb{C}_+$, atunci au loc relaţiile:

$$d^-(s) = \prod\nolimits_{i=1}^{n^-}(s - \lambda_i^-), \quad d^+(s) = \prod\nolimits_{i=1}^{n^+}(s - \lambda_i^+),$$

$$d^-(A) = \prod\nolimits_{i=1}^{n^-}(A - \lambda_i^- I_n), \quad d^+(A) = \prod\nolimits_{i=1}^{n^+}(A - \lambda_i^+ I_n),$$

$$(A - \lambda_i^- I_n)v_i^- = 0, \ i = \overline{1, n^-}, \quad (A - \lambda_i^+ I_n)v_i^+ = 0, \ i = \overline{1, n^+}.$$

În aceste circumstanţe pentru (1.17) şi (1.18) rezultă:

$$\mathcal{X}^-(A) = \{v_1^-,...,v_{n^-}^-\}, \quad \mathcal{X}^+(A) = \{v_1^+,...,v_{n^+}^+\}, \tag{1.19}$$

în care s-a folosit convenţia reprezentării subspaţiilor prin bazele lor de vectori.

Înlocuind acum (I.2.35) în (1.3), soluţia sistemului (1.2) se scrie sub forma:

$$x(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{n^-} v_i^- w_i^- e^{\lambda_i^- t} x_0 + \sum\nolimits_{i=1}^{n^+} v_i^+ w_i^+ e^{\lambda_i^+ t} x_0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.20}$$

în care v_i^-, $i = \overline{1, n^-}$, şi v_i^+, $i = \overline{1, n^+}$, constituie coloanele matricei modale V, iar w_i^-, $i = \overline{1, n^-}$, şi w_i^+, $i = \overline{1, n^+}$, sunt liniile corespunzătoare ale inversei matricei modale $W = V^{-1}$.

Evident că pentru $x_0 \in \mathcal{X}^-(A)$ din (1.19) şi (1.20) se obţine:

$$x(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{n^-} v_i^- w_i^- e^{\lambda_i^- t} x_0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.21}$$

deoarece $w_i^+ x_0 = 0$, $i = \overline{1, n^+}$. Soluţia (1.21) satisface (1.6).

Dacă $x_0 \in \mathcal{X}^+(A)$ din (1.19) şi (1.20) rezultă:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n^+} v_i^+ w_i^+ e^{\lambda_i^+ t} x_0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1.22}$$

deoarece $w_i^- x_0 = 0,\ i=\overline{1,n^-}$. Soluția (1.22) nu satisface (1.6).

În mod similar se poate arăta că rezultatele (1.19) – (1.22) rămân valabile *mutatis mutandis* şi în cazul valorilor proprii multiple.

Exemplul 1.2

Se consideră sistemul (1.2) cu matricea A de la Exemplul I.2.2.

Să se determine subspațiile $\mathcal{X}^+(A)$ şi $\mathcal{X}^-(A)$.

Se ține seama de rezultatele obținute, pentru aceeaşi matrice, la Exemplul I.2.4. Folosind vectorii proprii ai matricei A (coloanele matricei modale V), se pot scrie relațiile:

$$\mathcal{X}^+(A)=\left\{v_{11}^1,\ \ v_{11}^2\right\}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\end{bmatrix}^T\right\} \text{ pentru } \lambda_1=3,\ q_1=2\,;$$

$$\mathcal{X}^-(A)=\left\{v_{21}^1\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}^T\right\} \text{ pentru } \lambda_2=-3,\ q_2=1\,,$$

$$x(t)=e^{At}x_0=v_{11}^1 w_{11}^1 e^{3t}x_0+(t\,v_{11}^1+v_{11}^2)w_{11}^2 e^{3t}x_0+v_{21}^1 w_{21}^1 e^{-3t}x_0\,.$$

În ultima relație s-au folosit liniile matricei $W=V^{-1}$:

$$w_{11}^1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5 & 4 & -2\end{bmatrix},\ \ w_{11}^2=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3 & -6\end{bmatrix},\ \ w_{21}^1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}\,.$$

Pentru $x_0=\alpha v_{21}^1\in\mathcal{X}^-(A),\quad \alpha\in\mathbb{R}$, se obține:

$$x(t)=\alpha v_{21}^1 e^{-3t},\ \ \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0\,,$$

deoarece $w_{11}^1 x_0=\alpha w_{11}^1 v_{21}^1=0,\quad w_{11}^2 x_0=\alpha w_{11}^2 v_{21}^1=0$.

Pentru $x_0=(\alpha_1 v_{11}^1+\alpha_2 v_{11}^2)\in\mathcal{X}^+(A),\quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, se obține:

$$x(t)=\alpha_1 v_{11}^1 e^{3t}+\alpha_2(t\,v_{11}^1+v_{11}^2)e^{3t},\ \ \lim_{t\to\infty}\|\,x(t)\,\|=+\infty\,,$$

deoarece $w_{21}^1 x_0=\alpha_1 w_{21}^1 v_{11}^1+\alpha_2 w_{21}^1 v_{11}^2=0$. □

1.4. Ecuația Liapunov

Un rezultat foarte util în continuare este următorul v. Teoremele 4.7 şi 4.13).

Teorema 1.4

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă *ecuația Liapunov*:

$$A^T P + PA = -Q^T Q\,, \tag{1.23}$$

are o soluție P, matrice reală, simetrică şi pozitiv definită pentru orice Q astfel ales încât perechea (Q, A) este complet observabilă.

D. *Suficiența*. Ecuația (1.23) admite o soluție P, reală, simetrică şi pozitiv definită (v. Anexa C). Se consideră *funcția Liapunov* (v. metoda directă Liapunov, subcapitolul V.3) asociată oricărei soluții a sistemului (1.2):

$$V(t) = x^T(t)Px(t)\,. \tag{1.24}$$

Derivata acestei funcții în raport cu t, ținând seama de (1.2) şi (1.23), este:

$$\dot{V}(t) = -x^T(t)Q^T Q\,x(t) = -\|\,Qx(t)\,\|^2\,. \tag{1.25}$$

Înlocuind (1.3) în (1.25), cu $t_0 = 0$, rezultă:

$$\dot{V}(t) = -\left\|\,Qe^{At}x_0\right\|^2 < 0,\ t \geq 0\,, \tag{1.26}$$

deoarece perechea (Q, A) este complet observabilă.

Integrând (1.25) pe intervalul $[0, T]$, ținând seama de (1.26), rezultă:

$$V(T) - V(0) = -\int_0^T \|\,Q\,x(t)\,\|^2 dt \leq 0\,. \tag{1.27}$$

Întrucât $V(t)$ (relația (1.24)) este pozitiv definită rezultă că $V(t) \geq 0$ pentru $T \geq 0$, ceea ce, din (1.27), conduce la:

$$0 \leq \int_0^T \|\,Q\,x(t)\,\|^2 dt \leq V(0) = x_0^T P\,x_0,\quad T \geq 0\,. \tag{1.28}$$

Dar din (1.25), (1.26) rezultă că există un $\mu > 0$ (cea mai mică valoare proprie a matricei pozitiv definite $Q^T Q$) astfel încât $x^T Q^T Q\,x = \|\,Q\,x\,\|^2 \geq \mu\|\,x\,\|^2$.

În aceste condiţii din (1.28) rezultă:

$$\mu\int_0^T \| x(t)\|^2 dt \le \| P\| \| x_0 \|^2 < +\infty ,$$

ceea ce implică:

$$\int_0^\infty \| x(t)\|^2 dt < +\infty, \quad \lim_{T\to\infty}\int_T^\infty \| x(t)\| dt = 0 .$$

Întrucât soluţia (1.3) este continuă în t, din a doua relaţie de mai sus rezultă (1.6), ceea ce înseamnă că sistemul (I.2.1), (I.2.2) este asimptotic stabil.

Necesitatea. A este hurwitziană şi trebuie să se arate că ecuaţia (1.23), pentru orice Q, cu (Q, A) complet observabilă, are o soluţie P, reală simetrică şi pozitiv definită.

Se consideră ecuaţia diferenţială matriceală:

$$\dot{S} = A^T S + S A, \quad S(0) = Q^T Q . \tag{1.29}$$

Este uşor de arătat că soluţia acestei ecuaţii este:

$$S(t) = e^{A^T t} Q^T Q e^{A t} . \tag{1.30}$$

Se va arăta că

$$P \triangleq \int_0^\infty S(\theta)\, d\theta = \int_0^\infty e^{A^T\theta} Q^T Q e^{A\theta} d\theta \tag{1.31}$$

este soluţia ecuaţiei (1.23). Într-adevăr, întrucât A este hurwitziană, matricea (1.31) este bine definită. Integrând (1.29) pe intervalul $[0, \infty]$, ţinând seama de (1.30), (1.31) se obţine (1.23). Soluţia (1.31) este reală şi simetrică prin definiţie. Perechea (Q, A) fiind complet observabilă, în conformitate cu Teorema 1.5 de la II.1.1.b rezultă că P este nesingulară. În plus, înlocuind (1.31) în (1.24) se obţine:

$$V = x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T\theta} Q^T Q e^{A\theta} x \, d\theta = \int_0^\infty \left\| Q e^{A\theta} x \right\|^2 d\theta > 0 .$$

Aceasta dovedeşte că P este pozitiv definită. □

2. Stabilitatea externă

S-a arătat că în relația (I.3.12) *componenta de regim permanent*, $y_P(t)$, constituie, de regulă, rațiunea de a fi a sistemului (I.2.1), (I.2.2). Totodată, $y_T(t)$ – *componenta de regim tranzitoriu*, deşi indezirabilă, este inerentă şi ca atare inevitabilă. În această situație şi întrucât $y_P(t)$ şi $y_T(t)$ coexistă cronologic, este de dorit ca $\|u(t)\| < +\infty$ să implice $\|y_P(t)\| < +\infty$, $t \in \mathbb{R}$, simultan cu

$$\lim_{t\to\infty} \|y_T(t)\| = 0 \tag{2.1}$$

astfel ca, de la un anumit moment $t_s > 0$, finit şi nu excesiv de mare, să aibă loc

$$y(t) \approx y_P(t), \quad t \geq t_s . \tag{2.2}$$

Din rațiuni practice, t_s – numit şi *durata componentei de regim tranzitoriu* – se defineşte, convențional, prin inegalitatea $\|y_T(t)\| \leq \varepsilon$ pentru $t \geq t_s$, cu o normă adecvat aleasă; $\varepsilon > 0$ are semnificația de eroare care justifică aproximația (2.2).

Având în vedere expresia (I.3.13) a componentei de regim *tranzitoriu* rezultă că prin condiția (2.1) se poate stabili o legătură simplă cu stabilitatea asimptotică a sistemului (I.2.1), (I.2.2). În acelaşi timp, condițiile de mărginire $\|u(t)\| < +\infty$, $\|y(t)\| < +\infty$, $t \in \mathbb{R}$, se referă fără echivoc la transferul intrare – ieşire. Aceasta situează discuția într-un context simptomatologic diferit de cel evidențiat în subcapitolul 1, dar având conexiuni, sub aspect structural, cu stabilitatea asimptotică. În mod specific este vorba de conceptul de *stabilitate BIBO* (*bounded input – bounded output*), utilizat încă de timpuriu în teoria sistemelor automate, care se bazează pe condițiile de mărginire menționate mai sus.

Din analiza transferului decuplat (v. (I.3.21), (I.3.22) pentru $\lambda \notin \mathcal{P}$), şi din analiza transferului „rezonant” (v. (I.3.30), (I.3.27) cu (I.3.11), (I.3.31) şi $\lambda_k \in \mathcal{P}$) se trage concluzia că sistemul (I.2.1), (I.2.2) este BIBO stabil dacă şi numai dacă mulțimea polilor, $\mathcal{P}$, satisface condiția:

$$\mathcal{P} \subset \mathbb{C}_- . \tag{2.3}$$

Această concluzie rămâne valabilă şi în cazul valorilor proprii multiple în care, în afara aspectului multiplicității polilor, nu apar situații semnificativ noi.

Este evident că dacă (2.3) nu are loc, atunci nu au loc nici (2.1), (2.2). Prin urmare, $u(t) = e^{\lambda t} u_0 \sigma(t)$ şi $\lambda \in \mathcal{P}, \mathrm{Re}\lambda \geq 0$ implică $\| y_P(t) \| \to \infty$. Pentru $\mathrm{Re}\lambda = 0$, $\lambda \in \mathcal{P}$ în sistem se produc fenomene de rezonanță propriu-zise. În aceste situații sistemul este BIBO instabil.

2.1. BIBO stabilitatea

În cele ce urmează se are în vedere transferul exprimat prin (I.3.10) sau (I.4.1) al sistemului (I.2.1), (I.2.2).

Definiția 2.1

A. Sistemul dinamic (I.2.1), (I.2.2) se numeşte *BIBO stabil* dacă pentru orice mărime de intrare mărginită şi $x(0) = 0$, mărimea de ieşire este mărginită.

B. În caz contrar sistemul se numeşte BIBO instabil. □

Teorema 2.1

Sistemul (I.2.1), (I.2.2), reprezentat prin matricea de răspuns la impulsul Dirac, $g(t)$, este BIBO stabil dacă şi numai dacă:

$$\int_0^{\infty} \| g(t) \| dt < +\infty . \tag{2.4}$$

𝒟. Suficiența. Pentru (2.4) şi $\| u(t) \| \leq M, t \geq 0$, cu $M > 0$, din (I.3.10) rezultă:

$$\| y(t) \| \leq \int_0^t \| g(t - \theta) \| \, \| u(\theta) \| d\theta \leq M \int_0^t \| g(\theta) \| d\theta \leq M \int_0^{\infty} \| g(\theta) \| d\theta < +\infty .$$

Aceasta denotă că sistemul este BIBO stabil.

Necesitatea. Se foloseşte norma matriceală: $\| g(t) \| = \max_j \sum_{i=1}^m | g_{ij}(t) |$, în care $g_{ij}(t),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, p}$, sunt elementele matricei de răspuns la impuls, $g(t)$. Se presupune că deşi sistemul este BIBO stabil, condiția (2.4) nu este satisfăcută. Aceasta înseamnă că pentru orice $k > 0$ există un t_k astfel încât:

$$\int_0^{t_k} \| g(t) \| dt = \int_0^{t_k} \max_j \sum_{i=1}^m | g_{ij}(t) | dt > kmp .$$

Urmează că cel puțin pentru un element $g_{ij}(t)$ al lui $g(t)$ are loc:

$$\int_0^{t_k} \left| g_{ij}(t) \right| dt > k = \text{constant} . \tag{2.5}$$

Se alege acum $u(t) = (I_m)_j \operatorname{sgn} g_{ij}(t_k - t)$, în care $(I_m)_j$ este coloana j a matricei I_m. Din (I.3.10), cu (2.5), pentru componenta i a lui $y(t)$, se obţine:

$$|y_i(t_k)| = \int_0^{t_k} g_{ij}(t_k - \theta) \operatorname{sgn} g_{ij}(t_k - \theta)\, d\theta = \int_0^{t_k} \left| g_{ij}(t) \right| dt > k .$$

Aceasta înseamnă că sistemul nu este BIBO stabil, contrar ipotezei. □

Teorema 2.2

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) este BIBO stabil dacă şi numai dacă toţi polii matricei sale de transfer au partea reală strict negativă, respectiv polinomul polilor matricei de transfer este hurwitzian.

$\mathscr{D}$. Conform cu (I.4.8), pentru $u(t) = u_0 \delta(t)$ şi $U(s) = u_0$ (u_0 cu elemente nenule şi $\alpha = 0, \beta = 0$ în (I.4.8)), matricea de răspuns la impulsul Dirac este

$$g(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{\nu} \sum\nolimits_{j=1}^{\nu_i} \frac{1}{(\nu_i - j)!} K_{ij}\, t^{\nu_i - j} e^{p_i t} \sigma(t) + D(\cdot)\delta(t) , \tag{2.6}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{\,j-1}}{ds^{\,j-1}} \left[(s - p_i)^{\nu_i} G(s) \right] \right\}_{s = p_i} , \quad i = \overline{1,\nu}, \;\; j = \overline{1,\nu_i} , \tag{2.7}$$

în care p_i, $i = \overline{1,\nu}$, sunt polii matricei de transfer $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$ având multiplicităţile ν_i, $i = \overline{1,\nu}$ (v. Teoremele I.4.2, I.4.5, şi II.1.21).

În aceste circumstanţe este evident că (2.4) este satisfăcută dacă şi numai dacă $p_i \in \mathbb{C}_-$, $i = \overline{1,\nu}$, respectiv polinomul polilor este hurwitzian. □

Conform Teoremei 2.2, analiza BIBO stabilităţii se reduce la studiul localizării în planul complex a rădăcinilor polinomului $p(s)$ al polilor matricei de transfer $G(s)$. În acest scop se utilizează metode polinomiale (v. subcapitolul 3).

Se poate formula un rezultat asemănător cu Teorema 2.1, dar referitor la matricea de răspuns indicial (I.3.8).

Teorema 2.3

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) este BIBO stabil dacă şi numai dacă $\lim_{t \to \infty} \|h(t)\|$ există şi este finită.

$\mathscr{D}$. Se are în vedere (I.3.8) în care se trece la limită pentru $t \to +\infty$, ținând seama şi de (2.4). □

2.2. Relații cu stabilitatea asimptotică

Teorema 2.2 oferă o primă indicație privind relația dintre BIBO stabilitatea şi stabilitatea asimptotică.

Teorema 2.4

Dacă sistemul (I.2.1), (I.2.2) este asimptotic stabil atunci el este BIBO stabil.

$\mathscr{D}$. De la Teorema 1.2 se ştie că stabilitatea asimptotică este echivalentă cu localizarea valorilor proprii ale sistemului în $\mathbb{C}_-$. Mulțimea polilor este inclusă în mulțimea valorilor proprii (v. relația (I.3.35)). Rezultă că, în conformitate cu ipoteza teoremei, polii sistemului sunt localizați în $\mathbb{C}_-$. Aceasta, în virtutea Teoremei 2.2, implică BIBO stabilitatea. □

Din demonstrația Teoremei 2.2 rezultă că BIBO stabilitatea nu implică stabilitatea asimptotică deoarece , in general, mulțimea polilor nu coincide cu mulțimea valorilor proprii. Legat de acest fapt se reaminteşte şi descompunerea canonică Kalman de la II.1.2.c. Toate acestea conduc la următoarele afirmații.

Teorema 2.5

Dacă sistemul (I.2.1), (I.2.2) este de stare complet controlabilă şi complet observabilă şi BIBO stabil, atunci el este asimptotic stabil. □

Teorema 2.6

Dacă sistemul (I.2.1), (I.2.2) este BIBO stabil, atunci partea sa de stare complet controlabilă şi complet observabilă este asimptotic stabilă. □

Teorema 2.7

Dacă sistemul (I.2.1), (I.2.2) este BIBO stabil şi părțile sale de stare necontrolabilă şi / sau neobservabilă sunt asimptotic stabile, atunci sistemul este asimptotic stabil. □

Din Teoremele 2.4 – 2.7 rezultă că stabilitatea asimptotică este mai tare decât BIBO stabilitatea, motiv pentru care stabilității asimptotice i se acordă, în mod justificat, o atenție deosebită.

3. Metode polinomiale

3.1. Criteriile Hurwitz şi Routh

Pentru formularea unor rezultate utilizabile în legătură cu Teoremele 1.3 şi 2.2, se defineşte polinomul cu coeficienţi reali:

$$\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n, \; s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

După caz, $\Delta(s)$ este fie polinomul caracteristic, $d(s)$, al matricei A, fie polinomul (monic al) polilor, $p(s)$, al matricei de transfer $G(s)$. Stabilitatea asimptotică (v. Teorema 1.2 şi Observaţia 1.3) şi BIBO stabilitatea (v. Teorema 2.2) sunt echivalente cu faptul că $d(s)$ şi respectiv $p(s)$ sunt *hurwitziene*.

Teorema 3.1

O condiţie necesară ca polinomul $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$a_i > 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

$\mathscr{D}$. Coeficienţii lui $\Delta(s)$ sunt reali. Rezultă că zerourile sale, s_i, $i = \overline{1,n}$, sunt reale sau complexe (acestea sunt în perechi complex conjugate). $\Delta(s)$ fiind hurwitzian, urmează că $\mathrm{Re}\, s_i < 0$, $i = \overline{1,n}$. Conform formulelor Viète se scrie:

$$\begin{aligned} &a_1 = -(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) > 0, \\ &a_2 = s_1 s_2 + s_1 s_2 + \ldots + s_{n-1} s_n > 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n = (-1)^n s_1 s_2 s_3 \ldots . s_n > 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ceea ce demonstrează inegalităţile (3.2). □

Simplitatea condiţiei necesare (3.2.) o face foarte de utilă în aplicaţii, ca prim criteriu de sortare, mai ales în forma negată a Teoremei 3.1, care urmează.

Teorema 3.2

O condiţie suficientă ca polinomul $\Delta(s)$ să nu fie hurwitzian este ca cel puţin unul dintre coeficienţii săi să fie nul sau negativ. □

Fie *matricea Hurwitz* (de ordinul n) asociată polinomului $\Delta(s)$:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

În (3.4) diagonala principală este formată din coeficienţii lui $\Delta(s)$. Pe linii, la stânga diagonalei principale, se scrie $a_k = 0$ pentru toţi $k > n$.

Fie *schema Routh* (de ordinul n) asociată polinomului $\Delta(s)$:

$$\begin{array}{c|cccccccc} s^n & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-1} & r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-2} & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-i+2} & r_{i-21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-2j} & r_{i-2j+1} & \cdots \\ s^{n-i+1} & r_{i-11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-1j} & r_{i-1j+1} & \cdots \\ s^{n-i} & r_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{ij} & r_{ij+1} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^0 & r_{n1}, & & & & & & & \end{array} \tag{3.5}$$

în care

$$r_{01} = 1, \quad r_{02} = a_2, \;\; r_{03} = a_4, \ldots, \;\; r_{11} = a_1, \;\; r_{12} = a_3, \;\; r_{13} = a_5, \ldots; \tag{3.6}$$

$$r_{ij} = -\frac{1}{r_{i-11}} \begin{vmatrix} r_{i-21} & r_{i-2\,j+1} \\ r_{i-11} & r_{i-1\,j+1} \end{vmatrix}, \;\; i = 2, 3, \ldots, n, \;\; j = 1, 2, \ldots \; . \tag{3.7}$$

Folosind (3.4) şi (3.5) – (3.7) se pot demonstra următoarele teoreme, [175].

Teorema 3.3 (Hurwitz)

O condiţie necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$\det H_k > 0, \quad k = \overline{1,n} \,. \;\square \tag{3.8}$$

Rezultate bazate pe determinanți de ordinul 2 din schema Routh sau pe variația totală a argumentului lui $\Delta(s)$ (v. Anexa F) sunt următoarele, [175].

Teorema 3.4 (Routh)
O condiție necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$r_{i1} > 0, \quad i = 0,1,2,...,n \,. \square \tag{3.9}$$

Teorema 3.5 (Cremer – Leonhard)
O condiție necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$\Delta(j\omega)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} n \,. \square \tag{3.10}$$

3.2. Stabilitatea relativă

Matricea de tranziție e^{At} (v. (1.3)) sau matricea $g(t)$ de răspuns la impulsul Dirac (v. (2.6), (2.7)) se utilizează pentru evaluarea calității stabilității (asimptotice sau BIBO). Aceasta constă în determinarea „apropierii" unui sistem (asimptotic sau BIBO) stabil de limita pierderii stabilității (asimptotice sau BIBO). Evaluarea se bazează pe abaterile elementelor $(e^{At})_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$ şi respectiv $\big(g(t)\big)_{ij}$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,m}$, față de limita nulă către care tind în mod natural pentru $t \to \infty$. Abaterile sunt cu atât mai mari (şi de durată mai mare) cu cât zerourile polinomului $\Delta(s)$ (caracteristic sau al polilor), situate în $\mathbb{C}_-$, sunt mai apropiate de axa imaginară $\mathrm{Re}\, s = 0$.

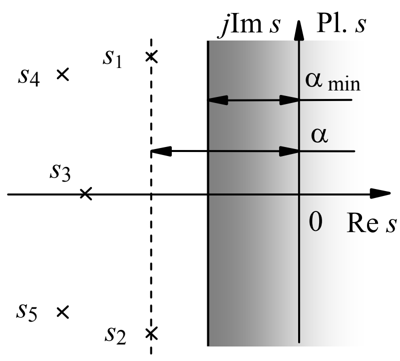

Fig. III.3.1 Stabilitatea relativă şi gradul de stabilitate

Stabilitatea trebuie realizată la un nivel acceptabil de calitate. Pentru aceasta trebuie să se asigure încă din faza de proiectare o anumită *rezervă de stabilitate* (*asimptotică* sau *BIBO*). Aceasta este distanța minimă $\alpha_{\min} > 0$ a zerourilor $s_1, s_2, ..., s_n$ ale lui $\Delta(s)$ (situate în $\mathbb{C}_-$) față de axa imaginară $\mathrm{Re}\, s = 0$ – fig. III.3.1.

Ea este o măsură de asigurare a unei calităţi acceptabile şi de prevenire a pierderii stabilităţii (asimptotice sau BIBO) în următoarele situaţii:

- deplasarea unor zerouri spre axa imaginară (spre dreapta) sub influenţa factorilor mediului ambiant sau prin îmbătrânirea materialelor;
- localizarea incertă a zerourilor deoarece parametrii sistemului se situează între anumite limite de toleranţă (admise în tehnică prin norme şi standarde), iar estimarea acestor parametri este afectată de erori (sistematice şi aleatoare).

În sprijinul acestor afirmaţii pledează şi dependenţa zerourilor polinomului $\Delta(s)$ de coeficienţii săi (formulele Viète, v. relaţiile (3.3)). Variaţii relativ mici ale coeficienţilor a_i, $i=\overline{1,n}$, (de pildă erorile de estimare) pot implica variaţii relativ mari ale zerourilor s_i, $i=\overline{1,n}$.

Gradul de stabilitate (*asimptotică* sau *BIBO*) este prin definiţie distanţa α dintre axa imaginară a planului complex şi zeroul lui $\Delta(s)$ cel mai apropiat – fig. III.3.1. Încă din faza de proiectare, dar şi ulterior – în timpul funcţionării sistemului, trebuie să se asigure: $\alpha \ge \alpha_{\min}$. Aceasta în condiţiile în care α nu poate fi determinat cu exactitate (datorită incertitudinilor parametrice) sau se poate modifica sub influenţa factorilor de mediu şi datorită îmbătrânirii materialelor.

Rezerva de stabilitate şi gradul de stabilitate definesc împreună *stabilitatea* (*asimptotică* sau *BIBO*) *relativă* a respectivului sistem.

3.3. Polinoame interval şi domenii parametrice de stabilitate

Din varii motive (tehnologice, de siguranţă etc.) este necesar să se cunoască între ce limite se pot modifica parametrii unui sistem fără ca acesta să-şi piardă stabilitatea sau să i se reducă rezerva de stabilitate. În acest context se are în vedere că pe lângă anumiţi parametri influenţaţi de mediu şi de îmbătrânirea materialelor, sistemul are şi *parametri ajustabili* (prin dispozitive prevăzute de proiectant) care pot fi modificaţi de operatorul uman oricând este necesar.

***a. Polinoame interval* (*criteriul Haritonov*)**

Fie $\mathscr{P}$ mulţimea *polinoamelor interval* de grad n de forma:

$$\Delta_0(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-2}s^2 + b_{n-1}s + b_n, \tag{3.11}$$

în care coeficienţii sunt reali, incerţi, dar se situează în intervale bine definite:

$$b_i \in \left[\underline{b}_i,\ \overline{b}_i\right],\quad \overline{b}_i \geq \underline{b}_i > 0,\quad i = 0,1,2,\dots,n\,. \tag{3.12}$$

Teorema 3.6 (Haritonov))

Orice polinom din $\mathscr{P}$ este hurwitzian dacă şi numai dacă următoarele patru polinoame extreme sunt hurwitziene:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(s) &= \underline{b}_n + \underline{b}_{n-1}s + \overline{b}_{n-2}s^2 + \overline{b}_{n-3}s^3 + \underline{b}_{n-4}s^4 + \underline{b}_{n-5}s^5 + \overline{b}_{n-6}s^6 + \dots,\\
\Delta_2(s) &= \underline{b}_n + \overline{b}_{n-1}s + \overline{b}_{n-2}s^2 + \underline{b}_{n-3}s^3 + \underline{b}_{n-4}s^4 + \overline{b}_{n-5}s^5 + \overline{b}_{n-6}s^6 + \dots,\\
\Delta_3(s) &= \overline{b}_n + \underline{b}_{n-1}s + \underline{b}_{n-2}s^2 + \overline{b}_{n-3}s^3 + \overline{b}_{n-4}s^4 + \underline{b}_{n-5}s^5 + \underline{b}_{n-6}s^6 + \dots,\\
\Delta_4(s) &= \overline{b}_n + \overline{b}_{n-1}s + \underline{b}_{n-2}s^2 + \underline{b}_{n-3}s^3 + \overline{b}_{n-4}s^4 + \overline{b}_{n-5}s^5 + \underline{b}_{n-6}s^6 + \dots\ \square
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Simplitatea remarcabilă a testării naturii unei mulţimi infinite de polinoame prin natura a doar patru polinoame explică marea utilitate practică a Teoremei 3.6 în caracterizarea *robusteții stabilității* (asimptotice sau *BIBO*) pe baza polinoamelor interval.

În situația în care mulțimea $\mathscr{P}$ nu satisface Teorema 3.6, intervalele (3.12) se înlocuiesc cu

$$b_i \in \left[\varepsilon\underline{b}_i,\ \varepsilon\overline{b}_i\right],\ \varepsilon > 0,\quad \overline{b}_i \geq \underline{b}_i > 0,\quad i = 0,1,2,\dots,n\,. \tag{3.14}$$

Parametrul ε oferă o posibilitate de determinare a intervalelor (3.14), ale coeficienților incerți b_i, $i = 0,1,2,\dots,n$, astfel încât Teorema 3.6 să poată fi satisfăcută. Cu (3.14) se redefinesc noile polinoame extreme (3.13), dependente de ε, şi se determină $\varepsilon_{\max}$ astfel ca acestea să fie hurwitziene. Evident, $\varepsilon_{\max}$ este o măsură a *robusteții stabilității* (asimptotice sau BIBO).

b. Domenii parametrice de stabilitate

Din Teoremele 3.3 şi 3.4, pentru sistemele de ordin $n \leq 3$, cu doi parametri incerți şi / sau ajustabili, rezultă că determinarea în planul parametrilor a domeniului de stabilitate se poate face relativ simplu utilizând (3.8) sau (3.9).

În cazul sistemelor de ordin $n \geq 4$, cu mai mult de doi parametri incerți şi / sau ajustabili, se pune problema rezolvării unui sistem de $n \geq 4$ inecuații neliniare, care adesea este o problemă soluționabilă prin calcule laborioase.

O posibilitate de simplificare a procedurii de determinare a domeniului parametric de stabilitate constă în a evalua mai întâi acele valori ale parametrilor pentru care polinomul $\Delta(s)$, inițial hurwitzian, devine nehurwitzian ca urmare a variației parametrilor săi. Întrucât zerourile polinomului $\Delta(s)$ depind continuu de coeficienții săi (prin formulele Viète, v. (3.3)), rezultă că $\Delta(s)$ devine nehurwitzian atunci când unele din zerourile sale se deplasează din semiplanul complex stâng spre cel drept şi cel puțin un zero atinge axa imaginară.

Se poate demonstra că $\Delta(s)$ devine nehurwitzian exact atunci când, [175]:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ \det H_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Într-adevăr, $a_n = 0$ dacă şi numai dacă $s = 0$ este un zero al lui $\Delta(s)$. De asemenea, utilizând *formula lui Orlando*:

$$\det H_{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod\nolimits_{1 \le i < j \le n} (s_i + s_j), \tag{3.16}$$

în care s_i, $i = \overline{1,n}$, sunt zerourile polinomului $\Delta(s)$, rezultă că $\det H_{n-1} = 0$ este echivalentă cu existența unei perechi de zerouri imaginar conjugate.

Este evident că ecuațiile (3.15) reprezintă frontiera dintre domeniile în care $\Delta(s)$ este hurwitzian şi respectiv non-hurwitzian. Pentru a determina efectiv natura fiecărui domeniu se consideră un punct în unul dintre domenii. Corespunzător, se particularizează coeficienții lui $\Delta(s)$, se aplică Teoremele 3.3 sau 3.4 şi se trage o concluzie privind natura întregului domeniu căruia îi aparține punctul considerat.

Făcând schimbarea de variabilă $s = z - \alpha_{\min}$ se pot utiliza ecuațiile (1.15) şi pentru polinomul $\Delta(z - \alpha_{\min})$. Se poate determina astfel domeniul de rezervă de stabilitate (asimptotică sau BIBO) pentru $\alpha_{\min} > 0$ dat.

Pe de altă parte, realizarea efectivă a unei rezerve de stabilitate (asimptotică sau BIBO) date, $\alpha_{\min}$, se poate verifica făcând în $\Delta(s)$ aceeaşi schimbare de variabilă, $s = z - \alpha_{\min}$, după care se aplică Teoremele 3.3 sau 3.4 polinomului $\Delta(z - \alpha_{\min})$. Satisfacerea uneia dintre aceste teoreme este echivalentă cu localizarea zerourilor polinomului $\Delta(s)$ în $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s < -\alpha_{\min}\}$.

4. Problema stabilizării

4.1. Reacția după stare

Pentru sistemul dinamic liniar constant (I.2.1), (I.2.2) se consideră *legea de reglare cu reacție după stare*:

$$u = M\,v - K\,x,\quad x \in \mathbb{R}^n,\quad u,v \in \mathbb{R}^m\,, \tag{4.1}$$

în care K este matricea reacției după stare, v este noua mărime de intrare a sistemului şi M este o matrice constantă, adecvat aleasă. În fig. I.3.1 legea (4.1) se adaugă ca o conexiune stare – intrare. Înlocuind (4.1) în (I.2.1), (I.2.2) se obține:

$$\dot{x} = (A - BK)x + BMv\,, \tag{4.2}$$

$$y = (C - DK)x + DMv\,. \tag{4.3}$$

Este vizibil că matricele K şi M pot determina unele modificări parametrice în sistemul (I.2.1), (I.2.2). Sub aspect structural se constată însă o anumită proprietate de invarianță după cum rezultă şi din următoarea teoremă.

Teorema 4.1

Subspațiul controlabil al sistemului (I.2.1), (I.2.2) este acelaşi ca şi al sistemului (4.2), (4.3) pentru orice K şi $\det M \neq 0$.

$\mathcal{D}$. Se ştie că matricea de controlabilitate a sistemului (I.2.1), (I.2.2) este (II.1.13). Fie $\mathcal{C}_K$ matricea de controlabilitate a sistemului (4.2), (4.3). Subspațiile controlabile ale celor două sisteme sunt respectiv $\mathrm{Im}\,\mathcal{C}$ şi $\mathrm{Im}\,\mathcal{C}_K$. Fie vectorul $\overline{x} \in \mathbb{R}, \overline{x} \neq 0$, ortogonal pe $\mathcal{C}$, care satisface condiția $\overline{x}^T\mathcal{C} = 0$. Aceasta implică:

$$\overline{x}^T A^i B = 0,\; i = \overline{0, n-1}\,.$$

Pe de altă parte, $\overline{x}^T BM = 0$, ceea ce înseamnă că se pot scrie relațiile:

$$\overline{x}^T (A - BK)BM = \overline{x}^T ABM - \overline{x}^T BKBM = 0\,,$$

$$\overline{x}^T (A - BK)^i BM = \overline{x}^T (A - BK)(A - BK)^{i-1} BM = 0,\; i = \overline{1, n-1}\,.$$

$$\overline{x}^T \mathcal{C}_K = 0\,.$$

Urmează că spațiile ortogonale satisfac $\mathrm{Im}\mathcal{C}_K^{\perp} \supset \mathrm{Im}\mathcal{C}^{\perp}$, fapt echivalent cu:

$$\mathrm{Im}\mathcal{C} \supset \mathrm{Im}\mathcal{C}_K . \tag{4.4}$$

Incluziunea inversă rezultă din aceea că pentru $\underline{x} \neq 0$ cu $\underline{x}^T \mathcal{C}_K = 0$ are loc:

$$\underline{x}^T (A - BK)^i BM = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Întrucât $\det M \neq 0$ rezultă că:

$$\underline{x}^T A^i B = 0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\underline{x}^T (A - BK)^i BM = \underline{x}^T (A - BK)(A - BK)^{i-1} BM =$$
$$= \underline{x}^T A(A - BK)^{i-1} BM = \ldots = \underline{x}^T A^i BM = 0, \; i = \overline{0, n-1}.$$

Ca urmare,

$$\mathrm{Im}\mathcal{C} \subset \mathrm{Im}\mathcal{C}_K . \tag{4.5}$$

Din relațiile (4.4) şi (4.5) rezultă $\mathrm{Im}\mathcal{C} = \mathrm{Im}\mathcal{C}_K$. □

Exemplul 4.1

Se consideră sistemul de la Exemplul II.1.2 cu legea de reglare după stare de forma (4.1) pentru $n = 3$, $m = 1$ şi M un scalar nenul. Să se arate că subspațiul controlabil al acestui sistem este invariant în raport cu legea de reglare (4.1).

De la Exemplul II.1.2 se ştie că:

$$\mathrm{Im}\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

În conformitate cu (4.2) se scrie:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}}_{=K} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -1-k_3 \\ 1-k_1 & -k_2 & -3-k_3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$BM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T M = \begin{bmatrix} M & M & 0 \end{bmatrix}^T .$$

În aceste condiții matricea de controlabilitate a sistemului cu reacție este:

$$\mathscr{C}_K = \begin{bmatrix} 1 & -(k_1+k_2) & (k_1+k_2)^2 - k_2 - k_3 - 1 \\ 1 & -(k_1+k_2-1) & (k_1+k_2)^2 - k_1 - 2k_2 - k_3 - 3 \\ 0 & 1 & -(k_1+k_2+2) \end{bmatrix} M .$$

Matricea 3×3 de mai sus poate fi transformată prin operații elementare, în mod succesiv, după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} 1 & -(k_1+k_2) & (k_1+k_2)^2 - (k_2+k_3+1) \\ 1 & -(k_1+k_2-1) & (k_1+k_2)(k_1+k_2-1) - (k_2+k_3+3) \\ 0 & 1 & -(k_1+k_2+2) \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -(k_1+k_2) & -(k_2+k_3+1) \\ 1 & -(k_1+k_2-1) & -(k_2+k_3+3) \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(k_2+k_3+1) \\ 1 & 3 & -(k_2+k_3+3) \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aceasta înseamnă că

$$\operatorname{Im}\mathscr{C}_K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Im}\mathscr{C} . \ \square$$

a. Alocarea valorilor proprii

Deşi proprietatea de controlabilitate a stării este invariantă în raport cu legea de reglare (4.1), este posibil ca prin această reacție după stare să se producă schimbări parametrice esențiale în matricea $A - BK$, cu modificarea valorilor sale proprii, după cum rezultă din următoarea afirmație.

Teorema 4.2

Pentru sistemul (4.2), (4.3), cu $\operatorname{rang} B = m \leq n$, există o matrice K astfel încât polinomul caracteristic al matricei $A - BK$ să aibă toți coeficienții (reali) arbitrari dacă şi numai dacă perechea (A, B) este complet controlabilă.

$\mathscr{D}$. *Necesitatea*. Se presupune prin absurd că perechea (A, B) este incomplet controlabilă. Conform Teoremei II.1.16 rezultă că relațiile (II.1.52) şi (II.1.53) pun în evidenţă părţile de stare controlabilă şi de stare necontrolabilă ale sistemului (I.2.1), (I.2.2). Cu matricea de transformare S din (II.1.55) se mai obţine:

$$\tilde{K} \triangleq \left[\tilde{K}_1 \;\vdots\; \tilde{K}_2\right] = K\,S^{-1}.$$

Folosind şi (II.1.55), (II.1.56), polinomul caracteristic al matricei $A-BK$ este:

$$\det\left[I_n s-(A-BK)\right]=\det\left[I_n s-(S^{-1}\tilde{A}S-S^{-1}\tilde{B}\tilde{K}S)\right]=$$

$$=\det\left[I_n s-(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K})\right]=\det\left[\begin{array}{c|c} I_r s-\tilde{A}_{\text{cc}}+\tilde{B}_{\text{cc}}\tilde{K}_1 & -\tilde{A}_{12}+\tilde{B}_{\text{cc}}\tilde{K}_2 \\ \hline 0 & I_{n-r}s-\tilde{A}_{\text{nc}} \end{array}\right]=$$

$$=\det\left[I_r s-(\tilde{A}_{\text{cc}}-\tilde{B}_{\text{cc}}\tilde{K}_1)\right]\det(I_{n-r}s-\tilde{A}_{\text{nc}}).$$

$\det(I_{n-r}s-\tilde{A}_{\text{nc}})$ nu poate avea coeficienţi arbitrari. Ca atare $\det\left[I_n s-(A-BK)\right]$ nu poate avea nici el toţi coeficienţii arbitrari, fapt care contrazice ipoteza.

Suficienţa. Se va arăta că dacă perechea (A,B) este complet controlabilă, atunci există o matrice K astfel încât matricea $A-BK$ să aibă un polinom caracteristic cu toţi coeficienţii (reali) aleşi în mod arbitrar.

Forma canonică controlabilă (II.1.79), (II.1.80) se rescrie astfel:

$$\tilde{A}=SAS^{-1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ a_1\end{bmatrix}\\ \vdots \\ \begin{bmatrix}A_m\\ a_m\end{bmatrix}\end{bmatrix},\ \tilde{B}=SB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ b_1\end{bmatrix}\\ \vdots \\ \begin{bmatrix}0\\ b_m\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

unde $\begin{bmatrix}A_i\\ a_i\end{bmatrix}$, a_i, $\begin{bmatrix}0\\ b_i\end{bmatrix}$, b_i au respectiv dimensiunile $\mu_i\times n$, $1\times n$ $\mu_i\times m$, $1\times m$, şi

$$\underbrace{A_i}_{(\mu_i-1)\times n} = [\underbrace{0,\ldots\ldots\ldots\ldots,0,}_{\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j+1 \text{ coloane}} \quad \underbrace{I_{\mu_i-1}}_{\mu_i-1 \text{ coloane}} \quad ,\ldots\ldots, \quad \underbrace{0,\ldots\ldots,0}_{\mu_m \text{ coloane}}],$$

$$a_i = [\alpha_{i0},\quad \alpha_{i1},\quad \alpha_{i2},\ldots\ldots,\alpha_{in-1}],\quad i=\overline{1,m}.$$

μ_i, $i=\overline{1,m}$, sunt indicii de controlabilitate ai perechii (A,B), cu $\sum_{i=1}^{m}\mu_i=n$.

Cu transformarea bazată pe matricea S se introduce $\tilde{K} = KS^{-1}$.

De asemenea se introduce matricea pătratică de ordinul m nesingulară:

$$\tilde{B}_m = \left[b_1^T, ..., b_m^T\right]^T,$$

în care liniile b_i, $i = \overline{1,m}$, au fost definite implicit în $\tilde{B}$. Apoi se determină:

$$\hat{K} = \tilde{B}_m \tilde{K} \triangleq \left[\hat{k}_1^T, ..., \hat{k}_m^T\right]^T,$$

în care $\hat{k}_i$, $i = \overline{1,m}$, sunt liniile matricei $\hat{K}$. În această situație se obține:

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{B}_m^{-1}\hat{K} = \left[A_1^T, a_1^T - \hat{k}_1^T, A_2^T, a_2^T - \hat{k}_2^T, ..., A_m^T, a_m^T - \hat{k}_m^T\right]^T.$$

Fie $d_K(s) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + ... + \gamma_n$ un polinom cu coeficienți reali arbitrari. Elementele matricei K se determină din egalitatea:

$$\det\left[I_n s - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\right] = \det\left[I_n s - (\tilde{A} - \hat{K})\right] = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}s + \gamma_n,$$

după cum urmează:

$$\begin{cases} \hat{k}_i = a_i - [\,\underbrace{0, ..., 0,}_{\sum_{j=1}^{i}\mu_j \text{ coloane}} \quad 1, \quad 0, ..., 0\,], \; i = \overline{1, m-1}, \\ \hat{k}_m = a_m + [\gamma_n \quad \gamma_{n-1} .... \gamma_1]. \end{cases} \tag{4.6}$$

Se verifică imediat că:

$$\det\left[I_n s - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\right] = \det\left\{I_n s - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & -\gamma_{n-2} & \cdots & -\gamma_1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \underbrace{s^n + \gamma_1 s^{n-1} + ... + \gamma_n}_{= d_K(s)},$$

$$K = \tilde{K}S, \; \tilde{K} = B_m^{-1}\hat{K}. \; \square \tag{4.7}$$

Exemplul 4.2

Se consideră sistemul de la Exemplul II.1.5. Se cere să se aloce prin reacție după stare următoarele valori proprii: $\lambda_i = -1,\ i = \overline{1,4}$.

De la Exemplul II.1.5 se ştie că forma canonică controlabilă este dată de:

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ \hline -11 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right],\ \tilde{B} = SB = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],\ S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

în care se identifică

$$a_1 = [-6\ \ -11\ \ -6\ \ 0],\ a_2 = [-11\ \ 0\ \ 0\ \ -4],\ b_1 = [1\ \ 3],\ b_2 = [0\ \ 1].$$

Pentru $\Delta(s) = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$, din (4.6) se obține:

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -11 & -6 & -1 \\ -11+1 & 0+4 & 0+6 & -4+4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 & -1 \\ -10 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conform relațiilor (4.7), cu S cunoscut de la Exemplul II.1.5, se obține:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 & -1 \\ -10 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 25 & 24 & -1 & -24 \\ -16 & -10 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \ \square$$

b. Stabilizarea prin reacție după stare

Conform Teoremei 4.1, subspațiul controlabil al sistemului (I.2.1), (I.2.2) este invariant în raport cu legea de reglare (4.1). Mai mult, $\mathrm{Im}\mathcal{C}$ este $(A - BK)$ – invariant (pentru acest tip de invarianță v. II.1.2.a), după cum se va arăta mai jos.

Teorema 4.3

Există o matrice K pentru a realiza un polinom caracteristic $d_{\mathrm{cc}}(s)$ corespunzător subspațiului $\mathrm{Im}\mathcal{C}$ al sistemului (I.2.1), (I.2.2), cu proprietatea:

$$d_{\mathrm{cc}}(A - BK)\,\mathrm{Im}\mathcal{C} = 0\,. \tag{4.8}$$

$\mathcal{D}$. Conform Teoremei II.1.16 pentru $\mathrm{rang}\,\mathcal{C} = r < n$ există o bază de vectori $v_1, \ldots, v_r$ a lui $\mathrm{Im}\mathcal{C}$ şi o pereche $(\tilde{A}_{\mathrm{cc}}, \tilde{B}_{\mathrm{cc}})$ complet controlabilă astfel încât:

$$(A - BK)[v_1,...,v_r] = [v_1,...,v_r](\tilde{A}_{cc} - \tilde{B}_{cc}\tilde{K}_{cc}), \tag{4.9}$$

$$\tilde{K}_{cc} = K[v_1,...,v_r].$$

Întrucât perechea $(\tilde{A}_{cc}, \tilde{B}_{cc})$ este complet controlabilă, conform Teoremei 4.2, există $\tilde{K}_{cc}$ astfel încât să se realizeze:

$$\det\left[I_r s - (\tilde{A}_{cc} - \tilde{B}_{cc}\tilde{K}_{cc})\right] = d_{cc}(s),$$

cu $d_{cc}(s)$ un polinom de gradul r, cu coeficienţi reali aleşi în mod arbitrar.

Conform teoremei Cayley – Hamilton (v. I.2.2.b) rezultă:

$$d_{cc}(\tilde{A}_{cc} - \tilde{B}_{cc}\tilde{K}_{cc}) = 0. \tag{4.10}$$

Pe de altă parte din (4.9) se mai obţine:

$$(A - BK)^i [v_1,...,v_r] = [v_1,...,v_r](\tilde{A}_{cc} - \tilde{B}_{cc}\tilde{K}_{cc})^i, \quad i = 0,1,2,.... \tag{4.11}$$

Din (4.11) cu (4.10) rezultă:

$$d_{cc}(A - BK)\left[v_1,...,v_r\right] = \left[v_1,...,v_r\right] d_{cc}(\tilde{A}_{cc} - \tilde{B}_{cc}\tilde{K}_{cc}) = 0,$$

ceea ce implică (4.8). □

Din teorema 4.3 rezultă că nu toate valorile proprii ale unui sistem sunt alocabile prin reacţie după stare, ci numai acelea aparţinând subsistemului de stare complet controlabilă. Valorile proprii ale sistemului de stare necontrolabilă (zerourile de decuplare la intrare) sunt invariante în raport cu reacţia după stare şi ele se regăsesc neschimbate în structura sistemului (4.2), (4.3). Acest fapt rezultă cu claritate din Teorema I.6.9 şi din demonstraţia necesităţii Teoremei 4.2.

O problemă cu implicaţii practice importante este aceea a alocării valorilor proprii în $\mathbb{C}_-$ prin reacţia după stare.

Definiţia 4.1

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) se numeşte *stabilizabil* dacă există o matrice K astfel încât sistemul (4.2), (4.3) să fie asimptotic stabil. □

Evident, conform cu Teorema 4.3, problema stabilizării nu este echivalentă cu problema alocării valorilor proprii după cum rezultă din cele ce urmează.

Teorema 4.4

Dacă sistemul (I.2.1), (I.2.2) este de stare complet controlabilă, atunci el este stabilizabil.

$\mathscr{D}$. Prin dualitate se ştie că (A,B) este controlabilă dacă şi numai dacă (B^T,A^T), respectiv $(B^T,-A^T)$ este complet observabilă. Aceasta este echivalentă cu faptul că următoarea matrice este simetrică şi pozitiv definită (v. secţiunea II.1.1):

$$M(0,t_1)=\int_0^{t_1} e^{-A\theta}BB^Te^{-A^T\theta}d\theta,\quad t_1>0\,.$$

Aceasta satisface egalitatea:

$$AM(0,\,t_1)+M(0,\,t_1)A^T=BB^T-e^{-At_1}BB^Te^{-A^Tt_1}\,,$$

care se verifică înlocuind $M(0,t_1)$ şi integrând. Egalitatea se scrie şi sub forma:

$$\left[A-BB^TM^{-1}(0,\,t_1)\right]M(0,\,t_1)+M(0,\,t_1)\left[A-BB^TM^{-1}(0,\,t_1)\right]^T=$$

$$=-(BB^T+e^{-At_1}BB^Te^{-A^Tt_1})\,.$$

Alegând acum

$$K=B^TM^{-1}(0,\,t_1) \tag{4.12}$$

se obţine următoarea ecuaţie Liapunov (v. secţiunea 1.4):

$$(A-BK)M(0,t_1)+M(0,t_1)(A-BK)^T=-(BB^T+e^{-At_1}BB^Te^{-A^Tt_1})\,.$$

Conform Teoremei 1.4, urmează că sistemul (4.2), (4.3) este asimptotic stabil. □

Teorema 4.5

Sistemul (I.2.1), (I.2.2), de stare incomplet controlabilă, este stabilizabil dacă subsistemul de stare necontrolabilă este asimptotic stabil.

$\mathscr{D}$. Fie $\operatorname{rang}\mathscr{C}=r<n$. Din demonstraţia Teoremei 4.2 rezultă că:

$$\det\left[I_ns-(A-BK)\right]=\det\left[I_rs-(\tilde{A}_{\mathrm{cc}}-\tilde{B}_{\mathrm{cc}}\tilde{K}_1)\right]\det\left(I_{n-r}s-\tilde{A}_{\mathrm{nc}}\right).$$

Aceasta înseamnă că prin $\tilde{K}_1$ valorile proprii ale matricei $(\tilde{A}_{\mathrm{cc}}-\tilde{B}_{\mathrm{cc}}\tilde{K}_1)$ sunt arbitrar alocabile (v. Teorema 4.4). Dacă subsistemul de stare necontrolabilă este asimptotic stabil, atunci sistemul (I.2.1), (I.2.2) este stabilizabil. □

Abordarea geometrică de la II.1.3 conduce la următorul rezultat.

Teorema 4.6

Fie sistemul (I.2.1), (I.2.2) pentru care $d^+(s)$ este polinomul valorilor proprii situate în $\mathbb{C}_+ \triangleq \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s \geq 0\}$. Dacă

$$\mathrm{Ker}\, d^+(A) \subset \mathrm{Im}\,\mathcal{C},$$

atunci sistemul este stabilizabil. □

c. Utilizarea ecuației Liapunov

Soluția (4.12) a problemei de stabilizare este dificil de utilizat deoarece necesită cunoașterea matricei de tranziție a sistemului (I.2.1), (I.2.2). O soluție mai simplă este următoarea.

Teorema 4.7

Fie sistemul (I.2.1), (I.2.2) de stare complet controlabilă şi fie

$$\lambda_m = \begin{cases} \sup\left\{x^T Ax,\ \|x\| \leq 1\right\}, \\ \text{sau} \\ \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|,\ i = \overline{1,n}\right\}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Atunci soluția problemei stabilizării este

$$K = B^T Z^{-1}, \tag{4.14}$$

unde Z este soluția următoarei ecuații Liapunov:

$$(A + \lambda I_n)Z + Z(A + \lambda I_n)^T = BB^T \tag{4.15}$$

pentru orice $\lambda > \lambda_m$.

$\mathcal{D}$. Pentru orice $\lambda > \lambda_m$ matricea $-(A + \lambda I_n)$ este o matrice hurwitziană. Într-adevăr, fie $x(t)$ orice soluție a ecuației: $\dot{x}(t) = -(A + \lambda I_n)x(t)$.

Atunci $\dot{x}^T(t)x(t) = -x^T(t)(A + \lambda I_n)x(t)$ şi deci

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = -2x^T(t)(A + \lambda I_n)x(t). \tag{4.16}$$

În conformitate cu (4.13) din (4.16) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le -2(\lambda-\lambda_m)\|x(t)\|^2, \;\Rightarrow\; \|x(t)\|^2 \le \|x(0)\|^2 e^{-2(\lambda-\lambda_m)t},\; t\in\mathbb{R}_+ .$$

Aceasta înseamnă că pentru orice $\lambda > \lambda_m$ matricea $-(A+\lambda I_n)$ este hurwitziană.

Ca atare, conform Teoremei 1.4, ecuaţia Liapunov:

$$-(A+\lambda I_n)Z - Z(A+\lambda I_n)^T = -BB^T$$

are o soluţie Z, simetrică şi pozitiv definită. Evident că din

$$(A+\lambda I_n - BB^T Z^{-1})Z + Z(A+\lambda I - BB^T Z^{-1})^T = -BB^T$$

rezultă că $A+\lambda I_n - BB^T Z^{-1}$ este hurwitziană. Întrucât completa controlabilitate a perechii (A,B) este echivalentă cu completa controlabilitate a perechii $(A+\lambda I_n, B)$ pentru orice $\lambda\in\mathbb{C}$ (v. Teorema II.1.13), rezultă că $(A+\lambda I_n, B)$ este stabilizabilă prin K de forma (4.14). Întrucât $\lambda > \lambda_m > 0$, valorile proprii ale matricei $(A-BK)$ sunt la o distanţă λ la stânga valorilor proprii ale matricei $(A+\lambda I_n - BK)$. Ca urmare, $(A-BK)$ este o matrice hurwitziană, ceea ce înseamnă că legea de reglare (4.1) cu (4.14) stabilizează sistemul (I.2.1), (I.2.2). □

Exemplul 4.3

Se consideră sistemul (I.2.1), (I.2.2) cu următoarele matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se stabilizeze sistemul prin reacţie după stare.

Întrucât $\operatorname{rang}\mathcal{C} = 2$, se poate utiliza (4.14). Este uşor de verificat că A nu este hurwitziană şi că $\lambda_m \cong 6$. Pentru $\lambda = 8$ ecuaţia (4.15) este echivalentă cu:

$$\begin{cases} 14z_1 - 2z_2 = 0 \\ 6z_2 + 14z_3 = 1 \\ 3z_1 + 21z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases},\ \text{în care } Z \triangleq \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

În aceste condiţii se obţine:

$$Z = \frac{1}{350}\begin{bmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 7/3 & 24 \end{bmatrix},\ K = \frac{1.050}{23}\begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix},\ A-BK = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 7.281/23 & -1.073/23 \end{bmatrix}. \ \square$$

4.2. Reacția după ieșire

În cazul în care starea sistemului (I.2.1), (I.2.2) nu este accesibilă pentru concretizarea legii (4.1) se poate utiliza *legea de reglare cu reacție după ieșire*:

$$u = M\,v - L\,y, \quad u, v \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}^p, \tag{4.17}$$

unde L este o matrice $m \times p$ constantă. În fig. I.3.1 legea (4.17) se adaugă ca o conexiune ieșire – intrare. Din (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) și (4.17) rezultă:

$$\dot{x} = (A - B\,L\,C)\,x + B\,M\,v, \tag{4.18}$$

$$y = C\,x. \tag{4.19}$$

Comparând (4.18) cu (4.2) rezultă că alegând

$$LC = K, \tag{4.20}$$

prin LC se pot obține aceleași rezultate ca și prin K. Așadar problema se poate formula în următoarea formă: fiind dat K, de exemplu conform Teoremelor 4.2 – 4.7, în ce condiții există L care satisface ecuația (4.20).

Pentru rezolvarea ecuației (4.20) se utilizează noțiunea de *inversă generalizată a unei matrice*. C^g este o inversă generalizată a matricei C, [8], dacă

$$CC^gC = C.$$

Evident, orice matrice admite o inversă generalizată, care în general nu este unică.

Teorema 4.8

Pentru sistemul (4.18), (4.19) există o matrice L astfel încât polinomul caracteristic al matricei $A - BLC$ să aibă coeficienți reali arbitrari dacă și numai dacă există K în condițiile Teoremei 4.2 și C^g pentru care are loc:

$$K(C^gC - I_n) = 0. \tag{4.21}$$

$\mathscr{D}$. Pentru K în conformitate cu Teorema 4.2, ecuația (4.20) are o soluție:

$$L = KC^g + L_{\mathrm{arb}}(C^gC - I_p), \tag{4.22}$$

în care L_{arb} este o matrice arbitrară (de aceleași dimensiuni ca matricea L), dacă și numai dacă are loc condiția de consistență (4.21) pentru cel puțin un K și cel puțin un C^g. □

Verificarea condiţiei de consistenţă poate fi evitată în cazul $p = m < n$, în care este utilizabil următorul rezultat, [85].

Teorema 4.9

Ecuaţia (4.20) are o soluţie L, pentru $p = m < n$ şi $\operatorname{rang} C = m$, dacă şi numai dacă

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} K \\ \hdashline C \end{bmatrix} = m \,. \;\square$$

Exemplul 4.4

Se consideră sistemul de la Exemplul II.1.5.

Să se analizeze posibilitatea alocării prin reacţie după ieşire a valorilor proprii $\lambda_i = -1,\ i = \overline{1,4}$.

De la Exemplul II.1.5 sunt cunoscute $m = p = 2$ şi C. La Exemplul 4.2 s-a determinat K prin care se alocă valorile proprii $\lambda_i = -1,\ i = \overline{1,4}$. Cu acestea se obţine:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} K \\ \hdashline C \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 25 & 24 & -1 & -24 \\ -16 & -10 & 0 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 > 2 \,.$$

Acest rezultat, conform Teoremei 4.9, arată că este imposibil să se aloce valorile proprii specificate prin reacţie după ieşire. □

4.3. Estimatorul asimptotic de stare

Din Teoremele 4.8 şi 4.9 rezultă că nu întotdeauna este posibil ca, prin (4.17) – reacţia statică după ieşire, să se aloce arbitrar toate valorile proprii ale sistemului (4.18), (4.19). Este însă posibilă alocarea parţială a valorilor proprii, [60]. Aceasta înseamnă că un număr de valori proprii ale sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$), altele decât cele din categoria zerourilor de decuplare, se regăsesc neschimbate ca valori proprii ale sistemului (4.18), (4.19).

Aceste limitări privind posibilităţile de alocare a valorilor proprii prin reacţie statică după ieşire de forma (4.17) pot fi eliminate dacă se utilizează reacţia dinamică după ieşire (v. Observaţia IV.1.1). O analiză detaliată în domeniul frecvențelor a sistemelor cu reacție după ieşire, înzestrate cu regulatoare de tip dinamic, numite şi *sisteme automate multivariabile*, se va face în capitolul IV.

S-a arătat la 3.1 că utilizarea reacției după stare (în condițiile Teoremei 4.2) permite alocarea arbitrară a valorilor proprii ale sistemului în circuit închis. În cazul reacției după ieşire (v. Teoremele 4.8 şi 4.9), o serie de restricții limitează posibilitățile de a asigura sistemului în circuit închis proprietățile dinamice dorite.

Pe de altă parte, în aplicații, se constată că nu toate componentele vectorului de stare al unui sistem sunt direct măsurabile sau dacă ele sunt totuşi măsurabile, numărul şi costul traductoarelor necesare nu justifică utilizarea reacției după stare.

În aceste circumstanțe şi întrucât prin cunoaşterea stării este posibilă alocarea arbitrară a valorilor proprii, se are în vedere şi posibilitatea aproximării stării pe baza cunoaşterii mărimilor de intrare şi de ieşire ale sistemului. Această soluție este sugerată de Definiția II.1.2 şi este de aşteptat ca valorificarea ei să fie în legătură cu proprietatea de observabilitate a stării sistemului considerat.

Evident că mărimea aproximantă $\hat{x}$ – numită în continuare *starea estimată* – poate fi utilizată pentru realizarea unei legi de reglare de forma (4.1) în care x se înlocuieşte cu $\hat{x}$. Un sistem dinamic cu ajutorul căruia se obține starea estimată a altui sistem se numeşte *estimator de stare*. Este de la sine înțeles că mărimea de intrare a estimatorului de stare este formată din mărimile de intrare şi de ieşire ale sistemului a cărui stare se estimează. În ceea ce priveşte calitatea estimării stării, o evaluare pertinentă a ei este posibilă pe baza *erorii de estimare*:

$$x_\varepsilon \triangleq x - \hat{x}. \tag{4.23}$$

În mod evident şi fără a mai fi necesară o argumentare detaliată, este de dorit ca $\hat{x}(t) \to x(t)$, adică $x_\varepsilon(t) \to 0$, pentru $t \to +\infty$. Dar $x_\varepsilon(t)$ este eroarea de estimare. În acest context, afirmația „$x_\varepsilon(t) \to 0$ pentru $t \to +\infty$” este condiția de *anularea asimptotică a erorii de estimare*. Un astfel de estimator se numeşte *estimator asimptotic de stare*, [75].

a. Estimatorul de stare de tip identitate

Există mai multe posibilități de a alege structura estimatorului de stare. Se tratează în continuare *estimatorul de stare de tip identitate* a cărui stare proprie este în acelaşi timp starea estimată $\hat{x}$. Pentru sistemul (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) un astfel de estimator de stare este descris de ecuația:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \; \hat{x}(0) = 0 . \tag{4.24}$$

L este o matrice de dimensiuni $n \times p$ care se alege astfel încât:

$$\lim_{t\to\infty}\left[x(t) - \hat{x}(t)\right] = \lim_{t\to\infty} x_\varepsilon(t) = 0 . \tag{4.25}$$

Se remarcă faptul că ordinul estimatorului este n, adică acelaşi cu ordinul sistemului (I.2.1), (I.2.2). De asemenea pentru simplificarea expunerii, în (I.2.2) s-a considerat $D = 0$. Dar $D = \text{constant} \neq 0$ nu influenţează esenţial estimarea stării, ci numai o serie de aspecte formale care conduc la aşa-numitul *estimator de stare tare*, [233].

Întrucât existenţa matricei L este direct legată de condiţia (4.25), pentru a se vedea în ce mod poate fi ea determinată, se elimină x, y şi $\hat{x}$ între relaţiile (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$), (4.23) şi (4.24) şi se obţine *ecuaţia erorii de estimare*:

$$\dot{x}_\varepsilon = (A - LC)x_\varepsilon, \quad x_\varepsilon(0) = x(0) . \tag{4.26}$$

În conformitate cu condiţia (4.25) – de anulare asimptotică a erorii, matricea L trebuie aleasă (dacă există) astfel încât matricea $A - LC$ să fie hurwitziană.

Din faptul că, în particular, se poate lucra cu $A^T - C^T L^T$ rezultă cu claritate că prin dualitate (v. Observaţia II.1.7 şi Teorema II.1.8) se ajunge la problema alocării valorilor proprii, respectiv la forma duală a Teoremei 4.2.

Teorema 4.10

Pentru estimatorul de stare (4.24), cu $\operatorname{rang} C = p \leq n$ există o matrice L astfel încât polinomul caracteristic al matricei $A - LC$ să aibă toţi coeficienţii (reali) arbitrari dacă şi numai dacă perechea (A, C) este complet observabilă. □

Demonstraţia urmează, prin dualitate, o cale similară cu aceea de la Teorema 4.2. Mai mult, acea demonstraţie fiind constructivă, ea poate fi utilizată pentru determinarea matricei L^T (în locul lui K) pe baza matricelor A^T şi C^T (în loc de A şi B) şi a polinomului $d_L(s)$ cu coeficienţi reali arbitrari (în locul lui $d_K(s)$).

b. Detectarea stării

Prin analogie cu Teorema 4.3 (prin dualitate) se trage concluzia că în cazul unui sistem de stare incomplet observabilă nu toate valorile proprii ale estimatorului (4.24) sunt alocabile prin matricea L. Ci numai acelea aparţinând subsistemului de stare complet observabilă. Valorile proprii ale sistemului de stare neobservabilă se regăsesc neschimbate în structura estimatorului (4.24).

O problemă foarte importantă pentru aplicații este aceea a existenței unui estimator asimptotic de stare pentru un sistem dat.

Definiția 4.2

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) se numeşte *detectabil* dacă există o matrice L astfel încât estimatorul de stare (4.24) să fie asimptotic stabil. □

Este uşor de observat că problema detectării stării nu este echivalentă cu problema alocării valorilor proprii ale estimatorului prin matricea L. Acest fapt face obiectul următoarelor trei teoreme, care se obțin prin dualitate din Teoremele 4.4, 4.5 şi 4.7.

Teorema 4.11

Dacă sistemul I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) este de stare complet observabilă, atunci el este detectabil. □

Teorema 4.12

Sistemul (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) de stare incomplet observabilă este detectabil dacă subsistemul de stare neobservabilă este asimptotic stabil. □

Teorema 4.13

Fie sistemul (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) de stare complet observabilă şi fie λ_m conform relației (4.13).

Atunci soluția problemei detectării este

$$L = Z^{-1} C^T , \tag{4.27}$$

unde Z este soluția următoarei ecuații Liapunov:

$$(A + \lambda I_n) Z + Z (A + \lambda I_n)^T = C^T C \tag{4.28}$$

pentru orice $\lambda > \lambda_m$. □

c. Estimatorul de stare de ordin minim

Estimatorul de stare (4.24) are dezavantajul că este de ordinul n, adică acelaşi ca ordinul sistemului estimat, care adesea poate fi neconvenabil de mare.

Trebuie să se aibă însă în vedere că pentru $\operatorname{rang} C = p < n$ ieşirea y conține, sub forma a p combinații liniare, informații despre cele n componente ale stării x. Urmează că, utilizând adecvat ieşirea y, dimensiunea estimatorului poate fi redusă, dar astfel încât starea estimatorului $z \in \mathbb{R}^{n-p}$ să asigure

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \hdashline y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} P \\ \hdashline C \end{bmatrix} x(t) \quad \text{pentru } t \to +\infty, \tag{4.29}$$

în care P este o matrice de dimensiuni $(n-p) \times n$, convenabil aleasă.

Se alege P astfel încât

$$\operatorname{rang}\left[P^T \;\vdots\; C^T\right]^T = n. \tag{4.30}$$

Urmează că $\left[P^T \;\vdots\; C^T\right]^T$ este inversabilă şi (4.29) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\begin{bmatrix} P \\ \hdashline C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hdashline y(t) \end{bmatrix} \to x(t) \quad \text{pentru } t \to +\infty. \tag{4.31}$$

Din (4.31) rezultă că $x(t)$ poate fi estimat din $z(t)$ şi $y(t)$ cu condiția definirii corecte a ecuațiilor intrare – stare – ieşire ale estimatorului de stare. O posibilitate în acest sens este reprezentată de următorul set de ecuații:

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{E}u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; z \in \mathbb{R}^{n-p}, \; z(0) = 0, \tag{4.32}$$

$$\hat{x} = \hat{C}z + \hat{D}y, \;\; \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4.33}$$

unde ieşirea estimatorului, $\hat{x}$, este starea estimată şi $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ sunt matrice de dimensiuni adecvate, a căror determinare face obiectul celor ce urmează.

Dacă sistemul (4.32), (4.33) satisface condiția (4.25), atunci acesta se numeşte estimator asimptotic de stare de ordin minim al sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$).

Teorema 4.14

Sistemul (4.32), (4.33) este un estimator asimptotic de stare de ordin minim al sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) dacă şi numai dacă au loc următoarele condiții:

(i) Matricea $\hat{A}$ este hurwitziană.

(ii) Există o matrice P astfel încât:

$$PA - \hat{A}P = \hat{B}C\,, \tag{4.34}$$

$$\hat{E} = PB\,, \tag{4.35}$$

$$\hat{C}P + \hat{D}C = I_n\,. \tag{4.36}$$

$\mathscr{D}$. Pentru a găsi condiția ca $z(t) \to Px(t)$ pentru $t \to +\infty$, se înmulţeşte ecuația (I.2.1) la stânga cu P din care se scade apoi, membru cu membru, ecuația (4.32). Se obține:

$$\dot{w} = \hat{A}w + (PB - \hat{E})u + (PA - \hat{A}P - \hat{B}C)y\,, \tag{4.37}$$

în care

$$w \triangleq Px - z \tag{4.38}$$

are semnificația de eroare parțială de estimare.

Este evident că $w(t) \to 0$ pentru $t \to +\infty$ este echivalentă cu condițiile (i) şi (ii) – relațiile (4.34), (4.35).

Condiția (4.25), echivalentă cu (4.31), are loc dacă şi numai dacă $w(t) \to 0$ pentru $t \to +\infty$.

Totodată, conform cu (4.33), ținând seama de (4.29) şi de $\hat{x} \to x$, are loc:

$$\left[\hat{C} \;\vdots\; \hat{D}\right]\left[\begin{array}{c} P \\ \hline C \end{array}\right] = I_n\,,$$

care este echivalentă cu (ii) – relația (4.36). □

d. Determinarea unui estimator de ordin minim

În ceea ce priveşte determinarea matricelor $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$, bine cunoscută este metoda Gopinath, [118], în care P asigură alocarea valorilor proprii ale matricei $\hat{A}$. O altă posibilitate constă în a alege $\hat{A}$ (conform condiției (*i*) din Teorema 4.14) şi $\hat{B}$ în mod adecvat, după care se determină $\hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ şi P din (4.30), (4.34) – (4.36). Se prezintă în continuare metoda Gopinath.

Este uşor de verificat că (4.34) şi (4.36) se pot scrie sub forma echivalentă:

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} P \\ \hline C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} PA \\ \hline I_n \end{array}\right]. \tag{4.39}$$

Dacă $\left[P^T \mid C^T\right]^T$ este nesingulară, aşa cum s-a statuat deja prin condiția (4.30), atunci din (4.39) se obține:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}^{-1}. \tag{4.40}$$

Pentru P cunoscut matricele $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ se determină din (4.40), iar matricea $\hat{E}$ se obține din (4.35).

Alegerea matricei P nu este în întregime arbitrară, ci trebuie avută în vedere condiția (*i*) de la Teorema 4.14. În acest scop se procedează după cum urmează:

1º Se constituie o matrice C_*, de dimensiuni $(n-p)\times n$, astfel încât următoarea matrice să fie nesingulară:

$$S = \begin{bmatrix} C_* \\ C \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

2º Se utilizează S şi S^{-1} în transformarea de similitudine (I.1.28). Din (4.41), cu partiționările corespunzătoare aceleia din matricea S, se obțin matricele:

$$\begin{gathered} \tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} = SB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CS^{-1} = \left[0 \mid I_p\right]. \end{gathered} \tag{4.42}$$

3º Pentru sistemul echivalent (4.42) se determină estimatorul $\hat{\tilde{A}}, \hat{\tilde{B}}, \hat{\tilde{C}}, \hat{\tilde{D}}, \hat{\tilde{E}}$ folosind matricea:

$$\tilde{P} = \left[I_{n-p} \mid -L\right], \tag{4.43}$$

unde L este o matrice $(n-p)\times n$ care se va alege în scopul alocării valorilor proprii ale estimatorului.

4º Pentru (4.42), (4.43) din (4.40), *mutatis mutandis*, rezultă:

$$\left[\begin{array}{c|c}\hat{\hat{A}} & \hat{\hat{B}} \\ \hline \hat{\hat{C}} & \hat{\hat{D}}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c}I_{n-p} & -L\end{array}\right]\tilde{A} \\ \hline I_n\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I_{n-p} & -L \\ \hline 0 & I_p\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}\tilde{A}_{11}-L\tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{12}-L\tilde{A}_{22} \\ \hline I_{n-p} & 0 \\ \hline 0 & I_p\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I_{n-p} & L \\ \hline 0 & I_p\end{array}\right].$$

În acest fel se obțin:

$$\begin{aligned}
&\hat{\hat{A}}=\tilde{A}_{11}-L\tilde{A}_{21}, \\
&\hat{\hat{B}}=\tilde{A}_{11}L-L\tilde{A}_{21}L+\tilde{A}_{12}-L\tilde{A}_{22}L, \\
&\left[\hat{\hat{C}} \quad \hat{\hat{D}}\right]=\begin{bmatrix}I_{n-p} & L \\ 0 & I_p\end{bmatrix}, \\
&\hat{\hat{E}}=\tilde{B}_1-L\tilde{B}_2.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Se admite că perechea $(\tilde{C},\, \tilde{A})$ este complet observabilă. Atunci

$$\operatorname{rang}\tilde{\mathcal{O}}=\begin{bmatrix}\tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\end{bmatrix}=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}0 & I_p \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{21}\tilde{A}_{11}+\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{21}\tilde{A}_{12}+\tilde{A}_{22}^2 \\ \vdots & \vdots\end{bmatrix}=n\,.$$

Aceasta implică independența liniară a primelor $n-p$ coloane din $\tilde{\mathcal{O}}$. Ca urmare, perechea $(\tilde{A}_{21}, \tilde{A}_{11})$ este complet observabilă şi $\hat{\hat{A}}$ (v. prima relație din (4.44)) poate avea orice valori proprii ca o consecință a alegerii adecvate a matricei L.

5º Întrucât estimatorul $\hat{\hat{A}},\, \hat{\hat{B}},\, \hat{\hat{C}},\, \hat{\hat{D}},\, \hat{\hat{E}}$ se asociază sistemului (4.42), rezultă că ieşirea $\hat{\hat{x}}$ se poate utiliza pentru estimarea stării sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D=0$) deoarece $S^{-1}\hat{x}(t)\to x(t)$ pentru $t\to+\infty$. Ca urmare estimatorul asociat sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D=0$) este dat de matricele:

$$\hat{A}=\hat{\hat{A}},\ \hat{B}=\hat{\hat{B}},\ \hat{C}=S^{-1}\hat{\hat{C}},\ \hat{D}=S^{-1}\hat{\hat{D}},\ \hat{E}=\hat{\hat{E}}\,. \tag{4.45}$$

6º Se alege matricea L astfel încât $\hat{A}=\hat{\hat{A}}=\tilde{A}_{11}-L\tilde{A}_{21}$ să aibă valorile proprii prestabilite. Se pot folosi în acest scop procedurile din secțiunea 4.1.

Exemplul 4.5

Se consideră sistemul (I.2.1), (I.2.2) cu:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ D=0\,.$$

Să se determine un estimator asimptotic de stare de ordinul 1 având valoarea proprie –1.

1º Se alege $C_*=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ şi cu (4.41) se obţine:

$$S=\begin{bmatrix}C_*\\ \hline C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad S^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right].$$

2º Utilizând (4.42) rezultă:

$$\tilde{A}=SAS^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc}-6 & -3 & -1\\ \hline 7 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right],\ \tilde{B}=SB=\begin{bmatrix}1\\ \hline -1\\ 0\end{bmatrix},\ \tilde{C}=CS^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

3º Se adoptă $\tilde{P}=\left[\begin{array}{c|cc}1 & -l_1 & -l_2\end{array}\right]$.

4º Utilizând (4.44) se obţine:

$$\hat{\tilde{A}}=-6-7l_1-l_2,$$

$$\hat{\tilde{B}}=\begin{bmatrix}-3-9l_1-7l_1^2-l_1l_2-l_2 & \quad -1-l_1-7l_1l_2-6l_2-l_2^2\end{bmatrix},$$

$$\hat{\tilde{C}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \hat{\tilde{D}}=\begin{bmatrix}l_1 & l_2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \hat{\tilde{E}}=1+l_1.$$

5º – 6º Alegând $l_1=-1$ şi $l_2=2$ se ajunge, conform relaţiilor (4.45), la estimatorul asimptotic de stare de ordinul 1, descris de ecuaţiile (4.32), (4.33) cu matricele:

$$\hat{A} = -1, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = 0 . \square$$

e. Reacția după starea estimată

În condițiile în care este posibilă estimarea stării sistemului (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) în locul legii (4.1) se poate utiliza legea de reglare:

$$u = Mv - K\hat{x}, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u, v \in \mathbb{R}^m , \tag{4.46}$$

în care v şi M au semnificația din relația (4.1).

Ținând seama de ecuațiile (4.32) şi (4.33) ale estimatorului de ordin minim, din (I.2.1), (I.2.2) (cu $D = 0$) şi (4.46) rezultă:

$$\dot{x} = (A - BK\hat{D}C)x + BK\hat{C}z + BMv , \tag{4.47}$$

$$\dot{z} = (\hat{B}C - \hat{E}K\hat{D}C)x + (\hat{A} - \hat{E}K\hat{C})z + \hat{E}Mv , \tag{4.48}$$

$$y = Cx , \tag{4.49}$$

care sunt ecuațiile subsistemului cu reacție după starea estimată, furnizată de un estimator asimptotic de stare de ordin minim.

Teorema 4.15 (de separare)

Polinomul caracteristic al sistemului (4.47) – (4.49) (cu reacție după starea estimată dată de un estimator de ordin minim) se poate factoriza sub forma:

$$d_0(s) = \det\left[I_n s - (A - BK)\right] \det\left[I_{n-p} s - \hat{A}\right]. \tag{4.50}$$

$\mathscr{D}$. Se definește, conform relației (4.38), transformarea de stare:

$$\begin{bmatrix} x \\ \hline w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline P & -I_{n-p} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hline z \end{bmatrix},$$

care se aplică sistemului (4.47), (4.48). Ținând seama de (4.34) – (4.36) se obține:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \hline \dot{w} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A - BK & BK\hat{C} \\ \hline 0 & \hat{A} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hline w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BM \\ \hline 0 \end{bmatrix} v . \tag{4.51}$$

Sistemul (4.51) este echivalent cu sistemul (4.47), (4.48). Având în vedere forma particulară a matricei sistemului (4.51), rezultă imediat că polinomul său caracteristic are forma (4.50). □

Rezultatul exprimat prin Teorema 4.1, valabil şi pentru estimatorul de stare de tip identitate (4.24), este remarcabil prin faptul că permite rezolvarea problemei regulatorului (matricea K) în întregime *separat* de aceea a estimatorului de stare (matricele L şi respectiv $\hat{A}$).

O consecinţă a Teoremelor 4.2, 4.10, 4.14 şi 4.15 este următorul rezultat deosebit de important pentru sinteza sistemelor automate multivariabile.

Teorema 4.16

Pentru orice sistem dinamic liniar constant de ordinul n, de stare complet controlabilă şi complet observabilă, având matricea de ieşire de dimensiuni $p \times n$ şi de rang $p < n$, se poate realiza o reacţie după ieşire printr-un sistem dinamic liniar constant de ordinul $n - p$ astfel încât polinomul caracteristic de gradul $2n - p$ al sistemului în circuit închis să aibă toţi coeficienţii (reali) arbitrari. □

În legătură cu demonstraţia Teoremei 4.15, un alt aspect de natură structurală este prezentat în rezultatul următor.

Teorema 4.17

Estimatorul de stare de ordin minim din componenţa sistemului în circuit închis (4.47) – (4.49) este de stare necontrolabilă.

$\mathscr{D}$. Conform cu (4.51) (care este echivalentul sistemului (4.47), (4.48)), din Teorema II.1.16 rezultă că subsistemul reprezentat prin vectorul stare w este de stare necontrolabilă. □

Capitolul IV
SISTEME AUTOMATE LINIARE MULTIVARIABILE

1. Analiza stabilității

Prin *sistem automat multivariabil* se înțelege un sistem cu mai multe mărimi de intrare şi mai multe mărimi de ieşire şi, fapt esențial, cu *mai multe conexiuni de reacție negativă*. Astfel de sisteme se întâlnesc tot mai frecvent în aplicații. Metodele clasice (elaborate pentru sisteme automate *monovariabile* – cu o singură conexiune de reacție negativă) sunt inoperante în noul context. Ca urmare, sunt necesare noi metode de studiu, dedicate sistemelor automate multivariabile.

Ceea ce este distinctiv în studiul sistemelor automate este faptul că rezultatele de stabilitate deliberat şi special obținute pentru astfel de sisteme în domeniul frecvențelor (de pildă criteriul Nyquist) permit *caracterizarea sistemului în circuit închi*s, ca asimptotic stabil sau BIBO stabil, pe baza *cunoaşterii sistemului în circuit deschis*. Dacă în analiza stabilității unui sistem automat acest aspect pare a fi mai puțin relevant, pentru sinteza lui el este foarte important. Principalul motiv este acela că sinteza unui sistem automat constă în determinarea structurii şi / sau parametrilor unei părți a sistemului în circuit deschis (în speță a regulatorului) în scopul satisfacerii cerințelor impuse sistemului în circuit închis.

În aceste circumstanțe extinderea utilizării metodelor domeniului frecvențelor pentru abordarea studiului sistemelor automate multivariabile reprezintă o evoluție firească, în care noțiunea centrală, ca şi în trecut, rămâne *stabilitatea*. Această extindere s-a desfăşurat pe două direcții: (1) s-a realizat o generalizare a metodelor clasice (principiul argumentului, locurile de transfer caracteristice, criteriul Nyquist generalizat); (2) s-au aplicat metode şi rezultate din analiza funcțională şi teoria operatorilor.

Acest capitol este dedicat expunerii principalelor rezultate obținute în cadrul primei direcții în care se operează cu noțiuni şi procedee cunoscute şi devenite clasice în cadrul analizei şi sintezei sistemelor automate monovariabile.

1.1. Descrierea matematică

Structura unui sistem automat multivariabil cu *reacție unitară* este dată în fig. IV.1.1. Matricele de transfer $G_R(s)$ şi $G_F(s)$, de ordinul m, reprezintă *regulatorul* şi *partea fixată* (elementele de execuție, instalația automatizată şi traductoarele). $v, y, u, w \in \mathbb{R}^m$ sunt respectiv: *referința*, *mărimea reglată*, *abaterea* şi *comanda*. Controlabilitatea funcțională completă a ieşirilor şi observabilitatea funcțională completă a intrărilor se asigură prin $\det G_F(s) \not\equiv 0$, $\det G_R(s) \not\equiv 0$ (v. subcap. II.3).

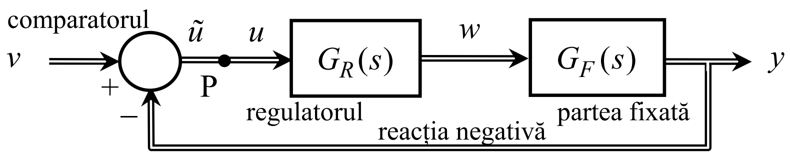

Fig. IV.1.1. Structura de bază a unui sistem automat multivariabil

Conform fig. IV.1.1, ecuațiile de funcționare a sistemului sunt următoarele:

$$Y(s) = G_F(s)W(s), \tag{1.1}$$

$$W(s) = G_R(s)U(s), \tag{1.2}$$

$$U(s) = V(s) - Y(s), \tag{1.3}$$

în care $U(s), V(s), W(s), Y(s)$ sunt transformatele Laplace ale mărimilor u, v, w, y.

Eliminând $U(s)$ şi $W(s)$ între ecuațiile (1.1) – (1.3) se obține:

$$[I_m + G_F(s)G_R(s)]Y(s) = G_F(s)G_R(s)V(s). \tag{1.4}$$

Din ecuația (1.4) rezultă:

$$Y(s) = G_0(s)V(s), \tag{1.5}$$

în care

$$G_0(s) \triangleq [I_m + G(s)]^{-1} G(s), \tag{1.6}$$

$$G(s) \triangleq G_F(s)G_R(s) \tag{1.7}$$

sunt matricele de transfer ale sistemului automat (*în circuit închis*) şi *sistemului în circuit deschis* (întrerupt în P, cu $v = 0$, cu $u \neq 0$ şi $\tilde{u} = -y$, v. fig. IV.1.1).

La explicitarea mărimii $Y(s)$ din ecuația (1.4) s-a presupus că matricea

$$F(s) \triangleq I_m + G(s) \tag{1.8}$$

satisface condiția $\det F(s) \not\equiv 0$, respectiv că există $F^{-1}(s)$. Semnificația matricei $F(s)$ rezultă din fig. IV.1.1 în următoarea situație. Pentru sistemul în circuit deschis (întrerupt în punctul P şi cu $V(s) = 0$), mărimile de intrare şi de ieşire sunt intrarea în regulator, $U(s)$, şi ieşirea din comparator,

$$\tilde{U}(s) = -G_F(s)G_R(s)U(s) .$$

Cu aceasta se evaluează diferența $U(s) - \tilde{U}(s)$. Folosind (1.7), (1.8) se obține:

$$U(s) - \tilde{U}(s) = F(s)U(s) .$$

Este clar că diferența $U(s) - \tilde{U}(s)$ depinde de matricea $F(s)$, care, din acest motiv, se numeşte *matricea de transfer diferență a reacției*.

Ca şi în cazul sistemelor automate monovariabile şi după cum se va arăta în cele ce urmează, matricea de transfer diferență a reacției conține informații esențiale privitoare la stabilitatea sistemului automat cu structura din fig. IV.1.1.

Pentru justificarea acestei afirmații, sistemul în circuit deschis, descris prin matricea proprie $G(s)$, se explicitează prin reprezentarea de stare de ordinul n:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m , \tag{1.9}$$

$$y = Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^m , \tag{1.10}$$

în care A, B, C, D sunt matrice reale constante de dimensiuni adecvate.

La (1.9), (1.10) se adaugă ecuația comparatorului (v. fig. IV.1.1, şi (1.3)):

$$u = v - y . \tag{1.11}$$

După calcule relativ simple (se elimină u între (1.9) – (1.11)), în ipoteza $\det(I_m + D) \neq 0$, se obține reprezentarea de stare a sistemului automat:

$$\dot{x} = A_0x + B_0v, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n, \ v \in \mathbb{R}^m , \tag{1.12}$$

$$y = C_0x + D_0v, \quad y \in \mathbb{R}^m , \tag{1.13}$$

în care

$$\begin{cases} A_0 = A - B(I_m + D)^{-1}C \\ B_0 = B\left[I_m - (I_m + D)^{-1}D\right] \\ C_0 = (I_m + D)^{-1}C \\ D_0 = (I_m + D)^{-1}D. \end{cases} \tag{1.14}$$

Dacă are loc $\det(I_m + D) = 0$, atunci sistemul automat nu poate realiza funcționalitatea pentru care a fost conceput.

Observația 1.1

Relațiile (1.14) evidențiază modificările structurale şi parametrice induse de reacția negativă. Se remarcă formula matricei A_0 care aminteşte de expresia $A - BLC$ (cu $L = (I_m + D)^{-1}$) din problema reacției liniare după ieşire. Conform celor prezentate în secțiunea III.4.2, este posibil ca matricele A_0 şi A să aibă valori proprii comune. Evident, acest fapt este important în studiul stabilității sistemului în circuit închis pe baza proprietăților sistemului în circuit deschis.

Alocarea arbitrară a tuturor valorilor proprii ale matricei A_0 este posibilă numai dacă matricea de transfer $G_F(s)$ a părții fixate este ireductibilă, [141], şi, pe de altă parte, dacă gradul McMillan al matricei $G_R(s)$ a regulatorului este egal cu $\min(\mu_F - 1, \nu_F - 1)$, în care μ_F şi ν_F sunt indicii de controlabilitate şi de observabilitate ai unei realizări minimale a părții fixate (v. secțiunea II.1.3). □

1.2. Stabilitatea internă şi stabilitatea externă

Se folosesc rezultatele de bază privitoare la stabilitatea sistemelor dinamice liniare prezentate în subcapitolul III.1. Pentru studiul stabilității sistemului automat cu structura din fig. IV.1.1 trebuie să se cunoască *polinomul caracteristic*:

$$d_0 = \det(I_n s - A_0) \tag{1.15}$$

al matricei sistemului automat cu reprezentarea (1.12), (1.13). Totodată trebuie să se cunoască *polinomul polilor* $p_0(s)$ al matricei $G_0(s)$ (v. (1.6) şi Teorema I.4.5).

Teorema 1.1

Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 este asimptotic stabil dacă şi numai dacă polinomul său caracteristic, $d_0(s)$, este hurwitzian. □

Teorema 1.2

Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 este BIBO stabil dacă şi numai dacă polinomul polilor săi, $p_0(s)$, este hurwitzian. □

Exemplul 1.1

Se consideră sistemul automat cu structura din fig. IV.1.2. Să se determine valorile $k>0$ pentru care sistemul este asimptotic stabil şi respectiv BIBO stabil.

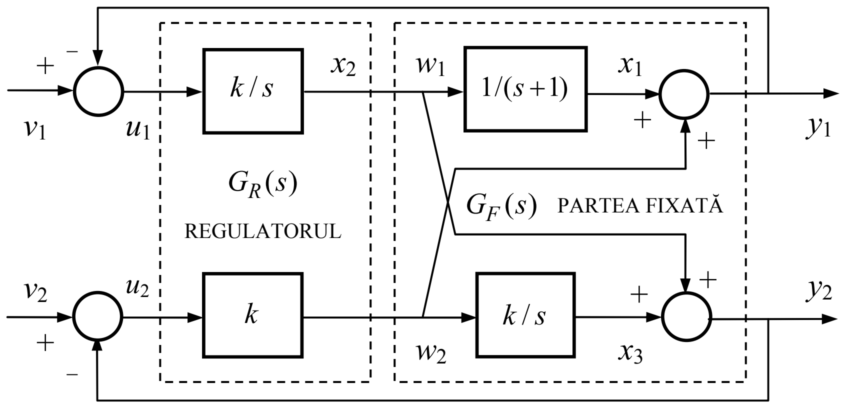

Fig. IV.1.2. Structura sistemului de la exemplul 1.1

Pentru a se obține o reprezentare de stare a sistemului în circuit deschis, se definesc variabilele de stare x_1, x_2, x_3 (fig. IV.1.2) şi se scriu ecuațiile:

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1} X_2(s) \\ X_2(s) = \dfrac{k}{s} U_1(s) \\ X_3(s) = \dfrac{k}{s} U_2(s) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} Y_1(s) = X_1(s) + kU_2(s) \\ Y_2(s) = X_2(s) + X_3(s). \end{cases}$$

Se trece la domeniul timpului şi se obțin ecuațiile de stare în circuit deschis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{=B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Acestora li se adaugă ecuația comparatorului:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Sistemului în circuit deschis nu este asimptotic stabil deoarece polinomul său caracteristic

$$d(s) = \det(I_3 s - A) = s^2(s+1)$$

are două rădăcini nule şi, ca urmare, nu este hurwitzian.

Utilizând (1.12) – (1.14) se obțin ecuațiile de stare în circuit închis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -k & k^2 & k^2 \\ 0 & -k & -k \end{bmatrix}}_{=A_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & -k^2 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{=B_0} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=C_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=D_0} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Pe baza relației (1.15) se obține polinomul caracteristic

$$d_0(s) = \det(I_3 s - A_0) = s^3 + (-k^2 + k + 1)s^2 + (-k^2 + 2k)s + k^2 .$$

Matricea Hurwitz asociată acestui polinom are forma:

$$H_3 = \begin{bmatrix} -k^2 + k + 1 & 1 & 0 \\ k^2 & -k^2 + 2k & -k^2 + k + 1 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}.$$

Conform criteriului Hurwitz (v. III. 3) condițiile de stabilitate asimptotică sunt:

$$\det H_1 = -k^2 + k + 1 > 0,$$
$$\det H_2 = \left(-k^2 + k + 1\right)\left(-k^2 + 2k\right) - k^2 > 0,$$
$$\det H_3 = k^2 \det H_2 > 0.$$

A treia inegalitate fiind echivalentă cu a doua, rezultă următoarele condiții:

$$-k^2+k+1>0, \quad k\left(k^3-3k^2+2\right)>0 .$$

Soluția $k\in(0,1)$ este domeniul de stabilitate asimptotică. Reacția negativă are efect stabilizant: pentru $k>0$ sistemul în circuit deschis nu este asimptotic stabil, dar pentru $k\in(0,1)$ sistemul în circuit închis este asimptotic stabil.

Conform relațiilor (1.7), (1.8) şi (1.6) se obțin:

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{k}{s} & 0 \\ 0 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{k}{s(s+1)} & k \\ \dfrac{k}{s} & \dfrac{k}{s}\end{bmatrix}, \; F(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s^2+s+k}{s(s+1)} & k \\ \dfrac{k}{s} & \dfrac{s+k}{s}\end{bmatrix},$$

$$\det F(s)=\frac{s^3+(-k^2+k+1)s^2+(-k^2+2k)s+k^2}{s^2(s+1)}=\frac{d_0(s)}{d(s)},$$

$$F^{-1}(s)=\frac{1}{\det F(s)}\begin{bmatrix} \dfrac{s+k}{s} & -k \\ -\dfrac{k}{s} & \dfrac{s^2+s+k}{s(s+1)}\end{bmatrix},$$

$$G_0(s)=\frac{k}{d_0(s)}\begin{bmatrix} -ks^2-(k-1)s+k & s^2(s+1) \\ s(s+1) & -(k-1)s^2-(k-1)s+k\end{bmatrix}.$$

Din acest rezultat se obține:

$$p_0(s)\equiv d_0(s)=s^3+\left(-k^2+k+1\right)s^2+\left(-k^2+2k\right)s+k^2 .$$

Aceasta înseamnă că sistemul este BIBO stabil pentru $k\in(0,1)$. Stabilitatea asimptotică este echivalentă cu BIBO stabilitatea deoarece pentru $k\neq 0$ realizarea adoptată este minimală (de stare complet controlabilă şi complet observabilă). □

Observația 1.2

Polinomul caracteristic al sistemului în circuit deschis (1.9), (1.10) este

$$d(s)=\det(I_n s-A) . \tag{1.16}$$

La Exemplul 1.1 are loc $\det F(s)=d_0(s)/d(s)$. Aceasta se poate utiliza în studiul stabilității ca şi în cazul sistemelor automate monovariabile ($m=1$). Se va arăta că relația dintre $\det F(s)$ şi $d_0(s), d(s)$ este valabilă în general. □

1.3. Rezultate bazate pe teorema Hsu – Chen

a. Determinantul matricei diferență a reacției

În continuare se examinează proprietățile fracției raționale $\det F(s)$ şi utilizarea ei în studiul stabilității sistemului cu structura din Fig. IV.1.1.

Teorema 1.3 (Hsu – Chen)

Între $\det F(s)$ (v. (1.8)), $d_0(s)$ (v. (1.15)) şi $d(s)$ (v. (1.16)) există relația:

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} = \frac{d_0(s)}{d(s)}, \tag{1.17}$$

în care $\det F(\infty) = \det(I_m + D) \neq 0$.

$\mathcal{D}.$ Întrucât (1.9), (1.10) este o realizare a matricei $G(s)$, rezultă că

$$G(s) = C(I_n s - A)^{-1} B + D. \tag{1.18}$$

În conformitate cu (1.8) şi (1.18) se scrie:

$$\det F(s) = \det\left[I_m + C(I_m s - A)^{-1} B + D\right]. \tag{1.19}$$

Se foloseşte o formulă Schur (v. Anexa E) şi relația (1.19) devine:

$$\det F(s) = \underbrace{\det(I_n s - A)^{-1}}_{=d^{-1}(s)} \det\left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & B \\ \hline -C & I_m + D \end{array}\right].$$

Se ține seama de (1.16) şi se face următorul artificiu de calcul:

$$\det F(s) = \frac{1}{d(s)} \underbrace{\det\left[\begin{array}{c|c} I_n & -B(I_m + D)^{-1} \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right]}_{=1} \det\left[\begin{array}{c|c} I_n s - A & B \\ \hline -C & I_m + D \end{array}\right].$$

După înmulțirea determinanților din membrul drept se obține:

$$\det F(s) = \frac{1}{d(s)} \underbrace{\det\left[I_n s - A + B(I_m + D)^{-1} C\right]}_{=d_0(s)} \det[I_m + D]. \tag{1.20}$$

Ținând seama de prima relație din (1.14), de (1.15) şi de faptul că $\det F(\infty) = \lim_{s\to\infty} \det F(s) = \det(I_m + D) \neq 0$, din (1.20) rezultă (1.17). □

Teorema 1.3 este un rezultat fundamental pe calea analizei stabilității în circuit închis pe baza cunoaşterii sistemului în circuit deschis.

b. Zerouri invariante şi poli invarianți

Se examinează în continuare situațiile în care polinoamele $d_0(s)$ şi $d(s)$ pot avea zerouri comune sau, cu alte cuvinte, dacă sistemul în circuit deschis poate avea valori proprii invariante în raport cu reacția după ieşire conform fig. IV.1.1.

Teorema1. 4

Zerourile de decuplare ale sistemului în circuit deschis (1.9), (1.10) sunt totodată zerouri de decuplare ale sistemului în circuit închis (1.9) – (1.11), respectiv sunt zerouri comune ale polinoamelor $d(s)$ şi $d_0(s)$.

$\mathscr{D}$. Utilizând descompunerea canonică Kalman (v. Teorema II.1.19), conform cu relațiile (II.1.73) – (II.1.75), pentru sistemul în circuit deschis se scrie:

$$d(s)=\underbrace{\det(I_{n_2}s-\tilde{A}_{22})}_{p(s)\equiv d_2(s)}\underbrace{\det(I_{n_1}s-\tilde{A}_{11})\det(I_{n_3}s-\tilde{A}_{33})\det(I_{n_4}s-\tilde{A}_{44})}_{=z^0(s)}, \quad (1.21)$$

unde $p(s)$ şi $z^0(s)$ sunt polinoamele polilor şi respectiv zerourilor de decuplare.

Folosind acum (1.14), (1.15), (II.1.67), (II.1.68), pentru sistemul în circuit închis se scrie:

$$d_0(s)=\det[I_ns-A+B(I_m+D)^{-1}C]\equiv\det[I_ns-\tilde{A}+\tilde{B}(I_m+\tilde{D})^{-1}\tilde{C}]\equiv \quad (1.22)$$

$$\equiv\underbrace{\det[I_{n_2}s-\tilde{A}_{22}+\tilde{B}_2(I_m+D)^{-1}\tilde{C}_2]}_{p_0(s)\equiv d_{20}(s)}\underbrace{\det(I_{n_1}s-\tilde{A}_{11})\det(I_{n_3}s-\tilde{A}_{33})\det(I_{n_4}s-\tilde{A}_{44})}_{=z^0(s)},$$

în care $p_0(s)$ este polinomul polilor sistemului în circuit închis.

Evident, $z^0(s)$ este un divizor comun al polinoamelor $d(s)$ şi $d_0(s)$. □

Prin urmare, zerourile de decuplare ale sistemului în circuit deschis sunt *invariante* în raport cu reacția după ieşire. Se poate enunța acum următorul rezultat.

Teorema 1.5

Între $\det F(s)$ (v. (1.8)), $p_0(s)$ (v. (1.22)) şi $p(s)$ (v. (1.21)) există relația:

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)}=\frac{p_0(s)}{p(s)}. \;\square \quad (1.23)$$

În acest context se pune întrebarea dacă $p_0(s)$ şi $p(s)$ pot avea şi ele divizori comuni. Răspunsul este afirmativ. Se examinează mai întâi două exemple.

Exemplul 1.2

Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.3. Să se studieze ce divizor comun au $p(s)$ şi $p_0(s)$ şi ce origine are acesta.

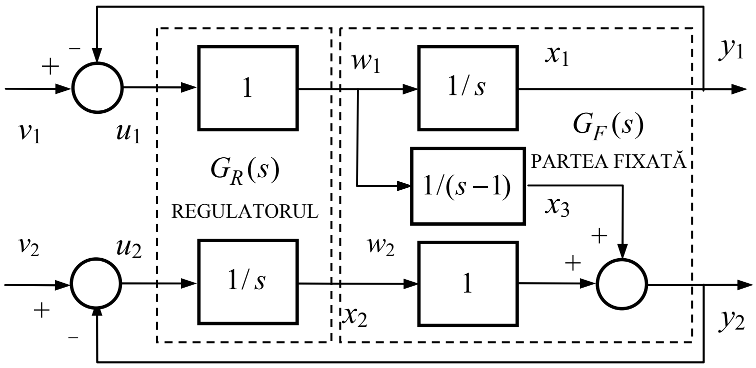

Fig. IV.1.3. Structura sistemului de la Exemplul 1.2

Conform fig. IV.1.3 pentru sistemul în circuit deschis se scrie:

$$G(s) = G_F(s)G_R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \ p(s) = s^2(s-1).$$

Pentru sistemul în circuit închis, conform relației (1.6), se obține:

$$G_0(s) = \left[I_2 + G(s)\right]^{-1} G(s) = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{s^2}{(s-1)(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Rezultă că $p_0(s) = (s+1)^2(s-1)$ şi divizorul comun este $q(s) = s-1$.

Pentru a afla originea acestui divizor comun se foloseşte (1.23). Se obține:

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} = \frac{(s+1)^2\,\cancel{(s-1)}}{s^2\,\cancel{(s-1)}} = \frac{(s+1)^2}{s^2}.$$

In acelaşi timp, un calcul direct al $\det F(s)$, conform cu (1.8), conduce la:

$$\det F(s) = \det[I_2 + G(s)] = \det\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{s} & 0 \\ \dfrac{1}{s-1} & 1+\dfrac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{(s+1)^2}{s^2},$$

adică, pe această cale apariția divizorului comun $q(s) = s-1$ este imposibilă.

Pe de altă parte, procedând la determinarea polinomului $z(s)$ al zerourilor de transmisie al sistemului în circuit deschis, conform Teoremei I.4.6, rezultă:

$$\det G(s) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} = \frac{(s-1)}{s^2(s-1)} \equiv \frac{z(s)}{p(s)},\quad z(s) = s-1 .$$

Aşadar $q(s) = s-1$ este şi divizorul comun al polinoamelor $z(s)$ şi $p(s)$. Datorită acestui fapt $q(s)$ este divizor comun al polinoamelor $p(s)$ şi $p_0(s)$. □

Exemplul 1.3

Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 şi

$$G(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \\ -\dfrac{6}{s+1} & \dfrac{3(s-1)}{(s+1)(s-2)} \end{bmatrix}.$$

Să se determine polinoamele $p(s)$ şi $p_0(s)$ şi eventualul divizor comun.

Conform Teoremei I.4.5, $p(s) = (s+1)(s-2)$. Dar, $\det G(s) = -3p^{-1}(s)$. Conform Teoremei I.4.6, rezultă că $z(s) \equiv 1$ şi implicit $q(s) \equiv 1$. Pe de altă parte, din (1.6) rezultă $p_0(s) \equiv p(s)$, fapt confirmat de $\det F(s) = 1$ (calculat cu (1.8)). Motivul este că reacția după ieşire permută polii între ei: –1 trece în 2 şi 2 în –1. □

Se confirmă faptul că pot exista poli *invarianți* în raport cu reacția după ieşire.

Teorema 1.6

Sistemul în circuit deschis (1.7) poate avea poli invarianți în raport cu reacția după ieşire a sistemului automat cu structura din fig. IV.1.1.

D. În general, pentru polinoamele monice $z(s)$ (al zerourilor) şi $p(s)$ (al polilor) ale lui $G(s)$, având c.m.m.d.c. (monic) $q(s)$, se pot scrie relațiile:

$$z(s) = q(s)\overline{z}(s)\,, \tag{1.24}$$

$$p(s) = q(s)\overline{p}(s)\,. \tag{1.25}$$

$\overline{z}(s),\ \overline{p}(s)$ (coprime) rezultă, după simplificări, direct din $\det G(s)$, adică:

$$\det G(s) = k\frac{\overline{z}(s)}{\overline{p}(s)}, \quad k = \text{constant.} \tag{1.26}$$

Se ştie (v. Teorema I.4.6) că amplificând $\overline{z}(s),\ \overline{p}(s)$ în (1.26) cu $q(s)$ se obține:

$$\det G(s) = k\frac{\overline{z}(s)}{\overline{p}(s)} \equiv k\frac{q(s)\overline{z}(s)}{q(s)\overline{p}(s)} \equiv k\frac{z(s)}{p(s)}. \tag{1.27}$$

Pe de altă parte, prin calculul direct al $\det F(s)$ se obține:

$$\det F(s) = \hat{k}\frac{\hat{p}_0(s)}{\hat{p}(s)} = \hat{k}\frac{r(s)\hat{p}_0(s)}{r(s)\hat{p}(s)} = \hat{k}\frac{\overline{p}_0(s)}{\overline{p}(s)}, \quad \hat{k} = \text{constant,} \tag{1.28}$$

unde $\hat{p}_0(s),\ \hat{p}(s)$ sunt monice coprime, iar factorul $r(s)$ este astfel ales încât:

$$\overline{p}(s) \equiv r(s)\hat{p}(s)\,. \tag{1.29}$$

Substituind (1.29) în (1.25) rezultă:

$$p(s) = q(s)r(s)\hat{p}(s)\,. \tag{1.30}$$

Înlocuind acum (1.23) şi (1.25) în (1.28), cu $\det F(\infty) = \hat{k}$, se obține:

$$p_0(s) = q(s)r(s)\hat{p}_0(s) = q(s)\overline{p}_0(s)\,,\ \ \overline{p}_0(s) \equiv r(s)\hat{p}_0(s)\,. \tag{1.31}$$

Din (1.30), (1.31) rezultă că $p(s)$ şi $p_0(s)$ au divizorul comun $q(s)r(s)$. □

Evident, relațiile (1.30) şi (1.31) conduc imediat la următorul rezultat.

Teorema 1.7

Între $\det F(s)$ (v. (1.23)), $\hat{p}(s)$ (v. (1.29)) şi $\hat{p}_0(s)$ (v. (1.31)) există relația:

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} = \frac{\hat{p}_0(s)}{\hat{p}(s)}\,. \ \square \tag{1.32}$$

Urmând studiul întreprins la I.6.5 se demonstrează şi următorul rezultat.

Teorema 1.8

Zerourile de transmisie ale sistemului în circuit deschis (1.7) sunt invariante în raport cu reacția după ieșire a sistemului automat cu structura din fig. IV.1.1.

$\mathscr{D}$. Prin calcul direct din (1.6) (cu (1.7), (1.8)) și (1.23), (1.27) se obține:

$$\det G_0(s) = \det F^{-1} \det G(s) = k_0 \frac{\cancel{p(s)}}{p_0(s)} \frac{z(s)}{\cancel{p(s)}} = k_0 \frac{z(s)}{p_0(s)}, \; k_0 = k \det F^{-1}(\infty) . \square$$

c. Rezultate de stabilitate

În general, $\det F(s)$ poate să nu conțină toate informațiile privitoare la valorile proprii ale sistemului în circuit închis. Cu toate acestea, $\det F(s)$, obținut cu relația (1.8), se poate folosi în analiza stabilității sistemului în circuit închis pe baza cunoașterii sistemului în circuit deschis. În acest sens, o cale de generalizare a criteriului Nyquist constă în studiul funcției $\det F(s)$ prin metoda frecvențială.

Teorema 1.9

Fie P_+ și P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1) situați respectiv în $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$ și $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s = 0\}$. Sistemul automat multivariabil este BIBO stabil dacă și numai dacă:

$$\arg \det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi P_+ + \pi P_0 . \qquad (1.33)$$

$\mathscr{D}$. Variația totală argumentului funcției $\det F(j\omega)$ se obține din (1.23):

$$\arg \det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \arg p_0(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \arg p(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} . \qquad (1.34)$$

Conform criteriului Cremer – Leonhard (v. Teorema III.3.5), polinomul $p_0(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă:

$$\arg p_0(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2 \arg p_0(j\omega)\Big|_{0}^{+\infty} = \pi \operatorname{grd} p_0(s) = \pi \operatorname{grd} p(s) . \qquad (1.35)$$

Aplicând pentru $p(s)$ principiul argumentului (v. Anexa F), se scrie:

$$\arg p(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi \operatorname{grd} p(s) - 2\pi P_+ - \pi P_0 . \qquad (1.36)$$

Înlocuind (1.35) și (1.36) în (1.34) se obține în mod echivalent (1.33). □

Folosind Teorema III.2.7 se formulează imediat și următoarea aserțiune.

Teorema 1.10

Subsistemele de stare necontrolabilă şi / sau neobservabilă ale sistemului în circuit deschis sunt asimptotic stabile.

Fie P_+ şi P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1) situaţi respectiv în $\{s \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}\, s > 0\}$ şi $\{s \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}\, s = 0\}$. Sistemul automat multivariabil este asimptotic stabil dacă şi numai dacă are loc (1.33). □

Exemplul 1.4

Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.3.

Să se studieze stabilitatea asimptotică şi BIBO stabilitatea sistemului.

Cu variabilele de stare x_1, x_2 şi x_3, definite în schema din fig. IV.1.3, după calcule simple, se obţin reprezentările de stare în circuit deschis şi în circuit închis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=B_0} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=C_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ambele sunt de stare complet controlabilă şi complet observabilă. Rezultă:

$$d(s) \equiv d_2(s) \equiv p(s) = s^2(s-1), \quad d_0(s) \equiv d_{20}(s) \equiv p_0(s) = (s+1)^2(s-1)\,.$$

Urmează că sistemul automat este instabil (intern) şi BIBO instabil.

La Exemplul 1.2 s-a calculat direct $\det F(s) = (s+1)^2 s^{-2}$, pentru care

$$\arg\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \arg(j\omega+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \arg(j\omega)^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi\,.$$

Pe de altă parte, $P_+ = 1,\ P_0 = 2$ şi conform cu (1.33) trebuie să aibă loc:

$$\arg\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 4\pi\,.$$

Evident, $2\pi \neq 4\pi$ şi, prin urmare, sistemul automat este (BIBO) instabil. □

2. Generalizarea criteriului Nyquist

2.1. Funcțiile de transfer caracteristice

Ideea de bază este de a utiliza valorile proprii ale matricei $G(s)$ a sistemului în circuit deschis şi legătura lor cu funcția rațională $\det F(s)$. Pentru fiecare $s \in \mathbb{C}$, fixat, valorile proprii, $\gamma_k(s)$, $k = \overline{1,m}$, sunt zerourile polinomului caracteristic:

$$\Delta(g,s) \equiv \det\left[I_m g(s) - G(s)\right] \equiv g^m(s) + \alpha_1(s) g^{m-1}(s) + \ldots + \alpha_m(s), \quad (2.1)$$

unde $\alpha_i(s)$, $i = \overline{1,m}$, sunt funcții raționale. Polinomul (2.1) poate fi explicitat prin:

$$\Delta(g,s) \equiv \prod\nolimits_{k=1}^{m} \left[g(s) - \gamma_k(s)\right]. \quad (2.2)$$

Pentru $g(s) = -1$ din relația (2.2), cu (1.8), se obține:

$$\det F(s) = \prod\nolimits_{k=1}^{m} \left[1 + \gamma_k(s)\right]. \quad (2.3)$$

Din (2.3) rezultă că valorile proprii, $\gamma_k(s)$, $k = \overline{1,m}$, conțin aceleaşi informații ca $\det F(s)$, dar mai detaliate în ceea ce priveşte structura sistemului în circuit deschis. Aceasta sugerează calea de urmat pentru generalizarea criteriului Nyquist, [129]. Pentru a atinge acest scop este necesar să se răspundă mai întâi la următoarele două întrebări:

1º $\gamma_k(s)$, $k = \overline{1,m}$, fiind în general iraționale, cum se poate utiliza (2.1)?

2º Cum se aplică principiul argumentului?

Se va răspunde la aceste întrebări, pe scurt şi explicit, în cele ce urmează.

a. Definirea funcțiilor de transfer caracteristice

În general, polinomul în variabila g din (2.1) poate fi factorizat sub forma:

$$\Delta(g,s) \equiv \det\left[I_m g(s) - G(s)\right] \equiv \delta_1(g,s)\delta_2(g,s)\ldots\delta_\eta(g,s), \quad (2.4)$$

în care $\delta_i(g,s)$, $i = \overline{1,\eta}$, $1 \le \eta \le m$, sunt polinoame în variabila g, de forma:

$$\delta_i(g,s) = g^{r_i}(s) + a_{i1}(s) g^{r_i - 1}(s) + \ldots + a_{ir_i}(s), \quad i = \overline{1,\eta}, \quad (2.5)$$

cu $\sum_{i=1}^{\eta} r_i = m$. Entitățile $\delta_i(g,s),\ i=\overline{1,\eta}$, se numesc *polinoame ireductibile* dacă $a_{ij}(s), j=\overline{1,r_i}$, sunt funcții raționale în condițiile în care η are valoarea maximă posibilă.

Pentru fiecare $s = s_0 \in \mathbb{C}$, fixat, fiecare *ecuație ireductibilă*

$$\delta_i(g,s)=0,\ i=\overline{1,\eta}, \tag{2.6}$$

are r_i soluții numite *ramuri*. Pentru $s \in \mathbb{C}$ fiecare *ecuație ireductibilă* din (2.6) defineşte, implicit, câte o *funcție algebrică* $g_i(s)$, r_i *-valentă*, numită *funcție de transfer caracteristică* a matricei $G(s)$. Funcțiile $g_i(s),\ i=\overline{1,\eta}$, r_i -valente, formează *setul funcțiilor de transfer caracteristice* ale matricei de transfer $G(s)$.

În virtutea r_i -valenței, $g_i(s)$ se defineşte pe o *suprafață Riemann* $\mathscr{R}_i$, formată din r_i foi suprapuse care reproduc de r_i ori planul complex $\mathbb{C}$. Conexiunile între diferite foi ale suprafeței $\mathscr{R}_i$ se fac prin *tăieturi* practicate între *punctele de ramificare* ale lui $g_i(s)$ sau între acestea şi punctul de la infinit (prin drepte paralele cu axa reală sau cu axa imaginară). Acest fapt este natural posibil deoarece în punctele de ramificare cel puțin două ramuri au valori identice.

Principiul argumentului se aplică pentru conturul Nyquist C_N (v. Anexa F). Pe fiecare foaie a lui $\mathscr{R}_i$ se plasează câte un C_N . Parcurgându-le, ele se înlănțuie într-o curbă închisă pe $\mathscr{R}_i$ prin trecerea prin tăieturi de la o foaie la alta.

Exemplul 2.1

Fie matricea de transfer:

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s-1 & s-2 \\ s+2 & s+1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine funcțiile de transfer caracteristice şi suprafețele Riemann corespunzătoare, pe care se vor trasa contururi Nyquist.

Înlocuind $G(s)$ în (2.1) se obține polinomul caracteristic ireductibil:

$$\Delta(g,s)=g^2-\frac{2s}{(s+1)(s+2)}g+\frac{3}{(s+1)^2(s+2)^2}.$$

$G(s)$ are o singură funcție de transfer caracteristică (bivalentă). Expresia ei, pentru fiecare $s \in \mathscr{R}$, este dată de cele două valori proprii ale lui $G(s)$:

$$g(s) = \begin{cases} \gamma_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(s + \sqrt{s^2 - 3}\right) \\ \gamma_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(s - \sqrt{s^2 - 3}\right), \quad s \in \mathscr{R}. \end{cases}$$

Discriminantul $D(s) = 4(s^2 - 3)$ se anulează în $s_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. Acestea sunt punctele de ramificare ale funcției de transfer caracteristice.

Suprafața Riemann $\mathscr{R}$ are foile $\mathscr{R}_{\mathrm{f}1,2}$ și contururile Nyquist $C_{N1,2}$. Ele se înlănțuie prin tăietura între punctele de ramificare – fig. IV.2.1.a, sau prin tăieturile între un punct de ramificare şi punctul de la infinit – fig. IV.2.1.b. □

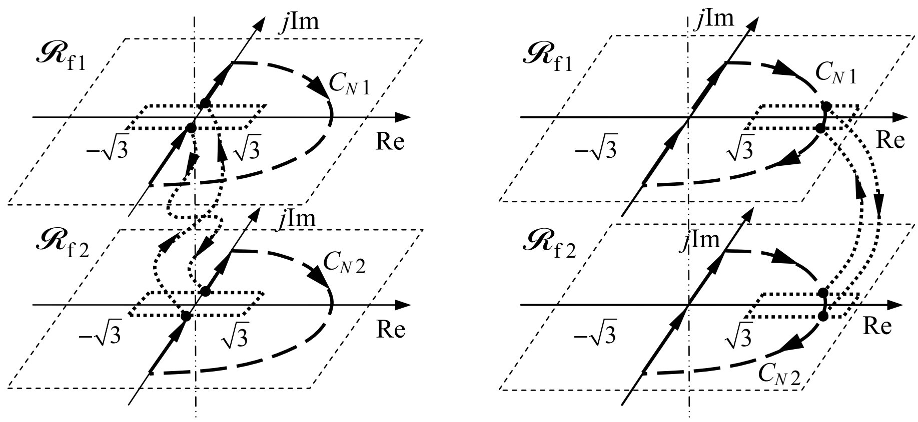

Fig. IV.2.1. Foile suprafeței Riemann cu tăieturi între: (*a*) *punctele de ramificare*, (*b*) *un punct de ramificare şi punctul de la infinit*

Alegerea tăieturilor pe foile suprafeței Riemann $\mathscr{R}_i$ nu este, în general, unică. Este însă necesar ca ele să conecteze aceste foi de o aşa manieră încât funcția $g_i(s)$ să devină *univalentă* pe $\mathscr{R}_i$. Faptul că $\mathscr{R}_i$ are r_i foi (corespunzător r_i-valenței lui $g_i(s)$) şi că la întâlnirea unei tăieturi (o conexiune între cel puțin două foi) se poate trece de pe o foaie pe alta conduce la constatarea că fiecărui punct $s \in \mathscr{R}_i$ îi corespunde un singur punct $g_i(s) \in \mathbb{C}$ şi numai unul.

Înainte de a continua căutarea unor răspunsuri la întrebarea 2º de la începutul acestei secţiuni este necesară elucidarea a două probleme şi anume: cum se determină polinoamele ireductibile şi cum se determină punctele de ramificare.

b. Polinoame ireductibile

Obţinerea lor este legată de *forma canonică diagonală de blocuri Frobenius*:

$$\tilde{G}(s) \triangleq \mathrm{diag}\left\{F_{\delta 1}(s), F_{\delta 2}(s), \ldots, F_{\delta \eta}(s)\right\}, \tag{2.7}$$

$$\underbrace{F_{\delta i}(s)}_{(r_i \times r_i)} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ir_i}(s) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ir_i-1}(s) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{ir_i-2}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{i1}(s) \end{bmatrix}.$$

$F_{\delta i}(s)$ este matricea Frobenius a polinomului $\delta_i(s) \equiv \det\left[I_{r_i} g(s) - F_{\delta i}(s)\right]$, în care I_{r_i} este matricea unitate de ordinul r_i.

Evident, există $T(s)$, matrice de ordinul m, cu $\det T(s) \not\equiv 0$, astfel încât:

$$\tilde{G}(s) = T^{-1}(s) G(s) T(s). \tag{2.8}$$

Cu $T(s)$ adecvat ales, din (2.8) se obţine *forma canonică raţională ireductibilă* a matricei $G(s)$. Determinarea matricei $T(s)$, ca procedeu practic, se bazează pe următoarele considerente. Dacă vectorii:

$$x,\ Gx,\ G^2x, \ldots, G^{k-1}x, \text{ cu } x \in \mathbb{C}^m \tag{2.9}$$

sunt liniar independenţi în timp ce vectorii $x,\ Gx,\ G^2x, \ldots, G^{k-1}x,\ G^k x$ sunt liniar dependenţi (v. Anexa A), atunci şirul (2.9) se numeşte *lanţ de lungime* k al lui G şi x este *conducătorul lanţului*. Lanţul (2.9) se numeşte de lungime minimă (maximă) dacă $x \in \mathbb{C}^m$ a fost astfel ales încât k este minim (maxim) posibil.

Procedeul de determinare a lui $\tilde{G}(s)$ constă în construirea unor lanţuri care evidenţiază factorii invarianţi ai lui $G(s)$. Întrucât factorii invarianţi sunt produse ale polinoamelor ireductibile, rezultă că obţinerea formei canonice necesită utilizarea unor *lanţuri de lungime minimă*.

Practic, se procedează astfel: se alege x_1, conducătorul unui lanț de lungime minimă k_1; se alege x_2, conducătorul unui lanț de lungime minimă k_2, liniar independent fața primul; se alege x_3, conducătorul unui lanț de lungime minimă k_3, liniar independent față de precedentele; se continuă până când $\sum k_i = m$.

$T(s)$ din transformarea (2.8) se construiește după cum urmează:

$$T(s) = \left[x_1, Gx_1, ..., G^{k_1-1}x_1, x_2, Gx_2, ..., G^{k_2-1}x_2, ..., x_j, Gx_j, ..., G^{k_j-1}x_j\right] \quad (2.10)$$

Dificultatea majoră în aplicarea acestei proceduri este găsirea lanțurilor de lungime minimă. În aplicații însă, de regulă, polinomul caracteristic al lui $G(s)$ este ireductibil, caz în care nu mai este necesară aplicarea procedurii de mai sus.

c. Puncte de ramificare

Un $s_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct de ramificare* al funcției de transfer caracteristice definită de ecuația ireductibilă (2.6) dacă s_0 este zero multiplu. Fie ecuația ireductibilă (2.6) cu (2.5) (scrisă, pentru simplitate, fără indicele i):

$$g^r + a_1(s)g^{r-1} + \cdots + a_r(s) = 0 . \quad (2.11)$$

Această ecuație are o rădăcină multiplă în s_0 dacă *discriminantul*

$$D(s) \triangleq \overbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & a_{r-1} & a_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{r-1} & a_r & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & & 0 \\
0 & 0 & \cdots 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & a_{r-1} & & a_r \\
0 & 0 & \cdots 0 & 0 & r & (r-1)a_1 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 2a_{r-2} & & a_{r-1} \\
0 & 0 & \cdots 0 & r & (r-1)a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{r-1} & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & r & \ddots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{r-1} & 0 & \cdots 0 & & 0 \\
r & (r-1)a_1 & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{r-1} & 0 & 0 & \cdots 0 & & 0
\end{vmatrix}}^{2r-1 \text{ coloane}}
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} r\text{-1} \\ \text{linii} \end{matrix} \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} r \\ \text{linii} \end{matrix}
\end{array}, \quad (2.12)$$

care este un determinant de ordinul $2r-1$ asociat lui (2.11), se anulează în $s = s_0$.

d. Locurile de transfer caracteristice

În analiza stabilității în domeniul frecvenței se utilizează conturul Nyquist (v. Anexa F). Pentru o funcție de transfer caracteristică $g_i(s)$, definită pe o suprafață Riemann $\mathscr{R}_i$, variabila s parcurge o singură dată, în sens negativ, r_i-plul contur Nyquist situat pe cele r_i foi ale lui $\mathscr{R}_i$, trecându-se de pe o foaie pe alta atunci când se întâlneşte o tăietură. Imaginea $g_i(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ a acestui contur prin funcția $g_i(s)$ se numeşte *locul de transfer caracteristic*. Mulțimea locurilor $g_i(j\omega), \omega \in \mathbb{R}, i = \overline{1, \eta}$, ale lui $G(j\omega)$, este *setul locurilor de transfer caracteristice* ale sistemului în circuit deschis. $G(j\omega)$ se numeşte *matricea de răspuns la frecvență* a sistemului în circuit deschis. Locurile de transfer caracteristice se trasează grafic prin proceduri numerice de continuitate (v. Anexa D).

Exemplul 2.2

Se consideră sistemul automat multivariabil cu matricea de transfer în circuit deschis de la Exemplul 2.1. Să se traseze locurile de transfer caracteristice.

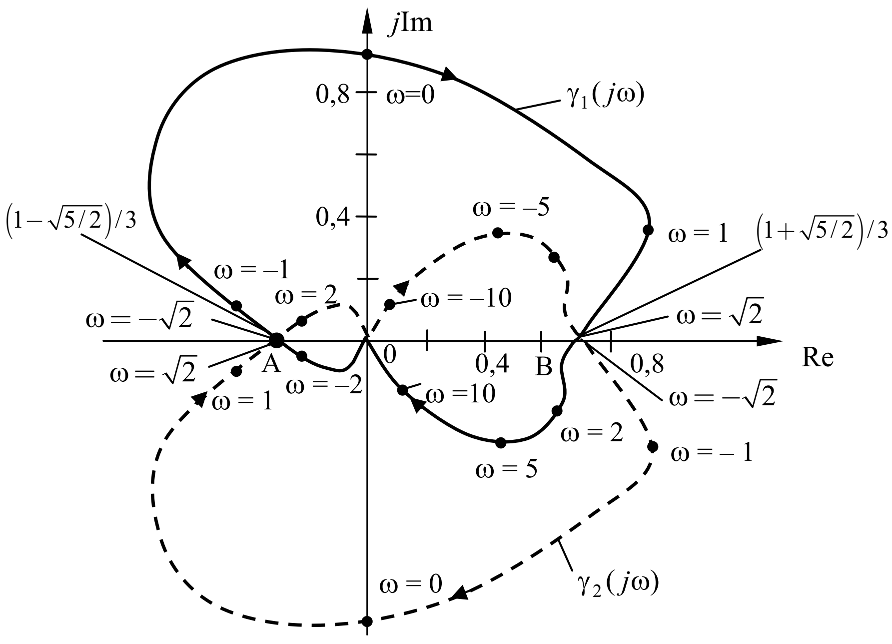

Fig. IV.2.2. Locul de transfer caracteristic la Exemplul 2.2

Pentru $g(s)$ de la Exemplul 2.1, cu $s \in C_N \subset \mathscr{R}$ (adică $s = j\omega$), se scrie:

$$g(j\omega) = \begin{cases} \gamma_1(j\omega) = \dfrac{\omega + \sqrt{\omega^2 + 3}}{(2-\omega^2) + 9\omega^2}\left[3\omega + j(2-\omega^2)\right], \\ \gamma_2(j\omega) = \dfrac{\omega - \sqrt{\omega^2 + 3}}{(2-\omega^2) + 9\omega^2}\left[3\omega + j(2-\omega^2)\right], \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pentru $\omega \in \left\{0, 1, \sqrt{2}, 2, 5, 10, 20\right\}$ şi folosind relațiile $\gamma_1(-j\omega) = \gamma_2^*(j\omega)$, $\gamma_2(-j\omega) = \gamma_1^*(j\omega)$, ($(\cdot)^*$ simbolizează conjugarea numerelor complexe), locul de transfer caracteristic este reprezentat în fig. IV.2.2. □

2.2. Aplicarea principiului argumentului

a. Funcțiile de transfer caracteristice ale matricei diferență a reacției

Se porneşte de la polinomul caracteristic al matricei $F(s)$:

$$\Delta_F(f,s) \equiv \det\left[I_m f(s) - F(s)\right] \equiv f^m(s) + \beta_1(s) f^{m-1}(s) + \cdots + \beta_m(s), \quad (2.13)$$

în care $\beta_i(s),\ i = \overline{1,m}$, sunt funcții raționale. *Funcțiile de transfer caracteristice* $f_i(s),\ i = \overline{1,\eta}$, se definesc cu ajutorul factorizării în polinoame ireductibile:

$$\Delta_F(f,s) \equiv \det\left[I_m f(s) - F(s)\right] \equiv \psi_1(f,s)\psi_2(f,s)...\psi_\eta(f,s), \quad (2.14)$$

în care *polinoamele ireductibile* au expresiile:

$$\psi_i(g,s) = f^{r_i}(s) + b_{i1}(s) f^{r_i - 1}(s) + ... + b_{ir_i}(s), \quad i = \overline{1,\eta}. \quad (2.15)$$

Fie $c_{i0}(s)$ c.m.m.m.c., monic, al numitorilor funcțiilor $b_{ij}(s), j = \overline{1,r_i}$, din (2.15). În aceste condiții, polinomul (2.15) este echivalent cu

$$\psi_i(f,s) = f^{r_i}(s) + \frac{c_{i1}(s)}{c_{i0}(s)} f^{r_i - 1}(s) + ... + \frac{c_{ir_i}(s)}{c_{i0}(s)}, \quad i = \overline{1,\eta}, \quad (2.16)$$

în care $c_{ij}(s) = c_{i0}(s) b_{ij}(s),\ j = \overline{1,r_i}$. Fie $c_{i0}(s)$ şi $c_{ir_i}(s)$ coprime. $f_i(s)$, definită prin $\psi_i(f,s) = 0$, este nulă pentru $c_{ir_i}(s) = 0$, iar pentru $c_{i0}(s) \to 0$ are loc $f_i(s) \to \infty$. Ca urmare, $c_{ir_i}(s)$ şi $c_{i0}(s)$ sunt *polinomul zerourilor* şi respectiv *polinomul polilor* funcţiei de transfer caracteristice $f_i(s)$. Aceste afirmaţii sunt consistente şi pentru $c_{i0}(s)$ şi $c_{ir_i}(s)$ non coprime. În acest caz un zero al factorului lor comun este în acelaşi timp zero şi pol al lui $f_i(s)$.

b. Variaţia totală a argumentului

Polinoamele $c_{ir_i}(s)$ şi $c_{i0}(s)$ fiind cunoscute, *variaţia totală a argumentului funcţiei* $f_i(s)$ pe r_i -plul contur Nyquist situat pe $\mathscr{R}_i$ are forma (v. Anexa F):

$$\Delta\varphi_{f_i} = \arg f_i(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \arg \frac{c_{ir_i}(j\omega)}{c_{i0}(j\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty},\ i = \overline{1,\eta}\,. \tag{2.17}$$

În acelaşi timp, pentru funcţiile $f_i(s),\ i = \overline{1,\eta}$, *variaţia totală a argumentului setului de funcţii de transfer caracteristice* are expresia:

$$\Delta\varphi_f = \sum\nolimits_{i=1}^{\eta} \Delta\varphi_{f_i} = \sum\nolimits_{i=1}^{\eta} \arg \frac{c_{ir_i}(j\omega)}{c_{i0}(j\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \arg\left(\prod\nolimits_{i=1}^{\eta} \frac{c_{ir_i}(j\omega)}{c_{i0}(j\omega)}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} . \tag{2.18}$$

Pe de altă parte, pentru $f(s) = 0$ din (2.14) cu (2.16) se obţine:

$$(-1)^m \det F(s) = \prod\nolimits_{i=1}^{\eta} \frac{c_{ir_i}(s)}{c_{i0}(s)}\,. \tag{2.19}$$

Din (2.18) şi (2.19) rezultă că variaţia totală a argumentului setului de funcţii de transfer caracteristice coincide cu aceea a funcţiei $\det F(s)$ adică

$$\Delta\varphi_f = \det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{2.20}$$

Relaţia dintre $f_i(s)$ şi $g_i(s),\ i = \overline{1,\eta}$, se obţine din (2.13) şi (1.8). Se scrie:

$$\det\left[I_m f(s) - I_m - G(s)\right] = \det\left[I_m (f(s) - 1) - G(s)\right]. \tag{2.21}$$

Din (2.21), cu (2.1), urmează că $g(s) = f(s) - 1$ şi respectiv

$$f_i(s) = 1 + g_i(s),\ i = \overline{1,\eta}\,. \tag{2.22}$$

Acest rezultat arată că prin trasarea locurilor de transfer $g_i(j\omega),\ i=\overline{1,\eta}$, ale matricei $G(j\omega)$, se obțin simultan şi locurile de transfer $f_i(j\omega),\ i=\overline{1,\eta}$, ale matricei $F(j\omega)=I_m+G(j\omega)$, dar față de un nou sistem de axe cu originea translată pe axa reală în punctul -1. În această situație din (2.18) – (2.20) rezultă:

$$\Delta\varphi_{g,-1}=\Delta\varphi_f=\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \tag{2.23}$$

în care indicele $g,-1$ simbolizează faptul că variația totala a argumentului setului $g_i(j\omega),\ i=\overline{1,\eta}$, se raportează la noua origine situată în punctul -1.

2.3. Criterii Nyuquist generalizate

a. Criterii pentru sisteme automate cu reacție unitară

Fie sistemul automat cu structura din fig. IV.1.1 (cu *reacție negativă unitară*). Relația (2.23) şi Teoremele 1.9, 1.10 conduc la următoarele criterii Nyquist.

Teorema 2.1

Fie P_+ şi P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1) situați respectiv în $\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,s>0\}$ şi $\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,s=0\}$. Sistemul automat multivariabil este BIBO stabil dacă şi numai dacă

$$\Delta\varphi_{g,-1}=2\pi P_+ +\pi P_0\,. \tag{2.24}$$

$\mathscr{D}$. Se înlocuieşte (1.33) în (2.23) şi se obține (2.24). □

Teorema 2.2

Subsistemele de stare necontrolabilă şi / sau neobservabilă ale sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1) sunt asimptotic stabile.

Fie P_+ şi P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1) situați respectiv în $\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,s>0\}$ şi $\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,s=0\}$. Sistemul automat multivariabil este asimptotic stabil dacă şi numai dacă are loc condiția (2.24). □

Se constată că şi în cazul sistemelor automate multivariabile punctul -1 are o semnificație specială. Se ştie că el se numeşte *punctul critic* şi că marchează trecerea, după caz, de la BIBO stabilitate la BIBO instabilitate respectiv de la stabilitate asimptotică la stabilitate neutrală sau instabilitate. Ca şi în cazul sistemelor automate monovariabile, stabilitatea relativă (BIBO / asimptotică) se apreciază prin *marginea de amplificare* şi *marginea de fază* [175]. Acestea pot fi determinate pentru fiecare loc de transfer caracteristic $g_i(j\omega)$, față de originea situată în -1. Valorile minime pe setul locurilor de transfer caracteristice definesc *stabilitatea relativă în domeniul frecvențelor*, [175].

La evaluarea variației totale a argumentului setului de locuri de transfer caracteristice, $g_i(j\omega)$, $i=\overline{1,\eta}$, față de punctul critic, se procedează ca şi în cazul sistemelor automate monovariabile. Concret, se evaluează variația totală a argumentului pentru fiecare loc de transfer caracteristic față de punctul critic după care se face suma algebrică a respectivelor variații totale ale argumentelor.

Stabilitatea unui sistem automat multivariabil se poate studia şi în funcție de factorul de amplificare global $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ al regulatorului. Noile forme ale Teoremelor 2.1 şi 2.2 se obțin înlocuind matricea de transfer $G(s)$ a sistemului în circuit deschis cu $k\,G(s)$. Ca urmare relația (1.8) se înlocuieşte cu:

$$\det F(s)=\det\left[I_m+k\,G(s)\right]=k^m\det\left[k^{-1}I_m+G(s)\right].$$

Punctul critic este $-k^{-1}$ şi relația (2.23) se înlocuieşte cu

$$\Delta\varphi_{g,-k^{-1}}=\Delta\varphi_f=\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \qquad (2.25)$$

în care indicele $-k^{-1}$ simbolizează raportarea la originea situată în punctul $-k^{-1}$.

Corespunzător Teoremelor 2.1 şi 2.2, se formulează următoarele rezultate.

Teorema 2.3

Fie P_+ şi P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis ($kG(s), k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ în loc de $G(s)$, fig. IV.1.1) situați în $\{s\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\,s>0\}$ şi respectiv $\{s\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\,s=0\}$. Sistemul automat multivariabil este BIBO stabil dacă şi numai dacă

$$\Delta\varphi_{g,-k^{-1}}=2\pi P_+ +\pi P_0.\ \square \qquad (2.26)$$

Teorema 2.4

Subsistemele de stare necontrolabilă şi / sau neobservabilă ale sistemului în circuit deschis (fig. IV.1.1 cu $G(s)$ înlocuit cu $k\,G(s)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$)) sunt asimptotic stabile.

Fie P_+ şi P_0 numărul de poli ai sistemului în circuit deschis situaţi respectiv în $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, s > 0\}$ şi $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, s = 0\}$. Sistemul automat multivariabil este asimptotic stabil dacă şi numai dacă are loc condiţia (2.26). □

Exemplul 2.3

Pentru sistemul automat cu structura din fig. IV.1.1 şi $G(s)$ de la Exemplul 2.1, folosind Teorema 2.3, să se determine k pentru care sistemul este BIBO stabil.

Locul de transfer caracteristic este reprezentat în fig. IV.2.2. Punctele A, O şi B împart axa reală în patru intervale în care se poate situa punctul critic $-k^{-1}$ atunci când k variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Punctele A şi B corespund pulsaţiilor $\omega = \pm\sqrt{2}$ şi au coordonatele $[(1-\sqrt{5/2})/3,\ j0]$ şi $[(1+\sqrt{5/2})/3,\ j0]$.

Cu $P_+ = 0$, $P_0 = 0$, condiţia (2.26) din Teorema 2.3 impune $\Delta\varphi_{g,-k^{-1}} = 0$.

Având în vedere fig. IV.2.2, punctul critic se poate situa după cum urmează:

I. $-k^{-1} \in \left(-\infty,\ (1-\sqrt{5/2})/3\right) \cup \left((1+\sqrt{5/2})/3,\ +\infty\right)$. Locurile de transfer caracteristice nu înconjoară punctul critic, respectiv are loc $\Delta\varphi_{g,-k^{-1}} = 0$. Aceasta înseamnă că pentru $k \in (2-\sqrt{10},\ 2+\sqrt{10})$ sistemul automat este BIBO stabil.

II. $-k^{-1} \in \left((1-\sqrt{5/2})/3,\ 0\right) \cup \left(0,\ (1+\sqrt{5/2})/3\right)$ şi $-k^{-1} = (1 \mp \sqrt{5/2})/3$. Locurile de transfer caracteristice înconjoară de două ori în sens negativ şi respectiv trec prin punctul critic. Condiţia $\Delta\varphi_{g,-k^{-1}} = 0$ nu are loc. Urmează că pentru $k \in (-\infty,\ 2-\sqrt{10}] \cup [2+\sqrt{10},\ +\infty)$ sistemul automat este BIBO instabil. □

b. Criterii pentru sisteme automate cu reacţie neunitară

Structura sistemului automat din fig.IV.1.1 are particularitatea că reacţia negativă este unitară. În general reacţia se realizează printr-o matrice $G_T(s)$, a *traductoarelor*, de ordinul *m*, cu $\det G_T(s) \not\equiv 0$, fig. IV.2.3.

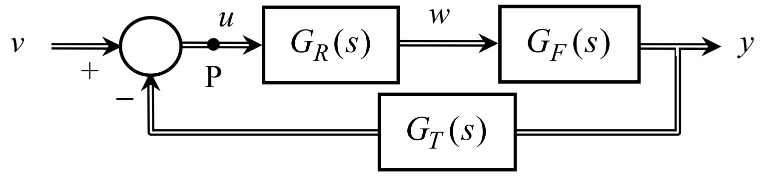

Fig. IV.2.3. Structura sistemului automat multivariabil cu reacţie neunitară

Matricea de transfer a sistemului în circuit închis (fig. IV.2.3) are forma:

$$G_0(s) = F^{-1}(s)G_d(s)\,, \tag{2.27}$$

în care

$$G_d(s) = G_F(s)G_R(s) \tag{2.28}$$

este *matricea de transfer a căii directe intrare – ieşire*,

$$F(s) = I_m + G(s) \tag{2.29}$$

este *matricea de transfer diferenţă a reacţiei*, şi

$$G(s) = G_F(s)G_R(s)G_T(s) \tag{2.30}$$

este *matricea de transfer a sistemului în circuit deschis* (în punctul P).

Cazul reacţiei neunitare nu este esenţial diferit de cel al reacţiei unitare deoarece din relaţia (2.27), trecând la determinanţi se obţine:

$$\det F(s) = \frac{\det G_d(s)}{\det G_0(s)} = \frac{d_{ci}(s)}{d_{cd}(s)}\,, \tag{2.31}$$

în care $d_{ci}(s)$ şi $d_{cd}(s)$ sunt polinoamele caracteristice ale sistemului în circuit închis şi respectiv în circuit deschis.

Cel de al doilea semn de egalitate din relaţia (2.31) aminteşte de Teorema 1.3 (Hsu – Chen) şi de rolul funcţiei $\det F(s)$ în studiul stabilităţii. Teorema 1.3 rămâne valabilă şi în cazul reacţiei neunitare. Demonstraţia este relativ simplă şi se bazează pe utilizarea unor reprezentări de stare adecvate pentru matricele $G_d(s)$ şi $G_T(s)$, [121].

În aceste condiţii toate rezultatele obţinute pentru cazul reacţiei unitare (Teoremele 1.9, 1.10, 2.1 – 2.4) se extind în mod corespunzător şi în cazul reacţiei neunitare. În demonstraţiile respectivelor rezultate se utilizează funcţia raţională $\det F(s)$ (v. (2.29)) şi matricea de transfer $G(s)$ (v. 2.30)) a sistemului în circuit deschis.

3. Sisteme diagonal dominante

Primele cercetări privind stabilitatea sistemelor automate multivariabile (fig. IV.1.1) au avut în vedere utilizarea elementelor matricei $G(s)$ a sistemului în circuit deschis şi nu a funcțiilor de transfer caracteristice ale lui $G(s)$. Această abordare era justificată de necesitatea cunoaşterii unei relații între stabilitatea sistemului în circuit închis şi elementele matricei $G(s)$. În acest fel elaborarea rezultatelor de stabilitate a sistemelor automate multivariabile a avut în vedere obiectivele sintezei matricei $G_R(s)$ a regulatorului. În fond, de dorit ar fi ca, folosind un $G_R(s)$ adecvat, matricea $G(s)$ să devină diagonală. Astfel sistemul automat multivariabil s-ar transforma în m sisteme automate monovariabile total decuplate. Practic însă o astfel de soluție radicală, care implică utilizarea unui regulator complicat, poate fi înlocuită cu una mai realistă bazată pe realizarea doar a unei *dominanțe diagonale* în matricea $G(s)$, [142].

3.1. Dominanța diagonală în domeniul frecvențelor

O matrice Q, pătratică de ordinul m, se numeşte *diagonal dominantă* dacă elementele ei, q_{ij}, $i, j = \overline{1,m}$, satisfac cel puțin unul din următoarele trei seturi de inegalități:

$$\left|q_{ii}\right| > R_i^{\mathrm{L}} \triangleq \sum\nolimits_{k=1,\, k\neq i}^{m} \left|q_{ik}\right|, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.1}$$

$$\left|q_{ii}\right| > R_i^{\mathrm{C}} \triangleq \sum\nolimits_{k=1,\, k\neq i}^{m} \left|q_{ki}\right|, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$\left|q_{ii}\right| > R \triangleq \frac{1}{2}\left(R_i^{\mathrm{L}} + R_i^{\mathrm{C}}\right), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{3.3}$$

Se spune că matricea Q este diagonal dominantă *pe linii* – relația (3.1), *pe coloane* – relația (3.2) şi *în medie* – relația (3.3). O consecință a dominanței diagonale este faptul că matricea Q este nesingulară, adică $\det Q \neq 0$.

O proprietate remarcabilă a matricelor diagonal dominante, de utilizat în continuare, se prezintă în rezultatul următor, [174].

Teorema 3.1

Dacă matricea Q este diagonal dominantă (pe linii sau coloane) atunci există inversa $Q^{-1} \triangleq \left(\hat{q}_{ij}\right)$ şi sunt îndeplinite inegalităţile:

$$\left|q_{ii} - \hat{q}_{ii}^{-1}\right| \le \Phi_i^{\mathrm{L}} R_i^{\mathrm{L}}, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.4}$$

sau

$$\left|q_{ii} - \hat{q}_{ii}^{-1}\right| \le \Phi_i^{\mathrm{C}} R_i^{\mathrm{C}}, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.5}$$

în care

$$\Phi_i^{\mathrm{L}} = \max_{j,\, j \ne i} \left(R_j^{\mathrm{L}} / \left|q_{jj}\right|\right), \; i = \overline{1,m}, \tag{3.6}$$

$$\Phi_i^{\mathrm{C}} = \max_{j,\, j \ne i} \left(R_j^{\mathrm{C}} / \left|q_{jj}\right|\right), \; i = \overline{1,m}. \; \square \tag{3.7}$$

Pentru o matrice cu elemente funcţii raţionale, $Q(s)$, $s \in \mathbb{C}$, dominanţa diagonală se referă la un contur din planul complex, de exemplu la conturul Nyquist C_N (v. Anexa F). În acest context rezultatul fundamental pentru cele ce se vor prezenta în continuare este următorul, [143].

Teorema 3.2

Dacă matricea $Q(s)$, de ordinul m, este diagonal dominantă pentru $s \in C_N$, $\det Q(s)$ nu are nici un zero, şi $q_{ii}(s)$, $i = \overline{1,m}$, nu au nici un pol pe C_N, atunci:

$$\arg \det Q(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \arg q_{ii}(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{3.8}$$

$\mathscr{D}$. Fie $Q(s)$ diagonal dominantă pe linii pentru $s \in C_N$. Atunci:

$$\left|q_{ii}(s)\right| > R_i^{\mathrm{L}}(s), \; s \in C_N, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.9}$$

unde $R_i^{\mathrm{L}}(s)$ se calculează cu o relaţie similară (*mutatis mutandis*) cu (3.1).

Pentru a utiliza (3.9), se explicitează $\det Q(s)$ după cum urmează:

$$\det Q(s) = \left[\prod\nolimits_{i=1}^{m} q_{ii}(s)\right] \det \bar{Q}(s), \tag{3.10}$$

în care matricea $\bar{Q}(s)$ are elementele extradiagonale de forma $q_{ik}(s)/q_{ii}(s)$ şi toate elementele diagonale egale cu 1.

Discurile Gherşgorin, [26], asociate (pe linii) matricei $\overline{Q}(s)$ sunt:

$$\mathcal{D}_i(s) \triangleq \left\{\overline{q}(s) \in \mathbb{C};\ |\overline{q}(s)-1| \le \left(R_i^{\mathrm{L}}(s)/|q_{ii}(s)|\right)\right\},\ s \in \mathbb{C},\ i=\overline{1,m}\,. \quad (3.11)$$

Fie $\overline{q}_i(s),\ i=\overline{1,m}$, valorile proprii ale matricei $\overline{Q}(s)$. Discurile Gerşgorin (3.11) au proprietatea:

$$\{\overline{q}_1(s), \overline{q}_2(s), ..., \overline{q}_m(s)\} \subseteq \cup_{i=1}^{m} \mathcal{D}_i(s),\ s \in \mathbb{C}\,.$$

$\overline{Q}(s)$ este diagonal dominantă (pe linii) pentru $s \in C_N$. Rezultă că discurile (3.11), toate cu centrul în punctul 1 al planului $\overline{q}(s)$, au razele $R_i^{\mathrm{L}}(s)/|q_{ii}(s)|$, $i=\overline{1,m}$, subunitare. În consecință, ele nu conțin originea planului $\overline{q}(s)$.

Fie $\mathcal{D}_{\max}$ discul de diametru maxim dintre discurile $\mathcal{D}_i(s)$, $s \in C_N$, $i=\overline{1,m}$. Pentru $s \in C_N$ valorile proprii $\overline{q}_i(s)$, $i=\overline{1,m}$, parcurg segmente ale hodografelor funcțiilor caracteristice ale matricei $\overline{Q}(s)$ (v. subcapitolul 2). Aceste hodografe sunt curbe închise situate în întregime în $\mathcal{D}_{\max}$. Dar $\mathcal{D}_{\max}$ nu conține originea planului $\overline{q}(s)$. Urmează că hodografele funcțiilor caracteristice ale matricei $\overline{Q}(s)$ nu înconjoară respectiva origine. Din acest motiv se poate scrie:

$$\arg\det\overline{Q}(j\omega\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0\,. \quad (3.12)$$

Pe de altă parte, din (3.10) rezultă:

$$\arg\det Q(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{i=1}^{m} \arg q_{ii}(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \arg\det\overline{Q}(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\,.$$

Din aceasta, înlocuind (3.12), se obține (3.8).

Pentru dominanța diagonală pe coloane / în medie se procedează similar. □

Conform Teoremei 3.2, dominanța diagonală în $Q(s)$ pe C_N permite să se considere cele m elemente diagonale din totalul de m^2 elemente ale lui $Q(s)$. Acest fapt se valorifică în studiul stabilității sistemelor automate multivariabile, [143]. Se consideră dominanța diagonală în $F(s) = I_m + G(s)$ sau în $F(s)G^{-1}(s) = I_m + G^{-1}(s)$, pentru care se formulează metodele *ariei Nyquist directe* şi respectiv a *ariei Nyquist inverse*. Se prezintă în continuare prima metodă.

3.2. Criterii de BIBO stabilitate

Se consideră sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 (v. şi relaţiile (1.1) – (1.8)) şi *discurile Gherşgorin* (pe linii):

$$\mathcal{D}_i(s) = \left\{ \gamma(s) \in \mathbb{C};\ \left| \gamma(s) - g_{ii}(s) \right| \le \sum\nolimits_{k=1,\,k\ne i}^{m} \left| g_{ik}(s) \right| \right\},\ s \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,m}\,, \quad (3.13)$$

asociate matricei de transfer $G(s)$ a sistemului în circuit deschis. Dacă $s \in C_N$ (parcurs în sens orar), atunci fiecare $\mathcal{D}_i(s)$ se deplasează în mod corespunzător în planul $\gamma(s)$ acoperind o *bandă* în respectivul plan. Mulţimile

$$\mathcal{B}_i = \cup_{s \in C_N} \mathcal{D}_i(s),\ i = \overline{1,m}\,, \quad (3.14)$$

se numesc *benzile Gherşgorin directe pe linii* ale matricei $G(s)$. Imaginea lor grafică se numeşte *aria Nyquist directă pe linii* a sistemului în circuit deschis.

În mod similar se definesc *discurile Gherşgorin*, *benzile Gherşgorin*, şi *ariile Nyquist directe pe coloane* şi *în medie* ale sistemului în circuit deschis.

Exemplul 3.1

Fie sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 şi

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Să se reprezinte ariile Nyquist directe.

Matricea $G(s)$ fiind simetrică, rezultă că aria Nyquist directă pe linii este identică respectiv cu ariile pe coloane sau în medie. Pe baza expresiilor $g_{11}(j\omega) = 1/(j\omega+1)$, $R_1^{\mathrm{L}}(\omega) = |g_{12}(j\omega)| = 1/\sqrt{\omega^2+9}$, $g_{22}(j\omega) = 1/(j\omega+2)$, $R_2^{\mathrm{L}}(\omega) = |g_{21}(j\omega)| = 1/\sqrt{\omega^2+9}$, calculate pentru valorile $\omega = \{0, 1/2, 2, 3, 10\}$, în fig. IV.3.1 s-au reprezentat câteva discuri ale ariei Nyquist directe. □

Teorema 3.3

Fie P_+ numărul de poli ai sistemului în circuit deschis situaţi în $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 0\}$. Sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 este

BIBO stabil dacă benzile Gherşgorin directe ale sistemului în circuit deschis înconjoară punctul -1 în sens pozitiv, în total, de P_+ ori. □

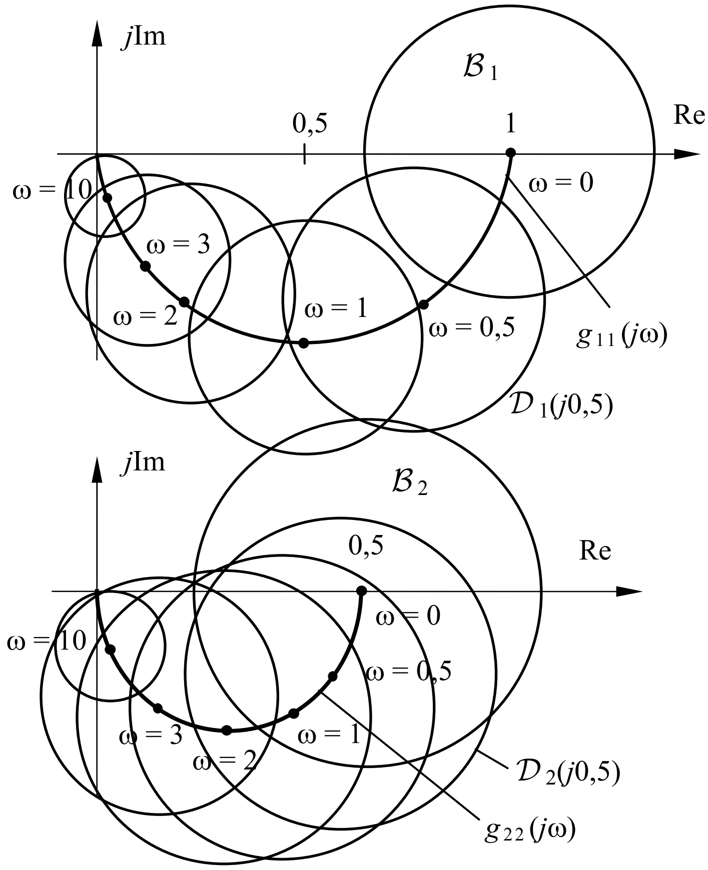

Fig. IV.3.1. Benzile Gherşgorin la Exemplul 3.1

$\mathscr{D}$. Benzile Gherşgorin directe (pe linii) ale matricei $G(s)$ înconjoară punctul -1. Urmează că matricea $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, este diagonal dominantă în raport cu punctul -1. Conform fig. IV.3.2, se scrie:

$$\left|1+g_{ii}(j\omega)\right| > R_i^{\mathrm{L}}(j\omega) = \sum\nolimits_{k=1,\, k\neq i}^{m} \left|g_{ik}(j\omega)\right|,\ i=\overline{1,m}\,. \tag{3.15}$$

Pe de altă parte:

$$\det F(s) = \det\left[I_m + G(s)\right] = \prod\nolimits_{k=1}^{m}\left[1+g_{ii}(s)\right]\det\overline{G}(s)\,, \tag{3.16}$$

unde $\bar{G}(s)$ are elementele extradiagonale de forma $g_{ik}(s)/(1+g_{ii}(s))$ şi toate elementele diagonale egale cu 1.

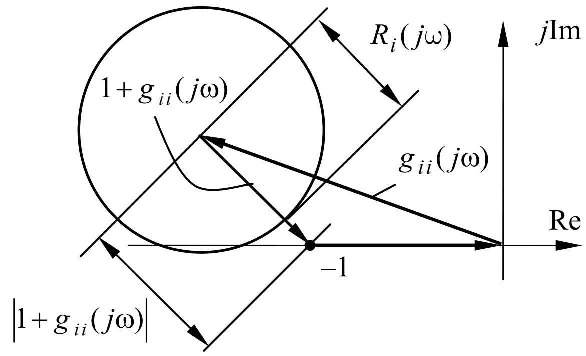

Fig. IV.3.2. Pentru ilustrarea geometrică a relației (3.15)

Conform cu (3.15), cu Teorema 3.2 şi cu faptul că benzile Gherşgorin directe înconjoară punctul -1 de P_+ ori, în sens pozitiv, din (3.16) rezultă:

$$\arg\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \arg\big[1+g_{ii}(j\omega)\big]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi P_+ .$$

Întrucât $G(s)$ are P_+ poli în $\{s\in\mathbb{C}; \mathrm{Re}\, s>0\}$ şi $P_0=0$ poli în $\{s\in\mathbb{C}; \mathrm{Re}\, s=0\}$, conform Teoremei 1.9, rezultă că sistemul este BIBO stabil.

Se procedează similar pentru benzile Gherşgorin pe coloane / în medie. □

Exemplul 3.2

Fie sistemul automat multivariabil cu structura din fig. IV.1.1 şi

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s+3} \\ \dfrac{b}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad a, b\in\mathbb{R} .$$

Să se determine domeniul parametric de BIBO stabilitate în planul (a, b) folosind Teorema 3.3 şi criteriul Hurwitz (Teorema III.3.3).

Pentru $a=b=1$ benzile Gherşgorin sunt reprezentate în fig. IV.3.1. Întrucât ele nu înconjoară punctul -1 şi $P_+=0$, rezultă că, în acest caz, sistemul automat este BIBO stabil.

Pentru $a \neq 1$ şi $b \neq 1$, conform Teoremei 3.3, condiţiile pentru ca benzile Gherşgorin directe (pe linii) să nu conţină punctul -1 sunt:

$$\left|1+\frac{1}{j\omega+1}\right| > \left|\frac{a}{j\omega+3}\right|, \quad \left|1+\frac{1}{j\omega+2}\right| > \left|\frac{b}{j\omega+3}\right|, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

După calcule simple din aceste inegalităţi se obţin condiţiile:

$$|a| < \inf_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\frac{(\omega^2+4)(\omega^2+9)}{\omega^2+1}} \cong 4{,}56, \quad |b| < \inf_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{\omega^2+9}{\sqrt{\omega^2+4}} \cong 4{,}47.$$

Pentru benzile Gherşgorin pe coloane, după calcule similare, se obţin condiţiile $|a| < 4{,}47$ şi $|b| < 4{,}56$. Rezultă că o condiţie suficientă de BIBO stabilitate este: $|a| < 4{,}56$ şi $|b| < 4{,}56$, adică interiorul pătratului din fig. IV.1.3.

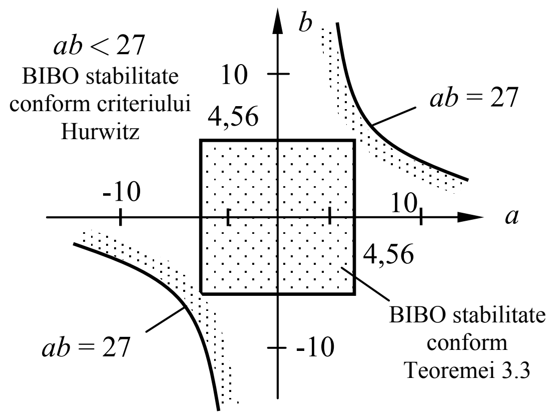

Fig. IV.3.3. Domeniile de stabilitate BIBO la Exemplul 3.2

Se calculează $G_0(s)$ (v. (1.6)) şi apoi, conform Teoremei I.4.5, se obţine:

$$p_0(s) = (s+2)[s^3+9s^2+(27-ab)s+27+ab].$$

Matricea Hurwitz a polinomului dintre parantezele drepte are forma:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 27-ab & 27-ab & 9 \\ 0 & 0 & 27-ab \end{bmatrix}.$$

Conform Teoremei 3.3 BIBO, stabilitatea este echivalentă cu $ab < 27$. Domeniul, delimitat de hiperbola $ab = 27$, îl include pe cel anterior, fig. IV.3.3. □

În aplicații este util să se analizeze BIBO stabilitatea în funcție de factorii de amplificare $k_1, k_2, ..., k_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ai circuitelor cu reacție negativă. În acest caz se înlocuieşte $G(s)$ cu $KG(s)$, $K \triangleq \mathrm{diag}\{k_1, k_2, ..., k_m\}$. Relația (3.16) devine:

$$\begin{aligned} \det F(s) &= \det\left[I_m + KG(s)\right] = \det K \det\left[K^{-1} + G(s)\right] = \\ &= \det K \prod\nolimits_{i=1}^{m}\left[k_i^{-1} + g_{ii}(s)\right] \det \underline{G}(s), \end{aligned} \tag{3.17}$$

unde $\underline{G}(s)$ are elementele extradiagonale $g_{ij}(s)/(k_i^{-1} + g_{ii}(s))$ şi toate elementele diagonale egale cu 1. Dominanța diagonală (3.15) se înlocuieşte cu

$$\left|k_i^{-1} + g_{ii}(j\omega)\right| > R_i(j\omega),\ i = \overline{1,m}, \tag{3.18}$$

ceea ce înseamnă că se raportează, pe linii, la punctele critice $-k_i^{-1},\ i = \overline{1,m}$.

Dominanța diagonală pe coloane se formulează în mod similar.

Teorema 3.4

Fie P_+ numărul de poli ai sistemului în circuit deschis situați în $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 0\}$. Sistemul automat multivariabil conform fig. IV.1.1 în care $G(s)$ s-a înlocuit cu $\mathrm{diag}\{k_1, k_2, ..., k_m\}G(s)$ sau $G(s)\mathrm{diag}\{k_1, k_2, ..., k_m\}$, este BIBO stabil dacă benzile Gherşgorin directe (pe linii sau coloane) ale lui $G(s)$ înconjoară respectiv punctele $-k_i^{-1},\ i = \overline{1,m}$, în sens pozitiv, în total, de P_+ ori. □

$\mathcal{D}$. Din (3.17), cu (3.18), Teorema 3.1 şi faptul că benzile $\mathcal{B}_i,\ i = \overline{1,m}$, înconjoară respectiv punctele $-k_i^{-1},\ i = \overline{1,m}$, în sens pozitiv de P_+ ori implică

$$\arg\det F(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum\nolimits_{i=1}^{m}[k_i^{-1} + g_{ii}(j\omega)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi P_+ .$$

Conform Teoremei 1.9 sistemul automat este BIBO stabil.

Demonstrația este similară în cazul dominanței diagonale pe coloane. □

Remarcabil în acest rezultat este faptul că fiecărei linii sau coloane a lui $G(s)$ i se asociază un punct critic. Se lărgesc astfel posibilitățile de utilizare a dominanței diagonale, mai ales în sinteza regulatorului. Acum se poate lucra cu m puncte critice care pot fi plasate pe axa reală conform cu necesitățile sintezei. O astfel de înlesnire nu este posibilă în cazul funcțiilor de transfer caracteristice decât dacă $G(s)$ satisface anumite condiții particulare, [152].

Capitolul V
SISTEME DINAMICE NELINIARE

1. Preliminarii

Studiile experimentale evidențiază faptul că, de regulă, sistemele dinamice reale sunt *neliniare* (nu satisfac condiția de liniaritate (I.1.25)). Clase relativ largi de sisteme dinamice reale au particularitatea că pot fi descrise de modele matematice liniare obținute prin idealizări, simplificări şi aproximații ale fenomenelor reale. În majoritatea situațiilor rezultatele care se obțin în astfel de condiții sunt satisfăcătoare, în sensul unei concordanțe acceptabile între modelele matematice şi respectiv observațiile şi rezultatele experimentale obținute în cadrul sistemelor reale.

În acelaşi timp, există situații în care pentru obținerea unui model matematic liniar ar trebui să se facă aproximații importante. Astfel de aproximații pot fi inacceptabile atât principial cât şi datorită unor neconcordanțe evidente între sistemul real şi rezultatele de simulare a modelului matematic liniar. Iată de ce, în atare situații, studiul trebuie să se bazeze pe modele matematice neliniare adecvate de forma (I.1.13), (I.1.5). Faptul că nu există proceduri generale pentru determinarea soluției unui astfel de model a avut ca urmare dezvoltarea unor metode calitative de analiză şi de sinteză a sistemelor dinamice neliniare, în parte bazate şi pe idei şi proceduri cunoscute din studiul sistemelor dinamice liniare. Majoritatea acestor metode au ca scop sau pot fi adaptate pentru studiul *stabilității interne* şi pentru sinteza unor sisteme cu anumite proprietăți de stabilitate fără cunoaşterea soluției ecuației (I.1.13).

În cadrul studiului *stabilității interne*, după cum s-a văzut şi la sistemele liniare (v. subcapitolul III.1), se are în vedere în primul rând *evoluția internă* a sistemului sub influența stării interne inițiale, respectiv a acumulărilor interne de substanță, energie şi informație existente inițial în sistem. În acest context, acțiunea externă nefiind esențială în acest demers, pentru mărimea de intrare se adoptă $u(t) \equiv 0,\ t \in \mathbb{R}$. Totodată, se va considera că funcția f din ecuația (I.1.13) a sistemului dinamic neliniar nu depinde explicit de timp. Această ipoteză simplificatoare nu reduce generalitatea tratării, deoarece oricând este posibil să se completeze vectorul de stare x cu o nouă componenta $x_{n+1} = t$ şi ecuaţia de stare (I.1.13) cu $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Ca urmare, se are în vedere clasa sistemelor dinamice neliniare *autonome*:

$$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

cu starea iniţială

$$x(t_0) = x_0,\ t_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

în care f are proprietăţi care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei *problemei Cauchy* (1.1), (1.2) (v. Teorema I.1.2).

Ca şi în cazul sistemelor dinamice liniare, stabilitatea internă a unui sistem dinamic neliniar este direct legată de noţiunea de *stare de echilibru* (v. Definiţia III.1.1), în care *vitezele componentelor vectorului de stare sunt nule*. Pentru simplitatea tratării se consideră că $x = 0$ este o soluţie a ecuaţiei (1.1).

Definiţia 1.1

Starea $x = 0$ se numeşte *stare* (*punct*) *de echilibru* a sistemului (1.1) dacă

$$f(0) = 0\,. \square \tag{1.3}$$

Observaţia 1.1

Pentru orice altă stare (punct) de echilibru $x = a = \text{constant} \neq 0$, soluţie a ecuaţiei (1.1) cu $\dot{x} = \dot{a} = 0,\ f(a) = 0$, se aplică în (1.1) schimbarea de variabilă $z = x - a$. Se obţine ecuaţia $\dot{z} = \tilde{f}(z)$, cu $\tilde{f}(z) \triangleq f(z + a)$, a cărei stare de echilibru este $z = 0$. Urmează că analiza stabilităţii interne a sistemului (1.1) se poate întemeia, pentru orice altă stare de echilibru $x = a \neq 0$, pe rezultatele de stabilitate a stării de echilibru $x = 0$. Acestea se aplică însă sistemului $\dot{z} = \tilde{f}(z)$, în general diferit de sistemul (1.1). □

S-a arătat la Observaţia III.1.2, că stabilitatea stării (punctului) de echilibru este o *problemă de continuitate* a soluţiei ecuaţiei (1.1) în raport cu condiţia iniţială (1.2). De asemenea, s-a menţionat că noţiunile de stabilitate internă introduse prin Definiţiile III.1.2 – III.1.5 sunt utilizabile şi pentru caracterizarea sistemelor dinamice neliniare.

2. Metoda planului stărilor

Soluțiile sistemului (1.1) sunt invariante în raport cu translațiile temporale (v. Definiți I.1.6). Aceasta înseamnă că pentru o soluție $x(t)$ având domeniul $I \subseteq \mathbb{R}$ şi codomeniul $X_I = x(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ şi pentru orice translație $\tau \in \mathbb{R}$ are loc:

$$\dot{x}(t+\tau) = f\left[x(t+\tau)\right], \ \ t+\tau \in I, \tau \in \mathbb{R}\,. \qquad (2.1)$$

În plus, dacă pentru fiecare pereche inițială $[t_0, x(t_0)] \in \mathbb{R} \times X_I$ ecuația (1.1) are o soluție unică, atunci toate soluțiile pe $I \times X_I$ se obțin prin translarea în timp a uneia dintre soluții. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ este divizată în submulțimi şi în fiecare submulțime toate soluțiile se obțin prin translarea conform relației (2.1). Se formează o familie de soluții, complet caracterizată de orice soluție din familie.

Exemplul 2.1.

Să se determine submulțimile $\mathbb{R} \times X_I$ şi comportarea familiilor de soluții în vecinătatea stărilor de echilibru ale sistemului dinamic autonom:

$$\dot{x} = (x^2 - 1)/2, \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Punctele de echilibru ale sistemului sunt $x = -1$ şi $x = 1$.

Separând variabilele x şi t în ecuația de mai sus, după integrare, se obține:

$$\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = Ce^t, \ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, C = \text{const.}$$

Spațiul stărilor este dreapta reală. Conform semnului fracției din membrul stâng al soluției rezultă că există trei submulțimi $\mathbb{R} \times X_I$, cu $X_{I_1} = (-\infty, -1)$, $X_{I_2} = (-1{,}1)$ şi $X_{I_3} = (1, +\infty)$. Cu ajutorul graficului funcției $f(x) = (x^2 - 1)/2$ se demonstrează că familiile de traiectorii de pe dreapta de stare au sensurile de evoluție în timp conform semnului vitezei $\dot{x} = f(x)$ a stării, fig. IV.1.1.

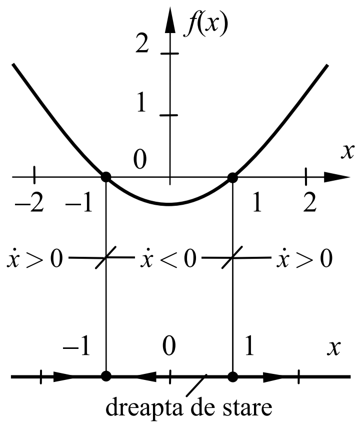

Fig. V.2.1.Pentru Exemplul 2.1

Se observă că între sensurile traiectoriilor de stare şi natura punctelor de echilibru există o relaţie directă. Punctul $x=-1$ este *atractor* (asimptotic stabil) deoarece traiectoriile de stare converg către acesta. Punctul $x=1$ este însă *repulsor* (instabil) deoarece traiectoriile de stare sunt divergente. □

Acest exemplu evidenţiază esenţa *metodei planului stărilor*. Ea oferă informaţii despre proprietăţile interne ale sistemului şi în special privitoare la stabilitatea punctelor de echilibru. Întrucât aplicarea efectivă se bazează şi pe reprezentări grafice, utilizarea metodei planului stărilor este naturală şi comodă în primul rând în cazul sistemelor dinamice autonome de ordinul unu şi doi.

2.1. Portretul de stare

Fie sistemul dinamic autonom de ordinul doi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2), \quad t\in\mathbb{R},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pentru $f_1(x_1,x_2)\neq 0$ din cele două ecuaţii (2.2) se obţine

$$\frac{dx_2}{dx_1} = f(x_1,x_2)\,, \tag{2.3}$$

unde $dx_2/dx_1 = (dx_2/dt)\big/(dx_1/dt) = (dx_2/\cancel{dt})(\cancel{dt}/dx_1)$, $f(x_1,x_2) \triangleq f_2(x_1,x_2)\big/f_1(x_1,x_2)$, ceea ce este echivalent cu eliminarea timpului între ecuaţiile (2.2).

În ipoteza că $f(x_1,x_2)$ este continuă şi lipschitziană (v. Teorema I.1.2), ecuaţia (2.3) admite o soluţie unică (traiectorie de stare în planul (x_1,x_2)):

$$x_2 = x_{20} + \int_{x_{10}}^{x_1} f(x,\, x_2)dx,\quad (x_{10},x_{20})\in\mathbb{R}^2\,, \tag{2.4}$$

care satisface condiţiile iniţiale $x_1(t_0)=x_{10},\ x_2(t_0)=x_{20},\ t_0\in\mathbb{R}$.

Din punctul de vedere al analizei stabilităţii sistemului (2.2), bazată şi pe reprezentarea grafică a soluţiei (2.4), este necesar să se parcurgă următorii paşi.

(1) Se determină punctele de echilibru $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, soluţii ale sistemului:

$$f_1(a_1,a_2)=0,\ f_2(a_1,a_2)=0\,. \tag{2.5}$$

(2) Se trasează traiectoriile (2.4) pentru unele stări (x_{10}, x_{20}) apropiate stărilor de echilibru şi se indică sensul de parcurgere pentru t crescător.
(3) Se stabileşte natura fiecărei stări de echilibru în funcție de sensurile de parcurgere a traiectoriilor aflate în vecinătate.

Definiția 2.1

Imaginea grafică obținută conform punctelor 1 şi 2 se numeşte *portretul de stare* al sistemului (2.2). □

Realizarea pasului (2), care de regulă este mai dificilă, este posibilă prin următoarele trei procedee:
(a) Integrarea ecuațiilor (2.2) sau a ecuației (2.3), finalizate cu obținerea unei soluții explicitate analitic.
(b) Integrarea ecuațiilor (2.2) sau a ecuației (2.3) prin metode grafo-analitice.
(c) Integrarea ecuațiilor (2.2) sau a ecuației (2.3) prin metode numerice.

Exemplul 2.2

Fie sistemul dinamic neliniar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2. \end{cases}$$

Să se determine portretul de stare al sistemului.

Există două stări de echilibru, $(0,0)$, $(2,0)$, soluții ale sistemului de ecuații

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1^2 = 0 \\ -x_2 + x_1 x_2 = 0. \end{cases}$$

Făcând raportul ecuațiilor diferențiale ale sistemului (v. (2.3)), rezultă:

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = \frac{-x_2 + x_1 x_2}{2x_1 - x_1^2}, \quad x_1 \neq 0, \ x_1 \neq 2\,.$$

Aceasta este o ecuație diferențială cu variabile separabile, din care se obține:

$$\frac{d\,x_2}{x_2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_1}\right) d\,x_1,$$

a cărei soluție este

$$x_2^2 = A\left| x_1(x_1 - 2) \right|^{-1}, \; x_1 \neq 0, \; x_1 \neq 2, \; A = \text{const.}$$

Pentru $x_1 = 0$ şi $x_1 = 2$ din cea de a doua ecuaţie a sistemului se obţine:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ |x_2| = Be^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ |x_2| = Ce^{t}, \; B, C = \text{constant.} \end{cases}$$

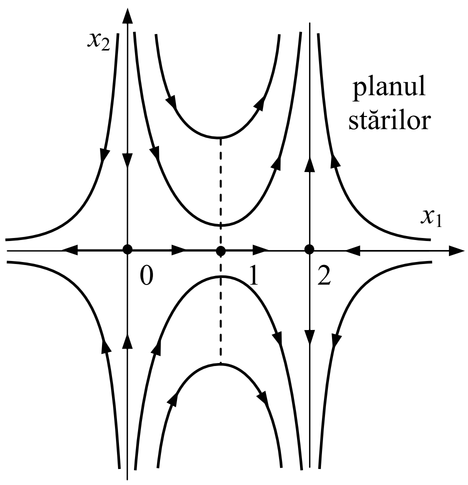

Fig. V.2.2. Pentru Exemplul 2.2

Portretul de stare, conform soluţiilor obţinute, are imaginea din fig. V.2.2. Sensurile de parcurgere a traiectoriilor rezultă din semnele funcţiilor $f_1(x_1, x_2)$ şi $f_2(x_1, x_2)$ pentru $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, respectiv din semnele derivatelor $\dot{x}_1$ şi $\dot{x}_2$. Pe această bază se pot stabili intervalele de monotonie ale variabilelor x_1 şi x_2. De exemplu, pentru $x_2 > 0, x_1 \in \mathbb{R}$ situaţia sensurilor este următoarea:

$x_1 \in$	$(-\infty, \; 0)$	$(0, \; 1)$	$(1, \; 2)$	$(2, \; +\infty)$
$\dot{x}_1 \;\; \dot{x}_2$	$\dot{x}_1 < 0, \; \dot{x}_2 < 0$	$\dot{x}_1 > 0, \; \dot{x}_2 < 0$	$\dot{x}_1 > 0, \; \dot{x}_2 > 0$	$\dot{x}_1 < 0, \; \dot{x}_2 > 0$
x_1, x_2	$x_1 \downarrow, \; x_2 \downarrow$	$x_1 \uparrow, \; x_2 \downarrow$	$x_1 \uparrow, \; x_2 \uparrow$	$x_1 \downarrow, \; x_2 \uparrow$

Pentru $x_2 < 0, x_1 \in \mathbb{R}$ se schimbă adecvat numai semnele derivatei $\dot{x}_2$.

Evident, punctele de echilibru $x = 0$ şi $x = 2$ sunt instabile, dar ele nu sunt nici atractori şi nici repulsori (aşa cum sunt cele de la Exemplul 2.1). □

2.2. Sisteme dinamice liniare de ordinul doi

Analiza nuanţată a portretelor de stare necesită un studiu topologic adecvat. Se începe un astfel de studiu în cazul sistemelor liniare de ordinul 2, pentru care se pot aplica, în paralel, rezultatele de stabilitate cunoscute din secţiunea de la III.1.2.

Fie un sistem dinamic liniar autonom de ordinul doi descris de ecuația:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.6}$$

în care $a_{11}, ..., a_{22} \in \mathbb{R}$ sunt elementele matricei A a sistemului.

Fie λ_1, λ_2 valorile proprii ale matricei A. Prin transformarea de similitudine $J = V^{-1} A V$ (v. secțiunea I.2.3) se obține una din următoarele forme canonice:

$$\text{pentru } \lambda_1 \neq \lambda_2, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \ \text{pentru } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \text{sau} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Definiția 2.2

A. Sistemul (2.6) se numeşte *simplu* dacă $\det A \neq 0$.

B. Dacă $\det A = 0$, atunci el se numeşte *nesimplu*. □

Un sistem (2.6) simplu admite o singură stare de echilibru şi anume $(0,0)$. Natura acestuia depinde de localizarea în planul complex a valorilor proprii λ_1, λ_2. În acest context se disting mai multe cazuri.

a. Sistem simplu, valori reale şi distincte

Folosind $y = V^{-1} x$, sistemul (2.6) se transformă în forma canonică:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{2.8}$$

Componentele y_1, y_2 se numesc *variabilele proprii*, iar spațiul corespunzător are *axele proprii* Oy_1, Oy_2 (de regulă se iau rectangulare). În acest caz pentru

$$V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ ad - bc \neq 0, \tag{2.9}$$

din $x = Vy = 0$ rezultă următoarele ecuații ale axelor Ox_1, Ox_2 ale sistemului inițial:

$$(Ox_2)\ \ a\, y_1 + b\, y_2 = 0; \quad (Ox_1)\ \ c\, y_1 + d\, y_2 = 0.$$

În aceste condiții Ox_1, Ox_2 pot fi trasate în sistemul rectangular de axe Oy_1, Oy_2.

Integrând în (2.9) se obține soluția generală:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{10}\, e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = y_{20}\, e^{\lambda_2 t}, \quad t \geq 0; \quad y_{10,20} = \text{constant.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Pe de altă parte, făcând raportul celor două ecuații din (2.9) se obține:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1},$$

din care se obține ecuația generală (în axele proprii) a traiectoriilor de stare:

$$y_2 = C_1 (y_1)^{(\lambda_2/\lambda_1)}, \; C_1 = \text{constant}. \tag{2.11}$$

(a1) Dacă $\lambda_{1,2} < 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$. Traiectoriile de stare (2.11) sunt parabole care converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.a. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru se numeşte *nod atractor* sau *nod stabil*.

(a2) Dacă $\lambda_{1,2} > 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$. Traiectoriile de stare (2.11) sunt parabole care diverg de la starea de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.b. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru se numeşte *nod repulsor* sau *nod instabil*.

(a3) Dacă $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to 0$. Ca la (a1) şi (a2) axele Oy_1 şi Oy_2 sunt traiectorii. În acest caz însă sunt singurele care trec prin punctul de echilibru (0, 0) şi se numesc *separatoare* (Oy_2 – stabilă şi Oy_1 – instabilă). Traiectoriile de stare (2.11) sunt hiperbole şi tind asimptotic la separatoare, fig. V.2.3.c. Sistemul este instabil şi, datorită formei traiectoriilor, punctul de echilibru (0, 0) se numeşte *şa*.

b. Sistem simplu, valori proprii complex conjugate

Fie $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\beta > 0$. În acest caz variabilele proprii y_1, y_2 sunt complex conjugate. Folosind transformarea:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

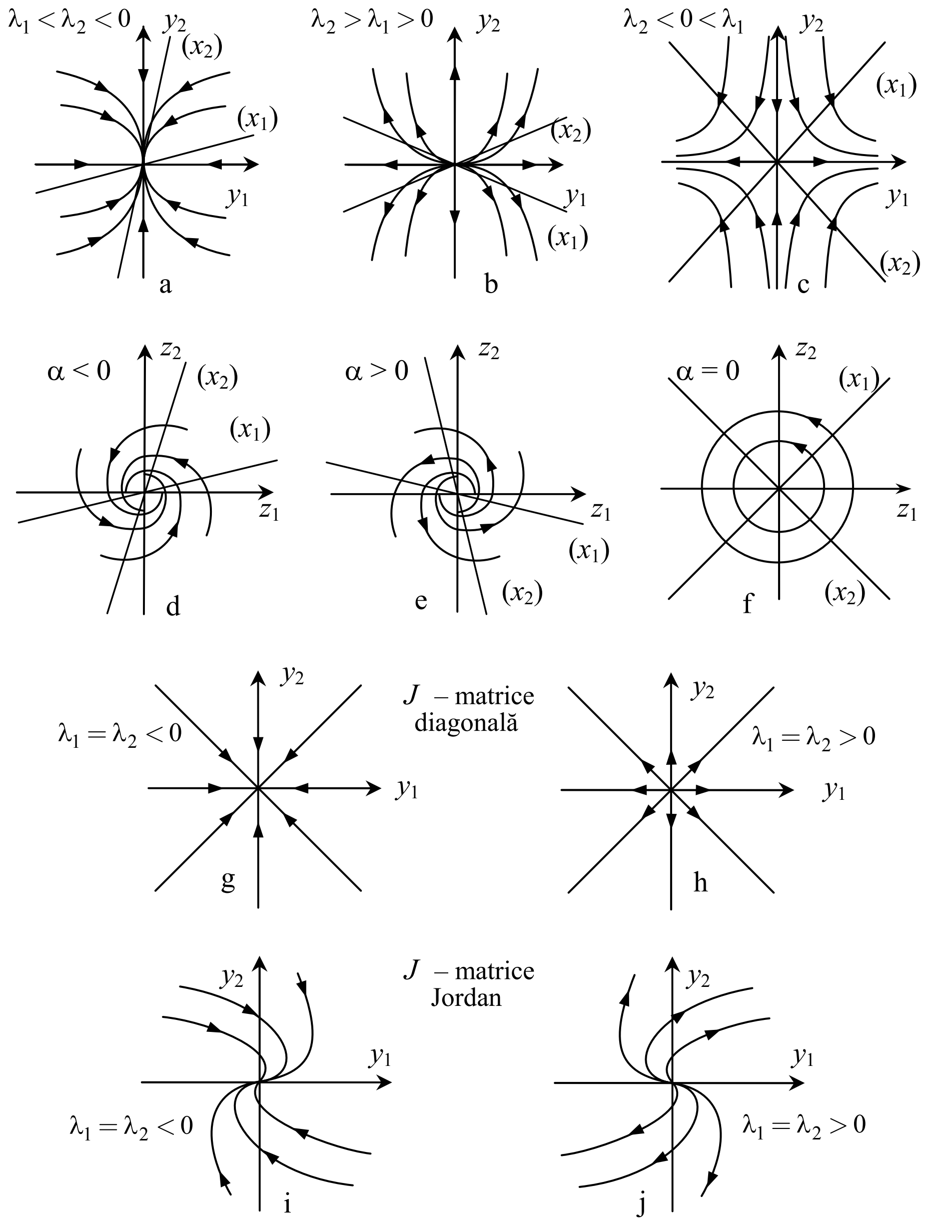

Fig. V.2.3.Portrete de stare ale sistemului liniar de ordinul doi simplu:
a – *nod atractor*; b – *nod repulsor*; c – *şa*; d – *focar atractror*; e – *focar repulsor*;
f – *centru*; g, i – *nod atractor*; h, j – *nod repulsor*

sistemul (2.8) se aduce la următoarea formă echivalentă:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2. \qquad (2.12)$$

Ecuațiile axelor Ox_1 şi Ox_2 ale sistemului inițial, ținând seama şi de (2.9), au expresiile

$$\begin{cases} z_1 \operatorname{Re} a - z_2 \operatorname{Im} a = 0 & (Ox_2) \\ z_1 \operatorname{Re} c - z_2 \operatorname{Im} c = 0 & (Ox_1). \end{cases}$$

Făcând raportul ecuațiilor scalare din (2.12) se obține

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha z_1 - \beta z_2}. \qquad (2.13)$$

Aceasta se integrează folosind coordonatele polare

$$\begin{cases} z_1 = r\cos\theta \\ z_2 = r\sin\theta. \end{cases} \qquad (2.14)$$

După calcule relativ simple din (2.13) şi (2.14) rezultă:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r,$$

a cărei soluție este

$$r = C_2 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta}, \quad C_2 = \text{constant}. \qquad (2.15)$$

(b1) Dacă $\alpha < 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10), (2.11) rezultă: $|z_1| \to 0$ şi $|z_2| \to 0$, respectiv $r \to 0$. Traiectoriile de stare (2.15) sunt spirale care converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.d. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru se numeşte *focar atractor* sau *focar stabil*.

(b2) Dacă $\alpha > 0$ atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10), (2.11) rezultă: $|z_1| \to \infty$ şi $|z_2| \to \infty$, respectiv $r \to \infty$. Traiectoriile de stare (2.15) sunt spirale care diverg de la punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.d. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru se numeşte *focar repulsor* sau *focar instabil*.

(b3) Dacă $\alpha = 0$ atunci $r = C_2$ pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$, respectiv pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Sistemul este simplu stabil, variabilele z_1, z_2 sunt funcții periodice sinusoidale de perioadă $2\pi/\beta$, iar traiectoriile de stare sunt curbe închise (cercuri), fig. V.2.3.f. Punctul de echilibru se numeşte *centru*.

c. Sistem simplu, valori proprii reale şi egale

În acest caz matricea A a sistemului este asemenea cu matricea J, de forma a doua sau a treia din (2.7).

(c1) Dacă matricea J este diagonală, atunci, conform cu (2.11), în care $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$, traiectoriile de stare sunt descrise de ecuația:

$$y_2 = C_1 y_1 . \tag{2.16}$$

(c11) Dacă $\lambda_0 < 0$ atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$. Traiectoriile de stare (2.16) sunt drepte care converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.1.g. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru este un *nod atractor* (*nod stabil*).

(c12) Dacă $\lambda_0 > 0$ atunci pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$. Traiectoriile de stare (2.11) sunt drepte care diverg de la punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.h. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru este un *nod repulsor* (*nod instabil*).

(c2) Dacă J este de tip Jordan, atunci forma canonică a sistemului (2.6) este

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 . \tag{2.17}$$

Integrând acest sistem se obține

$$\begin{cases} y_1(t) = (C_3 + C_4 t) e^{\lambda_0 t} \\ y_2(t) = C_4 e^{\lambda_0 t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_{3,4} = \text{constant} . \tag{2.18}$$

Eliminând t între aceste ecuații se obține

$$y_1 = \left(C_5 + \frac{1}{\lambda_0} \ln |y_2| \right) y_2, \quad C_5 = \frac{C_3}{C_4} - \frac{1}{\lambda_0} \ln |C_4| . \tag{2.19}$$

(c21) Dacă $\lambda_0 < 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.18) rezultă: $|y_1| \to 0$ şi $|y_2| \to 0$. Traiectoriile de stare (2.19) converg către punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.2.i. Sistemul este asimptotic stabil şi punctul de echilibru este un *nod atractor* (*nod stabil*).

(c22) Dacă $\lambda_0 > 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, din (2.10) rezultă: $|y_1| \to \infty$ şi $|y_2| \to \infty$. Traiectoriile de stare (2.18) diverg de la punctul de echilibru (0, 0), fig. V.2.3.j. Sistemul este instabil şi punctul de echilibru este un *nod repulsor* (*nod instabil*).

d. Sistem nesimplu, valori proprii reale

În acest caz $\det A \leq 1$. Sistemul (2.6) are cel puţin o valoare proprie nulă. Ca urmare sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

în afară de soluţia banală $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, admite şi soluţii nebanale.

(d1) Pentru $\operatorname{rang} A = 1$ sistemul (2.20) are o simplă infinitate de soluţii, toate situate pe o dreapta care trece prin origine. Pe această dreaptă există o simplă infinitate de puncte de echilibru. Pentru (de exemplu) $\lambda_1 = 0$, acestea sunt simplu stabile dacă $\lambda_2 < 0$ şi instabile dacă $\lambda_2 > 0$. Pentru $\lambda_{1,2} = 0$ cu $J = V^{-1}AV$ matrice Jordan (forma a treia din (2.7)), punctele de echilibru sunt instabile.

(d2) Pentru $\operatorname{rang} A = 0$, respectiv $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ cu $J = V^{-1}AV$ matrice diagonală, sistemul (2.20) admite o dublă infinitate de soluţii. În acest caz toate punctele din planul stărilor sunt puncte de echilibru simplu stabile.

Din cele expuse în această secţiune rezultă că în cazul unui sistem dinamic liniar de ordinul doi simplu, punctul de echilibru (0, 0) poate fi de următoarele patru tipuri calitative principale: *atractor* (sistemul este asimptotic stabil), *centru* (sistemul este simplu stabil), *repulsor* şi *şa* (sistemul este instabil în ambele cazuri).

În mod corespunzător toate tipurile de portrete de stare se reduc de asemenea la patru tipuri principale, aflate într-o strânsă corelaţie cu cele patru tipuri calitative principale de puncte de echilibru. Se va arăta că această *topologie* este semnificativă şi pentru sistemele dinamice neliniare autonome de ordinul doi.

2.3. Sisteme dinamice neliniare de ordinul doi

a. Sisteme calitativ echivalente

Fie $x_0 \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Mulţimea definită prin discul

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^2;\ \left\| x - x_0 \right\| < r \right\}$$

se numeşte o *vecinătate* a punctului x_0.

O parte a portretului de stare a unui sistem cuprins într-o vecinătate V a lui x_0 se numeşte *restricţia* la V a portretului de stare.

În cazul sistemelor dinamice neliniare de ordinul doi se utilizează frecvent *restricţii ale portretului de stare global*. O astfel de restricţie, care poate fi oricât de mică, se numeşte *portret de stare local* în x_0.

Definiţia 2.3

Două sisteme dinamice de ordinul doi se numesc *calitativ echivalente* dacă între portretele lor de stare există o bijecţie continuă care conservă sensurile de parcurgere a traiectoriilor de stare. □

Fie o restricţie a portretului de stare la vecinătatea V a originii în cazul sistemului liniar simplu (2.6). Există o vecinătate $V' \subseteq V$ astfel încât restricţia portretului de stare la vecinătatea V' a originii este calitativ echivalentă cu portretul de stare global al aceluiaşi sistem. Această *echivalenţă calitativă* justifică de fapt afirmaţia că *tipul calitativ* al portretului de stare este determinat de tipul calitativ al punctului de echilibru. Aceasta a fost concluzia la care s-a ajuns la sfârşitul secţiunii 2.2.

Sistemele dinamice neliniare de ordinul doi pot avea mai mult de un punct de echilibru. În astfel de cazuri portretele de stare locale nu determină întotdeauna portretul de stare global.

b. Utilizarea sistemelor liniarizate

Fie $\left(a_1, a_2\right) \in \mathbb{R}^2$ un punct de echilibru al sistemului (2.2). Folosind formula lui Taylor şi ţinând seama şi de (2.5), funcţiile scalare $f_1(x_1, x_2)$ şi $f_2(x_1, x_2)$, în ipoteza că sunt derivabile, pot fi exprimate după cum urmează:

$$f_i(x_1,x_2) = \left(\partial f_i / \partial x_1\right)_{a_1,a_2}(x_1 - a_1) + \left(\partial f_i / \partial x_2\right)_{a_1,a_2}(x_2 - a_2) + R_i(x_1,x_2),\ i = 1,2\ .\quad(2.21)$$

Resturile $R_i(x_1, x_2)$ satisfac condițiile:

$$\lim_{r\to 0} R_i(x_1, x_2)/r = 0,\ i = 1{,}2 \text{ cu } r = \left[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2\right]^{1/2}.$$

Se introduc în continuare coordonatele locale:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - a_1 \\ y_2 = x_2 - a_2. \end{cases}$$

Înlocuind (2.21) în (2.2) se obține:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + R_1(y_1 + a_1, y_2 + a_2) \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + R_2(y_1 + a_1, y_2 + a_2), \end{cases} \tag{2.22}$$

în care coeficienții

$$a_{ij} = \left(\partial f_i / \partial x_j\right)_{a_1, a_2},\ i, j = 1{,}2,$$

se utilizează pentru a forma matricea $A = (a_{ij})$.

Sistemul

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \tag{2.23}$$

se numeşte *partea liniară a sistemului* (2.22).

Definiția 2.4

Punctul de echilibru $y_1 = 0,\ y_2 = 0$ al sistemul (2.22) se numeşte *simplu* dacă partea sa liniară (2.23) este un sistem simplu, respectiv dacă $\det A \neq 0$. Dacă $\det A = 0$ punctul de echilibru se numeşte *nesimplu*. □

Teorema 2.1 (a liniarizării)

Fie sistemul (2.2) cu punctul de echilibru simplu (0, 0). Atunci într-o vecinătate a originii portretul de stare este calitativ echivalent cu portretul de stare al părții sale liniare, cu condiția ca pentru partea liniară punctul de echilibru să nu fie centru. □

Acest rezultat, [120], stă la baza analizei stabilității sistemelor dinamice neliniare cu ajutorul părților lor liniare.

b1. Puncte de echilibru hiperbolice.

Tipurile de puncte de echilibru pentru care Teorema 2.1 este adevărată se numesc *puncte de echilibru hiperbolice* (atractor, repulsor şi şa). Echivalenţa calitativă, în cazul punctelor de echilibru hiperbolice, între un sistem dinamic neliniar şi partea sa liniară permite să se extindă topologia punctelor de echilibru introduse la 2.1.3 în cazul sistemelor dinamice liniare simple, şi pentru sistemele dinamice neliniare. Această proprietate a punctelor de echilibru hiperbolice decurge din caracterul special al bijecţiei din Definiţia 2.3, în sensul că pentru vecinătăţi suficient de mici ale punctului de echilibru, respectiva bijecţie este foarte apropiată de aplicaţia identică.

Exemplul 2.3

Se consideră sistemele

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 - x_2^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Să se construiască portretele de stare locale şi să se compare cu portretele părţilor liniare corespunzătoare.

Punctul de echilibru al ambelor sisteme este (0, 0). Folosind coordonatele polare $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ cele două sisteme se aduc la formele $\dot{r} = r^3$, $\dot{\theta} = 1$ şi respectiv $\dot{r} = -r^3$, $\dot{\theta} = 1$. Portretele de stare ale acestor sisteme sunt reprezentate în fig. V.2.4. Evident, ele nu sunt calitativ echivalente.

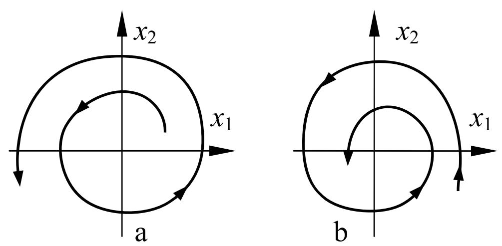

Fig. V.2.4. La Exemplul 2.3
a – *focar repulsor;* b – *focar atractor*

Utilizând formula lui Taylor se constată că ambele sisteme au aceeaşi parte liniară:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Punctul de echilibru al părţii liniare este centru, fig. V.2.3.f, adică situaţia exceptată de Teorema 2.1. În acest caz, pe baza părţii liniare, nu se poate afirma nimic privitor la punctul de echilibru al sistemului dinamic neliniar. □

Pentru stabilitate, pe baza Teoremei 2.1 se pot face următoarele afirmații.

Teorema 2.2

Punctul de echilibru $y_1 = 0, y_2 = 0$ al sistemului (2.22) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă partea sa liniară descrisa de (2.23) este asimptotic stabilă. □

Teorema 2.3

Punctul de echilibru $y_1 = 0, y_2 = 0$ al sistemului (2.22) este instabil dacă şi numai dacă partea sa liniară (2.23) este instabilă. □

b2. Punct de echilibru de tip centru

În cazul în care punctul de echilibru (0, 0) este un centru al părții liniare, Teorema 2.1 nu permite să se facă vreo afirmație despre natura punctului de echilibru al sistemului (2.22). În acest caz se foloseşte noțiunea de *indice de stabilitate*, care se calculează după cum urmează:

(1) Pentru sistemul (2.23), având valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm j\beta,\ \beta > 0$, şi originea punct de echilibru de tip centru (v. 2.2.b), se determină matricea

$$P = V\begin{bmatrix} j & 1 \\ -j & 1 \end{bmatrix},$$

în care V este matricea modală a sistemului (2.23) (v. secțiunea I.2.3). Se realizează transformarea (v. şi 2.2.b)

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j\beta & 0 \\ 0 & -j\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & 1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

în care A este matricea sistemului (2.23) şi $\pm j\beta$ sunt valorile sale proprii.

(2) Se transformă sistemul (2.22) folosind schimbarea de variabile de stare:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

şi se obține:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Z_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = Z_2(z_1, z_2). \end{cases}$$

(3) Se calculează indicele de stabilitate:

$$I=\beta\left(Z_{111}^{1}+Z_{122}^{1}+Z_{112}^{2}+Z_{222}^{2}\right)+Z_{11}^{1}Z_{11}^{2}-Z_{11}^{1}Z_{12}^{1}+$$

$$+Z_{11}^{2}Z_{12}^{2}+Z_{22}^{2}Z_{12}^{2}-Z_{22}^{1}Z_{12}^{1}-Z_{22}^{1}Z_{22}^{2},$$

în care

$$Z_{jk}^{i}=\frac{\partial^{2}Z_{i}}{\partial z_{j}\,\partial z_{k}}(0,0),\ \ Z_{jkm}^{i}=\frac{\partial^{3}Z_{i}}{\partial z_{j}\,\partial z_{k}\,\partial z_{m}}(0,0),\quad i,j,k,m=1,2.$$

Teorema 2.4

Dacă punctul de echilibru (0, 0) al sistemului (2.23) este centru şi $I<0$, atunci punctul de echilibru (0, 0) al sistemului (2.22) este asimptotic stabil. □

Teoremele 2.2, 2.3 şi 2.4, bazându-se pe partea liniară a sistemului dinamic neliniar, furnizează numai rezultate locale (pentru o vecinătate a punctului de echilibru). Comportarea sistemului poate fi studiată folosind portretul de stare local.

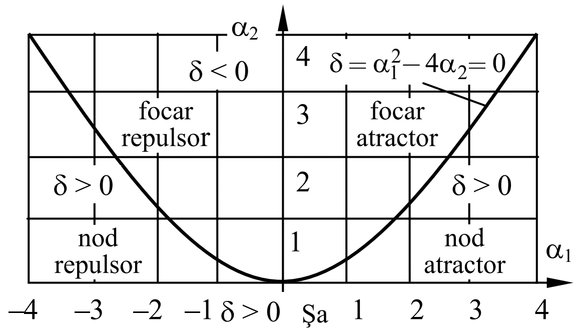

Fig. V.2.5. Clasificarea în planul (α_1,α_2) *a tipurilor de puncte de echilibru ale părţii liniare* (2.23) *a sistemului* (2.22).

Se are în vedere că polinomul caracteristic al sistemului (2.23) are forma:

$$\Delta(s)=s^2+\alpha_1 s+\alpha_2,$$

unde $\alpha_1=-(a_{11}+a_{22})$ şi $\alpha_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Natura zerourilor lui $\Delta(s)$ depinde de discriminantul $\delta=\alpha_1^2-4\alpha_2$ şi de semnele coeficienţilor α_1,α_2. Este posibil studiul, în planul (α_1,α_2), al punctelor de echilibru ale sistemului (2.23) şi implicit ale sistemului (2.22), în condiţiile Teoremelor 2.2 – 2.4, conform fig. V.2.5.

Teorema 2.1 permite şi clasificarea noţiunii de separatoare introdusă la 2.2.(a3). *Separatoarea* este o traiectorie care intră într-un sau iese dintr-un punct de echilibru şi este tangent la o direcţie radială fixă.

Tangentele la separatoarele părţii liniare în punctul de echilibru sunt de asemenea tangente la separatoarele sistemului neliniar corespunzător.

Exemplul 2.4

Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}, \qquad t \in \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Să se determine separatoarele în portretul de stare al părţii liniare şi apoi în portretul de stare al sistemului.

Punctul de echilibru al sistemului este (0,0). Partea liniară a sistemului este descrisă de ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases}$$

Acesta are valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Punctul de echilibru este de tip şa şi portretul de stare este reprezentat în fig. V.2.6.a. Separatoarele sunt chiar axele proprii ale sistemului (v. paragraful 2.2.(a3)). Ecuaţiile axelor proprii sunt definite de $V^{-1}x = 0$, în care V este matricea modală a matricei părţii liniare. Întrucât

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

rezultă că ecuaţiile separatoarelor sunt $x_1 + x_2 = 0$ (stabilă) şi $x_2 = 0$ (instabilă).

Separatoarele sistemului neliniar sunt, în general, traiectorii curbe. În cazul de faţă dreapta $x_2 = 0$ este de asemenea separatoare instabilă. Cealaltă separatoare, de această dată stabilă, este o curbă tangentă în origine la dreapta $x_1 + x_2 = 0$, şi situată sub ea. Ultimul fapt rezultă din aceea că $dx_2 / dx_1 > -1$ pentru $x_1 < 0$ şi $dx_2 / dx_1 < -1$ pentru $x_1 > 0$. Portretul de stare local al sistemului neliniar, în punctul de echilibru (0,0), este reprezentat în fig. V.2.6.b. □

b3. Sistem nesimplu

Dacă punctul de echilibru $y_1 = 0,\ y_2 = 0$ al sistemului (2.22) este nesimplu atunci partea sa liniară (2.23) are o simplă infinitate de puncte de echilibru situate pe o dreaptă, sau o dublă infinitate de puncte de echilibru situate în tot planul stărilor. În acest caz între portretul de stare al sistemului neliniar şi portretul de stare al părţii sale liniare pot exista diferenţe calitative foarte mari. Ceea ce este caracteristic pentru sistemele cu puncte de echilibru nesimple este faptul că în portretul de stare apar întotdeauna curbe ale punctelor de echilibru nesimple.

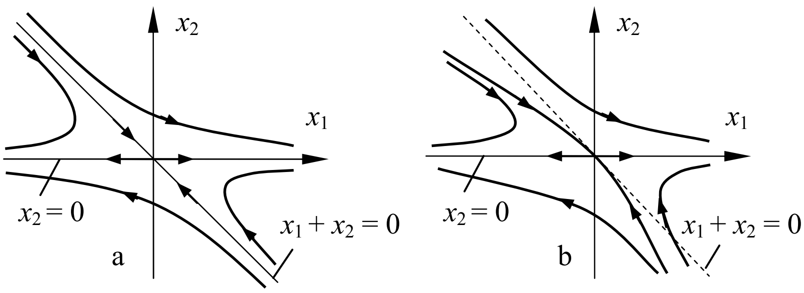

Fig. V.2.6. Portretele de stare la Exemplul 2.4: a – *partea liniară*, b – *sistemul neliniar*

Exemplul 2.5

Să se determine portretul de stare al sistemului:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(x_2 - x_1^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_2 - x_1^2), \quad t \in \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Sistemul are o infinitate de puncte de echilibru situate pe parabola $x_2 = x_1^2$. Se face raportul celor două ecuaţii şi se obţine ecuaţia:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2},\ x_2 \neq x_1^2,\ x_2 \neq 0.$$

Prin integrarea acestei ecuaţii rezultă soluţiile:

$$x_1^2 + x_2^2 = C,\ C = \text{constant},$$

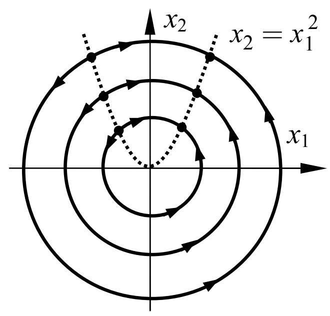

Fig. V.2.7. Portretul de stare la Exemplul 2.5.

care sunt cercuri. Portretul de stare este reprezentat în fig. V.2.7. Sensurile de parcurgere a traiectoriilor se obțin din următoarele: pentru $x_2 > x_1^2$ rezultă $\dot{x}_1 > 0$, în timp ce pentru $x_2 < x_1^2$ şi $x_2 > 0$ rezultă $\dot{x}_1 < 0$; pentru $x_2 < 0$ rezultă $\dot{x}_1 > 0$. Conform portretului de stare, punctele de echilibru de pe arcul de parabolă din dreapta, inclusiv originea, sunt simplu stabile, iar cele din stânga sunt instabile. □

c. Cicluri limită

S-a văzut la 2.2.(b3), fig. V.2.3.f, că portretul de stare poate conține traiectorii curbe închise. Ele corespund unor soluții periodice ale sistemului. În cadrul acestui paragraf se va aborda prin metoda planului stărilor atât existența, cât şi natura soluțiilor periodice ale unui sistem dinamic neliniar de ordinul doi.

Fie C_0 o curbă închisă în $\mathbb{R}^2$. Mulțimea W, de formă inelară, care conține curba C_0 se numeşte *vecinătate inelară* a curbei C_0.

Definiția 2.5

O traiectorie închisă C_0 din portretul de stare se numeşte *ciclu limită* dacă există o vecinătate a ei, W, care nu mai conține alte traiectorii închise. □

În conformitate cu această definiție traiectoriile închise care înconjoară un punct de echilibru de tip centru nu sunt cicluri limită în situația în care oricât de mică ar fi vecinătatea inelară W ea mai conține cel puțin încă o traiectorie închisă (v. fig. V.2.3.f).

Exemplul 2.6

Să se arate că sistemul următor are un ciclu limită.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1\left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2\left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right). \end{cases}$$

Introducând coordonatele polare $x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta$, din ecuațiile sistemului se obțin: $\dot{r} = r(1-r),\ \dot{\theta} = -1$. Evident $r(t) = 1,\ \theta(t) = -t$ este o soluție periodică a sistemului corespunzătoare traiectoriei închise $C_0 : x_1^2 + x_2^2 = 1$. Această traiectorie este un ciclu limită deoarece pentru $0 < r < 1$ rezultă $\dot{r} > 0$, iar pentru $r > 1$ rezultă $\dot{r} < 0$. Urmează că atât traiectoriile din interiorul, cât şi din exteriorul lui C_0 sunt spirale convergente la C_0, fig. V.2.8.a. C_0 este singura traiectorie închisă în planul stărilor. Având în vedere caracterul traiectoriilor din vecinătatea lui C_0 se poate afirma că ciclul limită C_0 este stabil. □

Definiția 2.6

Un ciclu limită C_0 se numeşte *stabil* sau *atractor* dacă traiectoriile din vecinătatea sa, din ambele părți, tind la C_0 pentru $t \to \infty$. Pe C_0 starea realizează *oscilații limită stabile* numite *autooscilații*. □

Definiția 2.7

Un ciclu limită C_0 se numeşte *instabil* sau *repulsor* dacă traiectoriile din vecinătatea sa, din ambele părți, se îndepărtează de C_0 pentru $t \to \infty$. □

Definiția 2.8

Un ciclu limită C_0 se numeşte *semistabil* dacă traiectoriile din vecinătatea sa, pe o parte tind la C_0 şi pe cealaltă parte se îndepărtează de C_0 pentru $t \to \infty$. □

Noțiunile introduse prin Definițiile 2.6 – 2.8 sunt ilustrate în fig. V.2.8.

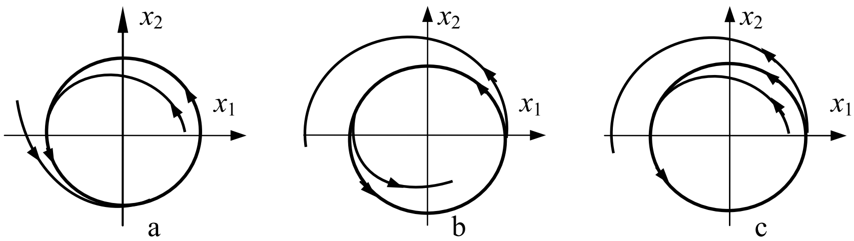

Fig. V.2.8. Cicluri limită: a – *stabil*, b – *instabil*, c – *semistabil*

În cazul existenței unui ciclu limită stabil (instabil) se poate determina o vecinătate W astfel încât toate traiectoriile de stare, cu excepția ciclului limită, intră în (ies din) W pentru $t \to \infty$. Această proprietate, consecință directă a Definițiilor 2.6 şi 2.7, conduce la următorul rezultat.

Teorema 2.5 (Poincaré-Bendixson)

O traiectorie de stare a sistemului (2.2), corespunzătoare unui punct inițial dat, conținută în întregime într-o mulțime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ pentru $t \geq t_0$, tinde pentru $t \to \infty$ fie la un punct de echilibru, fie la un ciclu limită. □

Un rezultat utilizabil frecvent în aplicații este următorul.

Teorema 2.6 (Liénard)

Fie un sistem dinamic descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)x_2 \end{cases} \tag{2.24}$$

şi fie $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(x)dx,\ G(x_1) = \int_0^{x_1} g(x)dx$. Dacă au loc condițiile: (*i*) $f(x_1)$ este funcție pară, cu $F(x_1) < 0$ pentru $x_1 \in (0, a)$ şi $g(x_1)$ este funcție impară cu $x_1 g(x_1) > 0$ pentru $x_1 \neq 0$; (*ii*) $|F(x_1)| \to \infty$ pentru $|x_1| \to \infty$ şi $G(x_1) \to \infty$ pentru $x_1 \to \infty$; (*iii*) $F(x_1)$ are numai zerourile $x_1 = 0$ şi $x_1 = a > 0$ şi este monoton crescătoare pentru $x_1 > a$, atunci sistemul considerat admite exact un ciclu limită stabil în interiorul căruia se află originea care este focar instabil. □

Exemplul 2.7 (oscilator electronic RC)

Se consideră un amplificator electronic cu reacție RC, fig. V.2.9. Amplificatorul este afectat de saturație care este satisfăcător descrisă de:

$$u_e = k_1 u_i - k_3 u_i^3 ,\quad k_1, k_3 \text{ sunt constante.} \tag{a}$$

Amplificatorul are rezistența de intrare $R_i = +\infty$ şi rezistența de ieşire $R_e = 0$. Să se determine condițiile în care sistemul generează autooscilații.

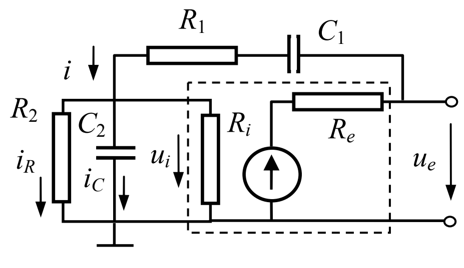

Fig. V.2.9. Oscilator electronic RC

Conform fig. V.2.9 au loc:

$$u_e = (1/C_1)\int_0^t i dt + R_1 i + R_2 i_R , \tag{b}$$

$$u_i = R_2 i_R = (1/C_2)\int_0^t i_C\, dt , \tag{c}$$

$$i = i_R + i_C . \tag{d}$$

Introducând notația $u_i = x$ şi eliminând u_e, i, i_R şi i_C între ecuațiile (a) – (d) se obține *ecuația Van der Pol*:

$$\ddot{x} + (2\zeta\omega_n + \alpha x^2)\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 , \tag{e}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}, \zeta = \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1 - k_1R_2C_1}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}, \ \alpha = \frac{3k_3}{R_1C_2}. \quad \text{(f)}$$

Ecuația (e), cu $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, este echivalentă cu (2.24) în care:

(*i*) $f(x_1) = 2\zeta\omega_n + \alpha x_1^2$, $F(x_1) = 2\zeta\omega_n x_1 + \alpha x_1^2/3$,

$F(x_1) < 0$, pentru $\zeta < 0$, $0 < x_1 < a = \sqrt{6|\zeta|\omega_n/\alpha}$;

$g(x_1) = \omega_n^2 x_1$; $x_1 g(x_1) > 0$ pentru $x_1 \neq 0$.

(*ii*) $|F(x_1)| \to \infty$ şi $G(x) = \omega_n^2 x_1^2/2 \to \infty$ pentru $|x_1| \to \infty$.

(*iii*) $F(a) = 0$ şi $F'(x_1) > 0$ pentru $x_1 > a$.

Conform Teoremei 2.6, pentru $\zeta < 0$, există *autooscilații* (un ciclu limită stabil). Conform celei de a doua relații din (f), condiția $\zeta < 0$ este echivalentă cu:

$k_1 > k_{10} \triangleq 1 + R_1/R_2 + C_2/C_1$. □

La fel de util este şi următorul rezultat de non-existență a ciclurilor limită.

Teorema 2.7 (Bendixson)

Fie D o regiune simplu conexă din $\mathbb{R}^2$ în care pentru sistemul (2.2) are loc:

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \text{semn constant.} \qquad (2.25)$$

Atunci sistemul nu are nici o traiectorie închisă complet conținută în D.

$\mathscr{D}$. Pentru $P(x_1,x_2)$, $Q(x_1,x_2)$, cu derivate parțiale continue în D, simplu conexă, mărginită de o curbă C_0 simplu închisă, folosind *formula Stokes*, se scrie:

$$\oint_{C_0} Pdx_1 + Qdx_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \qquad (2.26)$$

Se admite prin absurd că C_0 este un ciclu limită. Pentru orice $(x_1,x_2) \in C_0$ are loc $f_1(x_1,x_2)dx_2 - f_2(x_1,x_2)dx_1 = 0$. Din (2.26) cu $P = -f_2$, $Q = f_1$ rezultă:

$$\oint_{C_0} \underbrace{f_1 dx_2 - f_2 dx_1}_{=0} = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0\,,$$

ceea ce este în contradicție cu (2.25). Urmează că teorema este adevărată. □

Exemplul 2.8

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - a x_1^2 - b x_2^2). \end{cases}$$

Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să nu existe nici un ciclu limită în $\mathbb{R}^2$ şi să se afle natura punctului de echilibru.

Conform relației (2.25) trebuie să aibă loc $1 - a x_1^2 - 3b x_2^2$ = semn constant pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se observă că pentru $a < 0$, $b < 0$ condiția (2.25) este satisfăcută. Conform Teoremei 2.7, nu există nici un ciclu limită în $\mathbb{R}^2$.

Sistemul are punctul de echilibru unic $x_1 = x_2 = 0$. Partea liniară

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + y_2, \end{cases}$$

are polinomul caracteristic $\Delta(s) = s^2 - s + 1$, cu $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$ şi discriminantul $\delta = -3 < 0$. Conform fig. V.2.5, $x_1 = x_2 = 0$ este focar repulsor. Deoarece nu există cicluri limită, punctul de echilibru, unic, este global instabil. □

d. Cazul neliniarității de tip releu

Releul este o soluție simplă de automatizare. Se ilustrează mai jos aplicarea metodei planului stărilor pentru un sistem automat cu regulator de tip releu.

Exemplul 2.9 (sistem automat de poziționare cu regulator de tip releu)

Se consideră sistemul automat cu schema din fig. V.2.10, în care regulatorul (neliniar) este de tip releu bipozițional ideal. Cu notațiile din figură se poate scrie:

$$X(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} U(s), \quad u = -b\,\mathrm{sgn}\, x, \quad \mathrm{sgn}\, x \triangleq \begin{cases} -1, & x > 0, \\ +1, & x < 0, \end{cases}$$

în care sgn este *funcţia signum*. În domeniul timpului se obţine ecuaţia diferenţială:

$$T\ddot{x}+\dot{x}=-kb\,\mathrm{sgn}\,x.$$

Introducând noile variabile $x=x_1$, $\dot{x}=x_2$, din ultima ecuaţie se obţin:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-(kb\,\mathrm{sgn}\,x_1+x_2)/T,\end{cases}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{kb\,\mathrm{sgn}\,x_1+x_2}{Tx_2}.$$

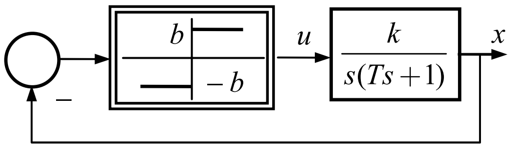

Fig. V.2.10. Sistem automat de poziţionare cu regulator de tip releu

Prin operaţii elementare ultima ecuaţie se aduce la forma:

$$dx_1=-Tdx_2+Tkb\frac{dx_2}{x_2+kb\,\mathrm{sgn}\,x_1}\mathrm{sgn}\,x_1.$$

Prin integrare, pentru $x_1<0$ se obţine:

$$x_1=-Tx_2-Tkb\ln(-x_2+kb)+C_1,\ x_2<kb, \qquad (\mathrm{F}_-)$$

şi, procedând asemănător, pentru $x_1>0$ rezultă:

$$x_1=-Tx_2+Tkb\ln(x_2+kb)+C_2,\ x_2>-kb. \qquad (\mathrm{F}_+)$$

Releul comută atunci când x_1 schimbă de semn. Rezultă că pentru $x_1<0$ starea evoluează pe o traiectorie din familia (F_-), iar pentru $x_1>0$ pe o traiectorie din familia (F_+). Urmează că planul stărilor este format prin alipirea semiplanelor $x_1<0$ şi $x_1>0$, fiecare cu familia sa de traiectorii. Axa $x_1=0$ este *dreapta de comutare*. Pe ea se trece de pe traiectoriile (F_-) pe traiectoriile (F_+) şi viceversa, în mod succesiv atunci când releul comută, fig. V.2.11.a. Sensul este indicat de săgeţi: x_1 este descrescător pentru $\dot{x}_1=x_2<0$ şi x_1 este crescător pentru $\dot{x}_1=x_2>0$. Se poate demonstra că (F_-) şi (F_+) au proprietatea că şirul OA, OB, OC, OD, OE,.... (fig. V.2.11.a) este monoton descrescător. Rezultă că orice traiectorie iniţiată în domeniul $|x_2|<kb$ converge spre origine. Dacă se defineşte şi $\mathrm{sgn}\,0=0$, atunci originea este punctul de echilibru care este un focar atractor (stabil).

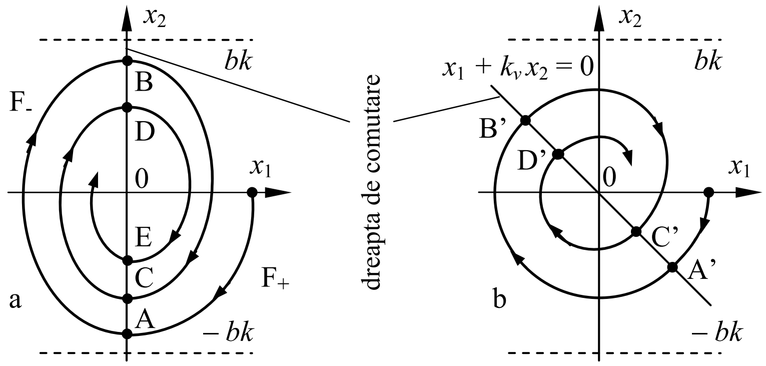

Fig.VI.2.11. Portretul de stare la Exemplul 2.9; a – *cu dreapta de comutare* $x_1 = 0$;
b – Reducerea oscilațiilor prin rotirea în sens antiorar a dreptei de comutare

Evoluției stării către origine este nesatisfăcătoare calitativ deoarece numărul de oscilații este prea mare. Reducerea acestui număr se realizează prin rotirea în sens pozitiv (antiorar) a dreptei de comutare. Se poate arăta că, în acest fel, şirul OA', OB', OC', OD',..... (fig. V.2.11.b) converge mai repede la zero.

Fie ecuația noii drepte de comutare

$x_1 + k_v x_2 = 0$ sau echivalent $x + k_v \dot{x} = 0$,

în care $k_v > 0$ este o constantă adecvat aleasă. Pentru realizarea efectivă a comutării pe această dreaptă, sistemul trebuie să fie guvernat de ecuația diferențială:

$$T\ddot{x} + \dot{x} = -kb\,\mathrm{sgn}(x + k_v \dot{x}).$$

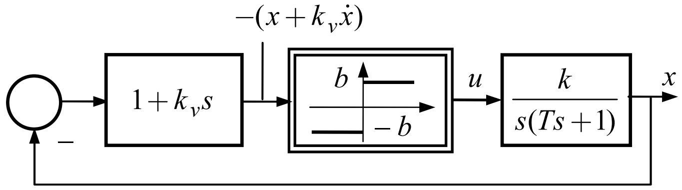

Fig. V.2.12. Servosistem cu regulator PD şi de tip releu

Aceasta înseamnă că pe calea directă a sistemului, înainte de releu, trebuie să se introducă un regulator PD cu funcția de transfer $G_c(s) = 1 + k_v s$, fig. V.2.12. □

3. Metoda directă Liapunov

3.1. Funcții Liapunov

În cadrul acestui subcapitol se au în vedere sisteme dinamice de forma (1.1) cu condiția inițială (1.2) şi punctul de echilibru $x=0$ conform Definiției 1.1.

În esență metoda directă Liapunov, [167], se bazează pe generalizarea noțiunii de energie pornind de la observația că o stare de echilibru (asimptotic) stabilă corespunde unui minim energetic local.

Se asociază sistemului (1.1) o funcție scalară $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1° Derivatele $\partial V/\partial x_i,\ i=\overline{1,n}$, unde x_i sunt componentele vectorului x, există şi sunt continue pentru $\|x\| \le K,\ K>0$.

2° $V(x)$ este *pozitiv definită*: $V(0)=0$ şi $V(x)>0$, $\|x\| \le K$, $x \ne 0$.

3° $\dot{V}(x)$ este *negativ semidefinită*: $\dot{V}(0)=0$ şi $\dot{V}(x) \le 0$, $\|x\| \le K$, $x \ne 0$.

Proprietatea 3° se poate înlocui cu următoarea, mai tare.

4° $\dot{V}(x)$ este *negativ definită*: $\dot{V}(0)=0$ şi $\dot{V}(x)<0$, $\|x\| \le K$, $x \ne 0$.

Prin $\dot{V}(x)$ se înțelege derivata temporală în virtutea sistemului (1.1):

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n=\left[\text{grad}_x V(x)\right]^T \dot{x}=\left[\text{grad}_x V(x)\right]^T f(x), \quad (3.1)$$

în care

$$\text{grad}_x V(x) \triangleq \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]^T \quad (3.2)$$

este *vectorul gradient* al funcției scalare $V(x)$ (derivata lui V în raport x).

Definiția 3.1

O funcție $V(x)$ care satisface 1° – 3° se numeşte *funcție Liapunov slabă*. □

Definiția 3.2

O funcție $V(x)$ care satisface 1°, 2°, 4° se numeşte *funcție Liapunov tare*. □

3.2. Caracterizări

a. Condiții de stabilitate şi de stabilitate asimptotică

Teorema 3.1 (Liapunov)

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este stabil dacă există o funcție Liapunov slabă.

$\mathscr{D}$. Se presupune prin absurd că, deşi există o funcție Liapunov slabă, punctul de echilibru $x = 0$ nu este stabil. Cu alte cuvinte, pentru $\| x_0 \| < \delta$ există un $t_1 > t_0$ astfel încât $\| x(t_1) \| \geq \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$ dat.

În virtutea ipotezelor 1° – 3° există o funcție $\varphi(r)$ ($r \triangleq (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ este lungimea razei vectoare în $\mathbb{R}^n$) cu următoarele proprietăți: (a) $\varphi(0) = 0$ şi (b) $0 \leq r_1 < r_2 \leq K$ implică $\varphi(r_1) < \varphi(r_2)$, dar astfel încât

$$V(x) \geq \varphi(\| x \|) . \tag{3.3}$$

Fie x_0 astfel ales încât să aibă loc simultan

$$\|x_0\| < \delta = \varepsilon,\ V(x_0) < \varphi(\varepsilon) . \tag{3.4}$$

Acest lucru este posibil pentru x_0 suficient de apropiat de origine deoarece $\varphi(\varepsilon) > 0,\ V(0) = 0$ şi $V(x)$ este continuă. Întrucât $\dot{V} \leq 0$, urmează că $V(x(t_1)) \leq V(x_0)$ pentru $t_1 > t_0$. Ținând seama de (3.4) se obține:

$$V(x(t_1)) < \varphi(\varepsilon) . \tag{3.5}$$

Dar pentru $t_1 > t_0$ are loc $\| x(t_1) \| \geq \varepsilon$ şi din (3.4) rezultă $V(x(t_1)) \geq$ $\geq \varphi(\| x(t_1) \|) \geq \varphi(\varepsilon)$ ceea ce contrazice (3.5). □

Teorema 3.2 (Liapunov)

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este asimptotic stabil dacă există o funcție Liapunov tare.

$\mathscr{D}$. $x = 0$ este stabil (v. Teoremei 3.1). Se arată că dacă are loc proprietatea 4° (v. Definiția 3.2) atunci $\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$ pentru orice x_0 cu $\|x_0\| < \delta$.

Se presupune prin absurd că $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|\neq 0$ deşi $\dot{V}(x)$ este negativ definită. Cu alte cuvinte, există un $\varepsilon_1\in(0,\,\varepsilon)$ (ε din Definiţia III.1.2) astfel încât

$$\|x(t)\|>\varepsilon_1,\ t>t_1>t_0\,. \tag{3.6}$$

Întrucât $-\dot{V}(x)$ este pozitiv definită, există o funcţie $\psi(r)$ cu proprietăţile: (a) $\psi(0)=0$ şi (b) $0\le r_1<r_2\le K$ implică $\psi(r_1)<\psi(r_2)$, dar astfel încât

$$\dot{V}(x)\le-\psi(\|x\|)\,. \tag{3.7}$$

Cu (3.6) şi cu $-\psi(r)$ strict descrescătoare, din (3.7) rezultă că

$$\dot{V}(x(t))\le-\psi(\varepsilon_1),\ t>t_1\,. \tag{3.8}$$

Se integrează (3.8) pe $[t_1,t]$. Rezultă $V(x(t))<V(x(t_1))-\psi(\varepsilon_1)(t-t_1)$, $t>t_1$. Urmează că pentru $t>t_1+V(x(t_1))/\psi(\varepsilon_1)$ are loc $V(x(t))<0$, ceea ce contrazice faptul că $V(x)$ este pozitiv definită. Conform ipotezelor 2° şi 4°, $V(x(t))$ este pozitivă şi descrescătoare, astfel că pentru $t\to\infty$ ea are o limită nenegativă. În consecinţă, $\lim_{t\to\infty}\dot{V}(x(t))=0$, dar întrucât $\dot{V}(x)$ este negativ definită, aceasta are loc numai dacă $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$. □

O interpretare geometrică în planul stărilor ($n=2$, $x=[x_1\,x_2]^T$) a Teoremei 3.2 se prezintă în fig.V.3.1.

Conform Teoremei 3.2 are loc

$$V(x_1,x_2)>0, \dot{V}(x_1,x_2)<0$$

pentru $x\neq 0$, $\|x\|\le K$ şi

$$V(0,0)=0,\ \dot{V}(0,0)=0\,.$$

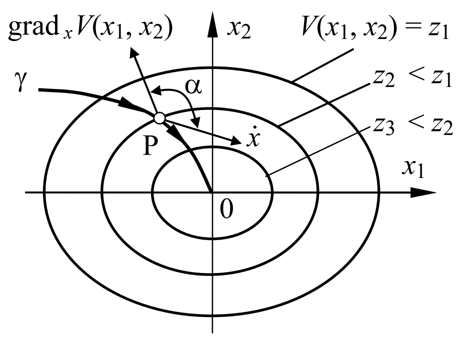

Fig. V.3.1. Interpretarea geometrică a Teoremei 3.2

În consecinţă funcţia $z=V(x_1,x_2)$ poate fi reprezentată în planul stărilor prin curbe de nivel $z=$constant, fig. V.3.1, care au dimensiuni din ce în ce mai reduse pe măsură ce z scade. Fie γ o traiectorie de stare oarecare din vecinătatea originii. Pentru un punct P de intersecție cu o curbă de nivel constant are loc $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$. Această condiție, conform relației (3.1) în care se explicitează produsul scalar, conduce la

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \left(\text{grad}_x V(x)\right)^T \dot{x} =$$

$$= \left[(\partial V / \partial x_1)^2 + (\partial V / \partial x_2)^2\right]^{1/2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)^{1/2} \cos\alpha < 0, \quad (3.9)$$

unde α este unghiul dintre vectorul gradient (normal la curba de nivel constant în P), și viteza $\dot{x}$ a stării în P de pe traiectoria γ. (3.9) implică $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Adică vectorul $\dot{x}$ este permanent orientat spre interiorul oricărei curbe de nivel constant. Urmează că, pentru $t \to \infty$, traiectoria γ converge spre originea planului de stare. Aceasta implică faptul că originea este punct de echilibru asimptotic stabil.

Pentru cazurile în care $V(x)$ este funcție Liapunov slabă, dar $V(x) = 0$ numai pe traiectorii banale din $\|x\| \leq K$ (cum ar fi puncte de echilibru izolate sau unele axe ale spațiului stărilor), este util următorul rezultat.

Teorema 3.3 (Barbașin – Krasovski)

Dacă există o funcție Liapunov slabă dar astfel încât $V(x)$ nu este identic nulă pe orice traiectorie nebanală a sistemului (3.1), atunci punctul de echilibru $x = 0$ este asimptotic stabil. □

Metoda directă Liapunov produce în principiu numai condiții suficiente de stabilitate sau stabilitate asimptotică pentru regiuni definite prin $\|x\| \leq K$. În aceste circumstanțe se spune că Teoremele 3.1 – 3.3 sunt rezultate de *stabilitate* (*asimptotică*) *în mic*.

Desigur că din punct de vedere practic este de dorit ca starea de echilibru să fie global asimptotic stabilă. Pentru aceasta trebuie să fie satisfăcută o condiție suplimentară, după cum rezultă din afirmația următoare.

Teorema 3.4

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.1) este global asimptotic stabil dacă el este asimptotic stabil și dacă există o funcție Liapunov cu proprietatea:

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty . \ \square \qquad (3.10)$$

Exemplul 3.1

Se consideră sistemul

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2x_2 - x_2^3.\end{cases}$$

Folosind funcția pozitiv definită și derivabilă $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$ să se studieze natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Punctul de echilibru este unic. Se arată că $V(x)$ este o funcție Liapunov tare. Se calculează derivata funcției $V(x)$ pentru sistemul dat. Se obține:

$$\dot{V}(x_1,x_2) = (2x_1 + 2x_1x_2^2)\dot{x}_1 + (2x_1^2x_2 + 4x_2^3)\dot{x}_2 = -2x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^4 - 4x_2^6,$$

care este negativ definită. În plus $V(x_1,x_2)$ satisface și condiția (3.10). Așadar punctul de echilibru considerat este global asimptotic stabil. □

b. Condiții de instabilitate

În lipsa unor condiții necesare și suficiente de stabilitate (asimptotică) sunt deosebit de utile în aplicații și rezultate de instabilitate, [5], [167].

Teorema 3.5 (Liapunov)

Fie o funcție $V(x)$ cu $V(0) = 0$ și cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue. Dacă există o vecinătate care conține originea, în care $V(x)$ este pozitiv definită și $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (1.1)) este pozitiv definită, atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este instabil. □

Teorema 3.6 (Cetaev)

Fie o funcție $V(x)$ cu $V(0) = 0$ și cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue. Dacă $V(x) = 0$ pe frontiera unei regiuni X_0 care are originea ca punct de frontieră și dacă $V(x)$ și $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (1.1)) sunt ambele pozitiv definite în X_0 atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este instabil. □

Teorema 3.7

A. Fie o funcție $V(x)$ cu $V(0) = 0$ și cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue. Dacă există o vecinătate care conține originea în care $V(x) < 0$ în unele puncte şi dacă $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (1.1)) este negativ semidefinită, atunci punctul de echilibru $x=0$ al sistemului (1.1) este asimptotic stabil.

B. Dacă $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (1.1)) este negativ definită, atunci punctul de echilibru $x=0$ al sistemului (1.1) este instabil.

C. Dacă $V(x)$ şi $\dot{V}(x)$ (pentru sistemul (1.1)) sunt ambele negativ definite, atunci punctul de echilibru $x=0$ al sistemului (1.1) este complet instabil. □

Exemplul 3.2

Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1x_2. \end{cases}$$

Folosind funcţia $V(x_1,x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^2$, să se studieze natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Punctul de echilibru este unic. Există puncte în vecinătatea originii, de pildă $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}5$, pentru care $V(x_1,x_2) < 0$. În plus, pentru orice $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, $\dot{V}(x_1,x_2) = (3x_2^2 - 3x_1^2)\dot{x}_1 + 6x_1x_2\dot{x}_2 = -3(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0$. Conform Teoremei 3.7.B punctul de echilibru considerat este (global) instabil. □

c. Utilizarea aproximantului liniar

Fie un sistem dinamic neliniar de forma:

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.11}$$

în care A este o matrice pătratică de ordinul n, termenul Ax este partea liniara a sistemului şi $g(x)$, cu $g(0) = 0$, este o funcţie vectorială neliniară a cărei dezvoltare în serie Taylor conţine numai termeni de grad mai mare sau egal cu doi.

Sistemul (3.11) are punctul de echilibru $x = 0$.

Se asociază sistemului (3.11) *aproximantul liniar*:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

Prin Teorema III.1.4 s-a arătat că sistemul (3.12) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă *ecuaţia Liapunov*:

$$A^T P + PA = -Q^T Q \tag{3.13}$$

are o soluție P, matrice reală, simetrică şi pozitiv definită (v. Anexa C) pentru orice Q astfel ales încât perechea (Q, A) este complet observabilă. Utilizând acest rezultat, pentru sistemul (3.11) se pot formula următoarele teoreme.

Teorema 3.8

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.11) este asimptotic stabil dacă el este asimptotic stabil pentru aproximantul liniar (3.12).

D. Fie funcția pozitiv definită şi derivabilă:

$$V(x) = x^T P x, \tag{3.14}$$

în care P este soluția pozitiv definită a ecuației (3.13). Derivând în raport cu timpul în (3.14) se obține:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x + 2 g^T(x) P x = -x^T Q^T Q x + 2 g^T(x) P x .$$

Întrucât $g(x)$ conține termeni de grad mai mare sau egal cu doi rezultă că termenul $g^T(x) P x$ conține termeni de grad mai mare sau egal cu trei. Urmează că, pentru x suficient de apropiat de origine, $\dot{V}(x) < 0$, adică $V(x)$ este o funcție Liapunov tare. Conform Teoremei 3.2, starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (3.11) este asimptotic stabilă. □

În situația în care (3.12) este instabil se demonstrează următoarea afirmație.

Teorema 3.9

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (3.11) este instabil dacă el este instabil pentru aproximantul liniar (3.12). □

3.3. Existența şi construcția unei funcții Liapunov

Pentru aplicarea Teoremelor 3.1 şi 3.2 trebuie să se răspundă mai întâi la următoarele două întrebări:

(1) În ce condiții există o funcție Liapunov?

(2) Dacă există o funcție Liapunov, cum poate fi ea determinată?

Un răspuns la prima întrebare, a cărui demonstrație este dată în [160], este următorul.

Teorema 3.10

Dacă punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este asimptotic stabil, funcția $f(x)$ este derivabilă şi *matricea jacobiană*

$$J(x) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

este continuă într-un domeniu $X_V \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci există pe X_V o funcție Liapunov tare pentru sistemul (1.1). □

În legătură cu cea de a doua întrebare se vor prezenta în continuare câteva metode de construcție a unei funcții Liapunov.

a. Metoda Krasovski

Fie B o matrice simetrică pozitiv definită (v. Anexa C), cu elemente reale constante. Cu B şi $J(x)$ (v. relația (3.15)) se construieşte matricea simetrică:

$$M(x) \triangleq [J^T(x)B + BJ(x)]/2, \quad x \in X_V, \tag{3.16}$$

a cărei cea mai mare valoare proprie este $\mu(x)$.

Teorema 3.11

Dacă există o matrice B astfel încât $\mu(x) < -c,\ c > 0$, pentru orice $x \in X_V$, atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) este asimptotic stabil. Dacă $\mu(x) < -c$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, atunci $x = 0$ este global asimptotic stabil.

$\mathscr{D}$. Părțile reale ale valorilor proprii ale matricei $BJ(x)$ sunt cuprinse între valorile proprii cea mai mică şi cea mai mare ale matricei $M(x)$, respectiv sunt mai mici decât $-c$. Urmează că pentru $x \in X_V$ are loc $|\det BJ(x)| \geq c^n$, ceea ce înseamnă că funcția $w(x) = |\det J(x)|$ are un minimum pozitiv α pe X_V. Funcția

$$V(x) = f^T(x)Bf(x) \tag{3.17}$$

este pozitiv definită şi

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T J^T(x)Bf(x) + f^T(x)BJ(x)\dot{x} = 2f^T(x)M(x)f(x)$$

este negativ definită. Ca urmare, $x=0$ este asimptotic stabil. Pentru a arăta că are loc şi (3.10), se porneşte de la $df = w(x)dx \geq \alpha\, dx$ care prin integrare conduce la:

$$\int df \geq \alpha \int dx .$$

Aşadar, pentru $f \triangleq (f_i)$ şi $\|x\| \to \infty$ cel puțin un $f_i(x)$ creşte nemărginit. Are loc (3.10), respectiv punctul de echilibru $x=0$ este global asimptotic stabil. □

Exemplul 3.3

Se consideră sistemul descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2), \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0. \end{cases}$$

Să se determine φ_1 şi φ_2 pentru care punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$ este asimptotic stabil.

Înlocuind $B = I$ în (3.16) se obține:

$$M(x) = \begin{bmatrix} -1 & [1-\varphi_1(x_1)]/2 \\ [1-\varphi_1(x_1)]/2 & -\varphi_2(x_2) \end{bmatrix}.$$

$M(x)$ este negativ definită (v. Anexa C) dacă şi numai dacă:

$$\varphi_2(x_2) > [1-\varphi_1(x)]^2/4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Aceasta este o condiție suficientă de stabilitate asimptotică. Ea poate fi sensibil îmbunătățită prin căutarea unei matrice B adecvate. □

b. Metoda Ingwerson

Folosind jacobianul (3.15) al sistemului (1.1) se parcurg următorii cinci paşi.

(1) Se rezolvă ecuația matriceală de tip Liapunov:

$$J^T(x)P(x) + P(x)J(x) = -R, \tag{3.18}$$

unde R este matrice reală, constantă, simetrică, pozitiv (semi)definită (v. Anexa C).

(2) Cu matricea simetrică $P(x) \triangleq \left(p_{ij}(x)\right)$ astfel obținută se determină matricea simetrică $\overline{P}(x) \triangleq \left(\overline{p}_{ij}(x_i, x_j)\right)$ după cum urmează:

$$\overline{p}_{ij}(x_i, x_j) = \overline{p}_{ji}(x_i, x_j) = p_{ij}(0,...,0,\ x_i, 0,...,0,\ x_j, 0,...,0),\ i, j = \overline{1,n}\,. \tag{3.19}$$

(3) Se formează componentele vectorului $\operatorname{grad} V(x)$ (încă necunoscute):

$$g_i(x) = \left[\operatorname{grad}_x V(x)\right]_i \triangleq \sum_{j=1}^{n} \int_0^{x_j} \overline{p}_{ij}(x_i, x_j)dx_j,\ i = \overline{1,n}, \tag{3.20}$$

în care $[\cdot]_i$ este componenta i a vectorului $[\cdot]$.

Se ştie că un vector este gradientul unei funcţii scalare dacă şi numai dacă:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i},\ i, j = \overline{1,n},\ i \neq j\,. \tag{3.21}$$

Înlocuind (3.20) în (3.21), cu (3.19), se constată că (3.21) este satisfăcută.

(4) Se determină $V(x)$ integrând $[\operatorname{grad} V(x)]^T dx$ pe o curbă din $\mathbb{R}^n$. În acest caz rezultatul nu depinde de curba aleasă. Soluţia cea mai simplă este:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(x_1, 0,...,0)dx_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, x_2, 0,...,0)dx_2 + ...$$

$$... + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2,..., x_n)dx_n\,. \tag{3.22}$$

(5) Se aplică, după caz, Teoremele 3.1 – 3.7.

Exemplul 3.4

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - x_1^2 - bx_2, \quad a > 0,\ b > 0. \end{cases}$$

Să se construiască o funcţie Liapunov şi să se determine natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Ecuaţia (3.18) are în acest caz forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2x_1 - a \\ 1 & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 - a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix},$$

în care R s-a ales pozitiv semidefinită (v. Anexa C). Soluţia corespunzătoare este:

$$P(x) = \overline{P}(x) = \operatorname{diag}\{2x_1,\ 1\}\,.$$

Conform relației (3.20) componentele vectorului gradient sunt:

$$g_1 = \int_0^{x_1} (2x_1 + a)dx_1 = x_1^2 + a x_1 \,, \quad g_2 = \int_0^{x_2} dx_2 = x_2 \,.$$

Pentru acestea, condiția (3.21) este satisfăcută. În continuare, cu (3.22), se obține:

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_1^2 + a x_1)dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = x_1^3/3 + a x_1^2/2 + x_2^2/2 \,,$$

care este pozitiv definită într-o regiune suficient de mică care conține originea.

Întrucât

$$\dot{V}(x_1, x_2) = g_1\dot{x}_1 + g_2\dot{x}_2 = -bx_2^2$$

este negativ semidefinită, dar $x_2 = 0$ nu este una din traiectoriile sistemului, conform Teoremei 3.3, punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$ este asimptotic stabil. □

c. Metoda Schultz – Gibson

Conform Definițiilor 3.1 sau 3.2, $\dot{V}(x)$ de forma (3.2) trebuie să fie negativ (semi)definită. În aceste circumstanțe se definește gradientul:

$$\text{grad } V(x) \triangleq \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \qquad (3.23)$$

în care a_{ij} sunt funcții de $x_1, \ldots, x_n$. Aceşti a_{ij} urmează să se aleagă astfel încât:

(i) $\dot{V}(x)$ să fie negativ (semi)definită.

(ii) $V(x)$ să fie gradientul unei funcții scalare, fapt echivalent cu (3.21).

(iii) a_{ij}, respectiv g_i fiind cunoscute, $V(x)$ se determină cu (3.22).

Exemplul 3.5

Se consideră un reactor atomic descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2/\tau \\ \dot{x}_2 = (e^{x_1} - 1)/\varepsilon, \end{cases}$$

unde $P(t) = e^{x_1(t)}$ este puterea instantanee, x_2 – temperatura, $\alpha > 0$ – coeficientul de temperatura, $\varepsilon > 0$ – capacitatea calorică, şi $\tau > 0$ – viaţa medie a unui neutron.

Să se determine natura punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Pentru $g_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ şi $g_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ se scrie:

$$\dot{V}(x) = -\alpha a_{11}x_1x_2/\tau - \alpha a_{12}x_2^2/\tau + a_{21}(e^{x_1} - 1)x_1/\varepsilon + a_{22}(e^{x_1} - 1)x_2/\varepsilon .$$

Cu $a_{11} = \tau(e^{x_1} - 1)/(\varepsilon\alpha x_1), a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$ rezultă $g_1 = \tau(e^{x_1} - 1)/(\varepsilon\alpha)$, $g_2 = x_2$, $(\partial g_1/\partial x_2) = (\partial g_2/\partial x_1) = 0$. Urmează $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Folosind acum (3.22) se obţine:

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \tau(e^{x_1} - 1)/(\varepsilon\alpha)dx_2 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \tau(e^{x_1} - x_1 - 1)/(\varepsilon\alpha) + x_2^2/2 ,$$

care este pozitiv definită. Conform Teoremei 3.1 starea de echilibru este stabilă. □

3.4. Domenii de stabilitate

a. Preliminarii

Definiţia 3.3

Sistemul (1.1), cu $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ continuă, are una din proprietăţile A sau B:

A. Netezime slabă

(a1) Există o vecinătate deschisă $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a punctului $x = 0$, astfel încât:

(*i*) sistemul (1.1), cu $x(0) = x_0 \in S$, are soluţie unică $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$;

(*ii*) soluţia $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$ este continuă în $(t; x_0) \in I_0 \times S$, unde $I_0 \subseteq \mathbb{R}_+$ este subintervalul maxim de existenţă a soluţiei.

(a2) Pentru fiecare $x(0) = x_0 \in (\mathbb{R}^n \setminus S)$, fiecare soluţie $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$ a sistemului (1.1) este continuă în $t \in I_0$.

B. Netezime tare

(b1) Sistemul (1.1) are proprietatea de netezime slabă.

(b2) Dacă vecinătatea deschisă S este mărginită (frontiera ∂S este nevidă), atunci pentru fiecare $x_0 \in \partial S$ şi pentru fiecare soluţie $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$ a sistemului (1.1) inițiată în $x(0) = x_0$ are loc:

$\inf_{t \in I_0} \| x(t) \| = \inf_{t \in I_0} \| \varphi(t; 0, x_0) \| > 0$. □

Definiția 3.4

$D_a \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *domeniu de atracție* al punctului de echilibru $x = 0$ (punct numit *atractor*) al sistemului (1.1) dacă:

(a) Pentru fiecare $\xi > 0$ există un moment $T = T(x_0, \xi) \in [0, +\infty)$ astfel încât soluția $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$ satisface condiția:

$\|x(t)\| = \| \varphi(t; 0, x_0) \| < \xi,\ x_0 \in D_a$ pentru orice $t \in (T, +\infty)$.

(b) Mulțimea D_a este vecinătate a punctului $x = 0$. □

Definiția 3.5

$D_s \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *domeniu de stabilitate* al punctului de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) dacă:

(a) Pentru fiecare $\varepsilon \in (0, +\infty)$ soluția $x(t) = \varphi(t; 0, x_0)$ satisface condiția:

$\|x(t)\| = \| \varphi(t; 0, x_0) \| < \varepsilon,\ x_0 \in D_s(\varepsilon)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Mulțimea $D_s(\varepsilon)$ este o vecinătate a punctului de echilibru $x = 0$ pentru fiecare $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

(a) $D_s = \cup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} D_s(\varepsilon)$. □

Definiția 3.6

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *domeniu de stabilitate asimptotică* al punctului de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1) dacă:

(a) $D = D_a \cap D_s$.

(b) D este o vecinătate a punctului $x = 0$. □

Observația 3.1

$D_a = \varnothing$ înseamnă că punctul de echilibru $x = 0$ nu este punct atractor.

$D_a = \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $x = 0$ este punct *atractor global*.

$D_S = \varnothing$ înseamnă că punctul de echilibru $x = 0$ este *instabil*.

$D_S = \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $x = 0$ este *global stabil*.

$D = \varnothing$ înseamnă că punctul de echilibru $x = 0$ *nu este asimptotic stabil*.

$D = \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $x = 0$ este *global asimptotic stabil*. □

Relațiile între noțiunile definite prin Definițiile 3.4 – 3.6 sunt clarificate în cadrul rezultatului următor.

Teorema 3.12

Dacă punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.1), având proprietatea de netezime slabă (v. Definiția 3.3.A), are domeniul de stabilitate asimptotică $D \neq \varnothing$ şi domeniul de atracție satisface $D_a \subseteq S$, atunci D_a, D_S şi D sunt în relațiile:

$$D_a \subseteq D_S,\ D = D_a .$$

$\mathscr{D}$. Fie $x_0 \in D_a$. $D_a \subseteq S$ implică $x_0 \in S$. $D \neq \varnothing$ şi $D = D_a \bigcap D_S$ implică $D_S \neq \varnothing$. Totodată, $\max_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\| = \max_{t \in \mathbb{R}_+} \|\varphi(t; 0, x_0)\| = \varepsilon \in (0, +\infty)$, adică $x_0 \in D_S(\varepsilon) \Rightarrow x_0 \in D_S$ şi $D_a \subseteq D_S$. Cum $D = D_a \bigcap D_S$, urmează $D = D_a$. □

b. Metoda Zubov

Se va arăta mai întâi că se pot determina subdomenii ale domeniului de stabilitate asimptotică prin utilizarea unor funcții Liapunov adecvate.

În cazul sistemului (1.1), cu punctul de echilibru $x = 0$, fie $V(x)$ o funcție pozitiv definită într-o regiune $X \subset \mathbb{R}^n$ şi fie Σ o hipersuprafață închisă, conținută în întregime în X, cu următoarele proprietăți:

(1) Originea este în interiorul lui Σ.

(2) $\dot{V}(x) = 0$ pentru $x \in \Sigma$.

(3) Pentru $x \neq 0$ au loc: $\dot{V}(x) < 0$ dacă x este în interiorul lui Σ; $V(x) > 0$ dacă x este în exteriorul lui Σ;

(4) Hipersuprafața $V(x) = c = \text{constant}$, închisă prin ipoteză, se găseşte în întregime în interiorul lui Σ.

Atunci $V(x) \leq c$ defineşte un subdomeniu al domeniului de stabilitate asimptotică al punctului de echilibru $x = 0$ deoarece pentru orice punct x_0, cu $V(x_0) \leq c$, are loc Teorema 3.2.

Dacă Σ este constituită în întregime din traiectorii de stare ale sistemului (1.1), atunci Σ este frontiera domeniului de stabilitate asimptotică al punctului de echilibru $x = 0$.

Aceste raționamente au condus la o metodă de construcție a unei funcții Liapunov, [178], care permite determinarea exactă a domeniului de stabilitate asimptotică.

Definiția 3.7

O mulțime $M \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *conexă* dacă nu există $M_1, M_2 \subseteq M$ astfel încât $M = M_1 \cup M_2$ şi $M_1 \cap \bar{M}_2 = \bar{M}_1 \cap M_2 = \varnothing$, în care $\bar{M}_{1,2}$ sunt închiderile submulțimilor $M_{1,2}$. □

Se consideră sistemul (1.1) şi mulțimea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ simplu conexă care conține o vecinătate a originii. Rezultatul următor este o condiție suficientă ca $X \equiv D$.

Teorema 3.13 (Zubov).

Fie $V(x)$ şi $W(x)$ două funcții scalare cu următoarele proprietăți:

(i) $V(x)$ este definită, continuă şi pozitiv definită pe X şi satisface inegalitatea $0 < V(x) < 1$ pentru $x \in X$, $x \neq 0$.

(ii) $W(x)$ este definită pentru orice $x \in X$ finit, continuă şi pozitiv definită.

(iii) Pentru $x \in X$ are loc:

$$\dot{V}(x) = -W(x)[1 - V(x)]\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}\,. \tag{3.24}$$

(iv) Dacă $x \in X$ tinde la frontiera lui X (sau pentru X nemărginită $\|x(t)\| \to \infty$), atunci $V(x) \to 1$.

Atunci X este exact domeniul de stabilitate asimptotică D al punctului de echilibru $x = 0$.

D. Ipotezele (i) – (iii) asigură stabilitatea asimptotică a punctului de echilibru $x = 0$. Se introduce o nouă variabilă independentă prin relația:

$$ds = \sqrt{1 + \|f(x)\|^2}\,dt\,, \tag{3.25}$$

unde ds este lungimea elementului de arc de traiectorie. Aceasta nu schimbă natura punctului de echilibru $x = 0$. Din (3.24) şi (3.25) rezultă:

$$\frac{dV(x)}{ds} = -W(x)\left[1 - V(x)\right],$$

care prin integrare conduce la egalitatea:

$$1 - V\left[x(s(t))\right] = \left[1 - V(x_0)\right] e^{\int_0^{s(t)} W[x(s(t))]ds} . \tag{3.26}$$

Dacă $x_0 = X$, atunci $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Dacă $x_0 \notin D$, atunci pentru $t \to \infty$ exponențiala din (3.26) crește nemărginit, deoarece $\int_0^t W(x(t))dt$ este nemărginită. Urmează că $1 - V[x(s(t))] \to +\infty$, contrar ipotezei (*i*). Așadar $X \equiv D$. □

O consecință imediată a este posibilitatea determinării exacte a lui D.

Teorema 3.14

Fie $W(x)$ în ipotezele Teoremei 3.13 și $V(x)$ pozitiv definită, cu $0 \le V(x) \le 1$ pentru $x \in X$ și

$$\left[\mathrm{grad} V(x)\right]^T f(x) = -W(x)\left[1 - V(x)\right]\sqrt{1 + \left\| f(x) \right\|^2} . \tag{3.27}$$

Atunci frontiera mulțimii de atracție este definită de ecuația:

$$V(x) = 1 . \ \square \tag{3.28}$$

Exemplul 3.6

Se consideră sistemul dinamic

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2k\, x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

în care $k \in \mathbb{R}$ este un parametru. Să se determine domeniul de stabilitate asimptotică al punctului de echilibru $x_1 = x_2 = 0$.

Conform ecuației (3.27), în care ultimul factor din membrul drept poate fi omis dacă soluția sistemului este definită pentru $t \in \mathbb{R}_+$, și pentru

$$W(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2),$$

se poate scrie:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(-x_1 + 2k x_1^2 x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2)[1 - V(x)].$$

Soluția acestei ecuații este

$$V(x_1, x_2) = 1 - e^{-\varphi(x_1, x_2)}, \ \ \varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1 - k x_1 x_2} + x_2^2 .$$

Folosind ecuația (3.28) se obține

$$k x_1 x_2 = 1, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ,$$

care este frontiera domeniului de stabilitate asimptotică D. □

c. Metoda Grujic

Se prezintă în continuare o posibilitate de studiere a stabilității ca problemă de determinare exactă şi directă, prin condiții necesare şi suficiente, a funcției Liapunov şi, totodată, a domeniului de stabilitate asimptotică, [158], [159].

În acest scop se defineşte o funcție $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, candidat de funcție Liapunov, cu proprietatea că este *derivabilă superior la dreapta în sens Dini* în virtutea a sistemului (1.1). Această derivată are forma:

$$D_t^+ v[x(t)] \triangleq \lim_{\theta \downarrow 0} \sup \frac{v[x(t+\theta)] - v[x(t)]}{\theta} . \tag{3.29}$$

Se defineşte familia de funcții $P(\rho : f)$, asociată lui f, după cum urmează.

Definiția 3.8

$P(\rho : f)$, cu $\rho \in (0, +\infty)$, este familia funcțiilor $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitiv definite pe bila închisă $\overline{B}_\delta \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; \| x \| \leq \delta\}$, care satisfac condițiile:

(*i*) $p(x) \in C(\overline{B}_\rho)$ (mulțimea tuturor funcțiilor continue pe $\overline{B}_\delta$).

(*ii*) $p(0) = 0$.

(*iii*) $p(x) > 0$ pentru orice $x \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}$, pentru care există $\mu = \mu(p; f) > 0$, astfel încât pentru ecuația:

$$D_t^+ v[x(t)] = -p[x(t)], \text{ cu } v(0) = 0 , \tag{3.30}$$

există soluția v, definită și continuă pe bila închisă $\overline{B}_\mu \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; \| x \| \leq \mu\}$, de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1). □

Teorema 3.15

Pentru ca starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (1.1) cu proprietatea de netezime tare (v. Definiția 3.3.B) să aibă domeniul de stabilitate asimptotică D și pentru câteva vecinătăți $N \subseteq \mathbb{R}^n$ să aibă loc $N = D$ este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile:

(a) N este o vecinătate deschisă și conexă a punctului $x = 0$ și $N \subseteq S$.

(b) $f(x) = 0$ pentru $x \in N$ dacă și numai dacă $x = 0$.

(c) Pentru $\rho \in (0, +\infty)$, ales arbitrar astfel încât $\overline{B}_\rho \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; \| x \| \leq \rho\} \subset N$, și pentru o funcție arbitrară $p \in P(\rho; f)$ există funcția v – soluție unică de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1) a ecuației:

$$D_t^+ v[x(t)] = -w[x(t)] \text{, cu } v(0) = 0, \tag{3.31}$$

în care

$$w(x) = \begin{cases} p(x), & x \in \overline{B}_\rho, \\ \rho^{-1} \| x \| p(\rho x \| x \|^{-1}), & x \in (S \setminus B_\rho); \quad B_\rho \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < \rho\}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Funcția v are următoarele proprietăți:

(i) Este pozitiv definită pe N.

(ii) Dacă $\partial N \neq \varnothing$, atunci $v(x) \to +\infty$ pentru $x \to \partial N$, $x \in N$, în care ∂N este frontiera lui N. □

Observația 3.2

Rezultatul precedent asigură determinarea exactă a funcției v și a domeniului D pentru o alegere arbitrară a funcției pozitiv definite p pentru care problema (3.30) are soluție. În cazul în care $f(x) \in C(S)$ se poate alege funcția pozitiv definită $p(x) = \|f(x)\|^2$.

Nu este necesar ca N să fie specificată de la început. Ea se determină folosind funcția v – soluție a problemei (3.31) pentru $p \in P(\rho; f)$ și $\rho \in (0, +\infty)$.

Nu este necesar ca $v(x) \to +\infty$ de îndată ce $\| x \| \to +\infty$, $x \in D$. □

În situația în care se înlocuiește ipoteza netezimii tari cu aceea a netezimii slabe (v. Definiția 3.3.A) rezultatul corespunzător este următorul.

Teorema 3.16

Pentru ca starea de echilibru $x=0$ a sistemului (1.1) cu proprietatea de netezime slabă să aibă domeniul de stabilitate asimptotică D și pentru $N \subseteq S$ să aibă loc $N = D$ este necesar și suficient să fie îndeplinite următoarele condiții:

(a) Mulțimea N să fie vecinătate deschisă și conexă a punctului $x=0$.

(b) $f(x)=0$ pentru $x \in N$ dacă și numai dacă $x=0$.

(c) Pentru $\rho \in (0,+\infty)$, ales arbitrar astfel încât $\overline{B}_\rho \subset N$, și pentru o funcție arbitrară $p \in P(\rho; f)$ există funcția v – soluție unică de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1) a ecuației:

$$D_t^+ v[x(t)] = -w[x(t)] \text{, cu } v(0)=0, \tag{3.33}$$

$$w(x) = \begin{cases} p(x), & x \in \overline{B}_\rho, \\ \rho^{-1}\|x\| p(\rho x \|x\|^{-1}), & x \in (\mathbb{R}^n \setminus B_\rho). \end{cases} \tag{3.34}$$

Funcția v are următoarele proprietăți:

(*i*) Este pozitiv definită pe N.

(*ii*) Dacă $\partial N \neq \varnothing$, atunci $v(x) \to +\infty$ pentru $x \to \partial N,\ x \in N$. □

Observația 3.3

Dacă funcția v, determinată conform condiției (c), are proprietatea (*i*) dar nu și (*ii*), atunci punctul de echilibru $x=0$ al sistemului (1.1) cu proprietatea de netezime slabă este asimptotic stabil dar $N \neq D$. Dacă acest rezultat este verificat pentru orice $N \subseteq S$, atunci $D \not\subset S$. □

Pentru a obține numai un rezultat de stabilitate asimptotică se modifică în mod adecvat Teorema 3.14.

Teorema 3.17

Pentru ca starea de echilibru $x=0$ a sistemului (1.1) cu proprietatea de netezime slabă să fie asimptotic stabilă este necesar și suficient ca pentru orice $\xi \in (0,+\infty)$ și orice funcție $p \in P(\xi; f)$ să existe funcția v – soluție unică de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1) a ecuației:

$$D^{+}v(x) = -p(x)\text{, cu } v(0) = 0\,, \tag{3.35}$$

în care $v(x)$ este pozitiv definită într-o vecinătate deschisă şi conexă a punctului de echilibru $x = 0$. □

Exemplul 3.7

Se consideră sistemul dinamic:

$$\dot{x} = x(x^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}_+, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

Să se determine domeniul de stabilitate asimptotică.

Punctele de echilibru sunt: $x = -1,\; x = 0,\; x = +1$.

Aceste puncte de echilibru sugerează următoarele alegeri: $\rho \in (0,1)$, $S = (-1,+1)$, pe care sistemul are proprietatea de netezime tare, şi $p = x^2$.

Se aplică Teorema 3.15 şi conform ecuaţiei (3.32) se scrie :

$$w(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-\rho, \rho], \\ \rho|x|, & x \in (-1, -\rho] \cup [\rho, 1). \end{cases}$$

În ecuaţia (3.31) se înlocuieşte:

$$D_t^{+} v[x(t)] = \frac{d}{dt}\{v[x(t)]\} = \frac{dv}{dx}\dot{x} = \frac{dv}{dx} f(x) = \frac{dv}{dx}[x(x^2 - 1)]\,,$$

astfel că se obţine ecuaţia:

$$x(x^2 - 1)\frac{dv}{dx} = \begin{cases} -x^2, & |x| \in [0, \rho], \\ -\rho|x|, & |x| \in [\rho, 1). \end{cases}$$

Soluţia unică a acestei ecuaţii, cu $v(0) = 0$, este:

$$v(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\ln(1 - x^2), & |x| \in [0, \rho], \\ \dfrac{\rho}{2}\ln\dfrac{(1 + |x|)(1 - \rho)}{(1 - |x|)(1 + \rho)} - \dfrac{1}{2}\ln(1 - \rho^2), & |x| \in [\rho, 1). \end{cases}$$

Funcţia $v(x)$ este pozitiv definită pe $N = S = (-1, +1)$ şi $v(x) \to +\infty$ pentru $x \to \partial N = \{-1, +1\}$, $x \in (-1, +1)$. Aceasta înseamnă că domeniul de stabilitate asimptotică al punctului de echilibru $x = 0$ este $D = S = (-1, +1)$. □

4. Sisteme automate neliniare multivariabile

4.1. Hiperstabilitatea

a. Structura sistemului automat neliniar multivariabil

Fie sistemul automat cu schema bloc structurală din fig. V.4.1, în care $v,y,u,w\in\mathbb{R}^m$ sunt *referința*, *mărimea reglată*, *abaterea* şi *reacția*, $G(s)$ – matricea de transfer, $m\times m$, a părții liniare şi $F(t,y)$ – o funcție vectorială neliniară.

Fie o *realizare minimală* a matricei raționale proprii $G(s)$ (v. subcap. II.4):

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m, \tag{4.1}$$

$$y=Cx+Du,\quad y\in\mathbb{R}^m, \tag{4.2}$$

pentru care se precizează condiția inițială $x(t_0)=x_0$, cu $t_0\in\mathbb{R}_+,\ x_0\in\mathbb{R}^n$.

Neliniaritatea $w=F(t,y)$ satisface *inegalitatea de tip Popov*:

$$\eta(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} y^T(t)w(t)dt\geq-\gamma_0^2 \text{ pentru toți } t_1\geq t_0, \tag{4.3}$$

unde $\gamma_0=\gamma_0(t_0,x_0)$ este o constantă.

Ecuațiile sistemului sunt:

$$Y(s)=G(s)U(s), \tag{4.4}$$

$$u=v-w, \tag{4.5}$$

$$w=F(t,y). \tag{4.6}$$

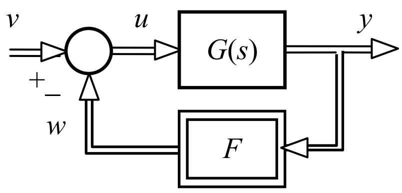

Fig. V.4.1. Schema bloc a sistemului automat neliniar multivariabil

Hiperstabilitatea este un concept din categoria stabilității interne situație în care sistemul considerat este liber, adică $v=0$. Dacă $v\neq0$, dar cunoscut, prin schimbările $\tilde{w}=w-v$ şi $\tilde{F}(t,y)=F(t,y)-v$, ecuațiile (4.5), (4.6) devin:

$$u=-\tilde{w} \tag{4.7}$$

$$\tilde{w}=\tilde{F}(t,y). \tag{4.8}$$

În acest fel se obține sistemul liber (4.4), (4.7), (4.8).

b. Definiții şi caracterizări

Conceptul de *hiperstabilitate* introdus în [170] se concretizează în următoarele două definiții.

Definiția 4.1

Sistemul automat cu structura din fig. IV.4.1 se numeşte *hiperstabil* dacă are o stare de echilibru global stabilă pentru orice neliniaritate (4.6) care satisface inegalitatea (4.3). □

Definiția 4.2

Sistemul automat cu structura din fig. IV.4.1 se numeşte *asimptotic hiperstabil* dacă are o stare de echilibru global asimptotic stabilă pentru orice neliniaritate (4.6) care satisface inegalitatea (4.3). □

Întrucât condițiile de hiperstabilitate şi hiperstabilitate asimptotică pretind ca partea liniară a sistemului cu structura din fig. IV.4.1 să fie înzestrată cu anumite proprietăți, în continuare se formulează două definiții în acest sens.

Definiția 4.3

Matricea pătratică $G(s) \triangleq (G_{ij}(s))$ se numeşte *real pozitivă* dacă:

(*i*) Nici un element $G_{ij}(s)$ nu are poli în semiplanul $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 0\}$.

(*ii*) Dacă $G_{ij}(s)$ au poli de pe axa imaginară, ei sunt simpli şi matricea $R \triangleq (r_{ij})$ a reziduurilor corespunzătoare este hermitiană şi pozitiv semidefinită.

(*iii*) $G_H(j\omega) \triangleq [G(j\omega) + G^T(-j\omega)]/2$ este hermitiană şi pozitiv semidefinită (v. Anexa C) pentru acei $\omega \in \mathbb{R}$ care nu sunt poli ai lui $G_H(j\omega)$. □

Definiția 4.4

Matricea pătratică $G(s) \triangleq (G_{ij}(s))$ se numeşte *strict real pozitivă* dacă:

(*i*) toate elementele $G_{ij}(s)$ au toți polii în semiplanul $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s < 0\}$.

(*ii*) $G_H(j\omega) \triangleq [G(j\omega) + G^T(-j\omega)]/2$ este hermitiană şi pozitiv definită (v. Anexa C) pentru toți $\omega \in \mathbb{R}$. □

Cu aceste definiții pregătitoare se pot enunța următoarele rezultate, pentru ale căror demonstrații se recomandă consultarea lucrării [170].

Teorema 4.1

O condiție necesară şi suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. IV.4.1 să fie hiperstabil este ca matricea de transfer $G(s)$ să fie real pozitivă. □

Exemplul 4.1

Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. V.4.3 şi cu partea liniară:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s}\\ b & \dfrac{1}{s+3}\end{bmatrix},\ \ a,b\in\mathbb{R}\,.$$

Să se determine a,b astfel încât sistemul automat să fie hiperstabil.

$G(s)$ are un element care are polul simplu $s=0$, pe axa imaginară. Matricea corespunzătoare a reziduurilor elementelor lui $G(s)$ are forma:

$$R=\mathrm{rez}_{s=0}G(s)=\begin{bmatrix}\mathrm{rez}_{s=0}(s+1)^{-1} & \mathrm{rez}_{s=0}s^{-1}\\ \mathrm{rez}_{s=0}b & \mathrm{rez}_{s=0}(s+3)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Aceasta este hermitiană şi pozitiv semidefinită pentru $a=0$. În continuare,

$$G_H(j\omega)=[G(j\omega)+G^T(-j\omega)]/2=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\omega^2+1} & \dfrac{b}{2}\\ \dfrac{b}{2} & \dfrac{3}{\omega^2+9}\end{bmatrix}$$

trebuie să fie hermitiană şi pozitiv semidefinită pentru orice $\omega\in\mathbb{R}$. Această condiție are loc pentru $b=0$. □

Teorema 4.2

O condiție necesară şi suficientă ca sistemul automat cu structura din fig. V.4.1 să fie asimptotic hiperstabil este ca matricea de transfer $G(s)$ să fie strict real pozitivă. □

Exemplul 4.2

Fie sistemul automat neliniar cu structura din fig. V.4.3 şi cu partea liniară:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{a}{s+2}\\ \dfrac{a}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix};\quad a\in\mathbb{R}\,.$$

Să se determine a astfel ca sistemul automat să fie asimptotic hiperstabil.

Matricea hermitiană

$$G_H(j\omega) = [G(j\omega) + G^T(-j\omega)]/2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\omega^2+1} & \dfrac{2a}{\omega^2+4} \\ \dfrac{2a}{\omega^2+4} & \dfrac{1}{\omega^2+1} \end{bmatrix}$$

este pozitiv definită dacă şi numai dacă $|a| < \min\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \dfrac{\omega^2+4}{2(\omega^2+1)} = \lim\limits_{\omega\to\pm\infty} \dfrac{\omega^2+4}{2(\omega^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.□

Sistemele hiperstabile au proprietatea remarcabilă că la conectarea lor în paralel sau într-o structură cu reacţie negativă se obţin de asemenea sisteme hiperstabile. Această proprietate nu are loc la conectarea în serie a sistemelor hiperstabile, [170].

Folosind realizarea minimală (4.1), (4.2) se obţin următoarele două rezultate.

Teorema 4.3 (Kalman – Jakubowich – Popov)

O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat din fig. IV.4.1 să fie hiperstabil este să existe matricele P – pozitiv definită şi L, V – arbitrare astfel ca:

$$PA + A^T P = -LL^T , \tag{4.9}$$

$$LV = C^T - PB , \tag{4.10}$$

$$D + D^T = V^T V . \ \square \tag{4.11}$$

Teorema 4.4

O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat din fig. IV.4.1 să fie asimptotic hiperstabil este să existe matricele P – pozitiv definită şi L, V – arbitrare, cu L pătratică nesingulară, astfel ca să aibă loc (4.9) – (4.11). □

În termenii Teoremei 4.3 se poate obţine o condiţie de tip inegalitate pentru partea liniară a sistemului automat. Ţinând seama de (4.1), (4.2), se scrie succesiv:

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T(t)u(t)dt = \frac{1}{2}x^T(t)Px(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[(Cx+Du)^T u - \dot{x}^T Px\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t)Px(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[-x^T(PA+A^TP)x + 2x^T(C^T-PB)u + u^T(D+D^T)u\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t)Px(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x^T \ u^T]M\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}dt \geq -\frac{1}{2}x^T(t_0)Px(t_0),$$

în care P este pozitiv definită şi $M \triangleq [L^T \ \ V]^T [L^T \ \ V]$ este pozitiv semidefinită.

Conform cu (4.3), (4.5) şi $v = 0$, rezultă că partea liniară satisface condiţia:

$$-\frac{1}{2} x^T(t_0) P x(t_0) \le \int_{t_0}^{t_1} y^T(t) u(t)\, dt \le \gamma_0^2, \quad t_1 > t_0 . \qquad (4.12)$$

4.2. Sisteme autoadaptive hiperstabile

O aplicaţie remarcabilă a teoriei hiperstabilităţii o constituie *sinteza comenzii de autoadaptare* a unui sistem automat pe baza *erorii* dintre *starea* unui *sistem cu parametri ajustabil* şi *starea* unui *model de referinţă*, fig. V.4.2.

a. Procedeul de autoadaptare

Pentru explicarea schemei bloc structurale din fig. V.4.2 şi implicit a procedeului de autoadaptare se porneşte de la ecuaţia modelului de referinţă:

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n , \qquad (4.13)$$

şi a sistemului cu parametri ajustabili:

$$\dot{x} = A(e,t) x + B(e,t) u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n , \qquad (4.14)$$

în care e este eroarea între starea modelului şi a starea sistemului ajustabil:

$$e = x_m - x . \qquad (4.15)$$

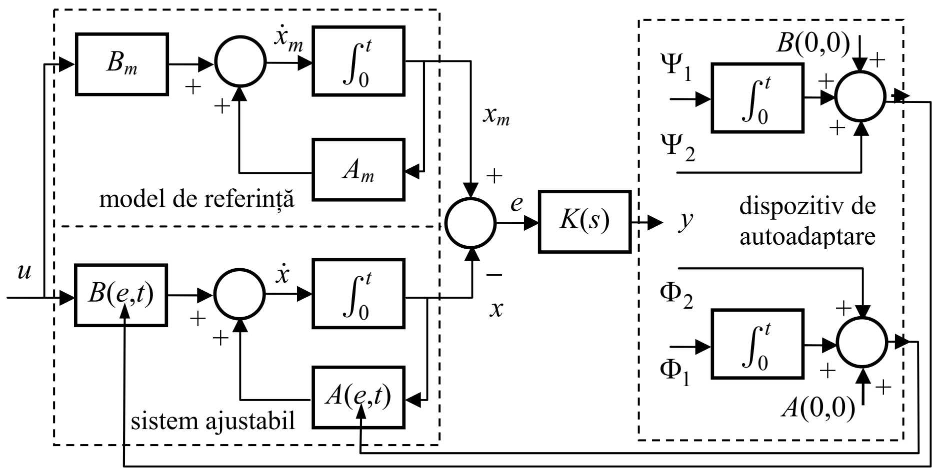

Fig. V.4.2. Structura sistemului autoadaptiv hiperstabil

În această situație ecuația diferențială a erorii are expresia:

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A(e,t)]x + [B_m - B(e,t)]u \,. \tag{4.16}$$

Condiția de stabilitate asimptotică globală

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \,,$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $e(0)$, orice $A_m - A(e,t)$ şi orice $B_m - B(e,t)$, implică faptul că pentru $u \neq 0$ trebuie să aibă loc $x \neq 0$ şi $x_m \neq 0$. De aici rezultă că mecanismul de autoadaptare trebuie să conțină elemente integratoare care să memoreze $A(e,t)$ şi $B(e,t)$ pentru $e(t) = 0$. În virtutea acestui fapt se poate scrie:

$$A(e,t) = A(0,0) + \int_0^t \Phi_1[t, y(\tau)]d\tau + \Phi_2[t, y(t)],\ t \geq 0 \,, \tag{4.17}$$

$$B(e,t) = B(0,0) + \int_0^t \Psi_1[t, y(\tau)]d\tau + \Psi_2[t, y(t)],\ t \geq 0 \,, \tag{4.18}$$

unde Φ_1 şi Ψ_1 realizează memorarea şi Φ_2 şi Ψ_2 se anulează pentru $y = 0$. Funcțiile matriceale Φ_1, Φ_2 şi Ψ_1, Ψ_2, deocamdată necunoscute, urmează să se determine pe baza condiției de hiperstabilitate asimptotică a întregului sistem.

Mărimea y este ieşirea unui element corector liniar cu matricea de transfer $K(s)$. Acesta se introduce pentru a asigura ca matricea de transfer a părții liniare să îndeplinească condițiile de reală pozitivitate strictă cerute de Teorema 4.2.

b. Sinteza comenzilor de autoadaptare

Pentru realizarea sintezei se parcurg următorii trei paşi.

<u>Pasul 1.</u> Se transfigurează schema bloc structurală din fig. IV.4.2 astfel încât să se pună în evidență, conform schemei bloc structurale din fig. IV.4.1, partea liniară şi partea neliniară. Acest lucru este posibil introducând funcția:

$$\tilde{u}(t) = [A_m - A(e,t)]x + [B_m - B(e,t)]u.. \tag{4.19}$$

În aceste condiții partea liniară a sistemului este descrisă de ecuațiile:

$$\begin{aligned} &\dot{e} = A_m e + \tilde{u}, \\ &Y(s) = K(s)E(s). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Partea neliniară, ținând seama de (4.17) şi (4.18), este descrisă de ecuația:

$$w(t) = \left\{ \int_0^t \Phi_1[t, y(\tau)] d\tau + \Phi_2[t, y(t)] + A(0,0) - A_m \right\} x(t) + \\ + \left\{ \int_0^t \Psi_1[t, y(\tau)] d\tau + \Psi_2[t, y(t)] + B(0,0) - B_m \right\} u(t). \tag{4.21}$$

Reacția se realizează conform următoarei relații:

$$\tilde{u} = -w. \tag{4.22}$$

Schema bloc structurală conform cu (4.19) – (4.22) este dată în fig. IV.4.3.

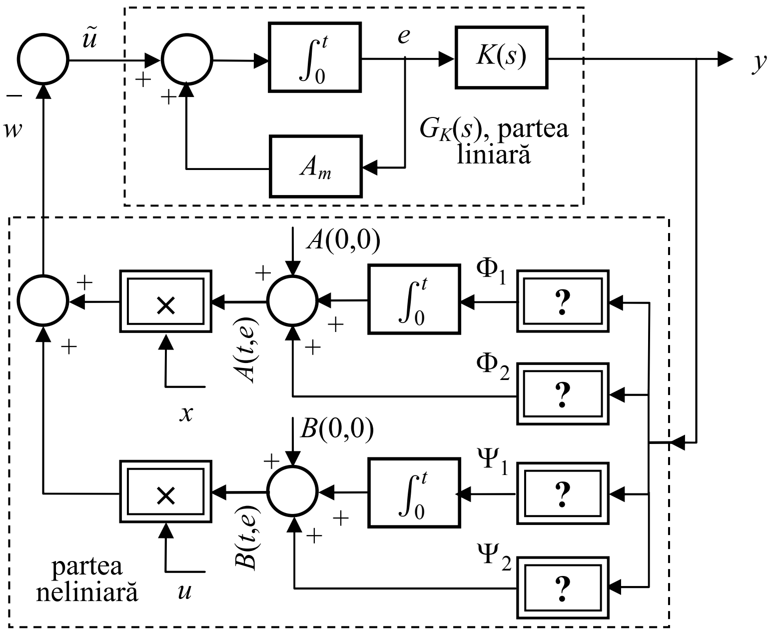

Fig. V.4.3. O formă echivalentă a sistemului cu structura din fig. V.4.2

<u>Pasul 2.</u> Se determină elementele neliniare (marcate cu **?** în fig. V.4.3) rezolvând inecuația (4.3), cu $w(t)$ dat de (4.21). Pentru a determina Φ_1, Φ_2 și Ψ_1, Ψ_2 se descompune inecuația integrală (4.3), cu $t_0 = 0$ și (4.21), în următoarele patru inecuații integrale parțiale:

$$\int_0^{t_1} y^T(t) \left\{ \int_0^t \Phi_1[t, y(\tau)] d\tau + A(0,0) - A_m \right\} x(t) dt \geq -\gamma_1^2, \tag{4.23}$$

$$\int_0^{t_1} y^T(t) \Phi_2[t, y(t)] x(t) dt \geq -\gamma_2^2, \tag{4.24}$$

$$\int_0^{t_1} y^T(t)\left\{\int_0^t \Psi_1[t, y(\tau)]d\tau + B(0,0) - B_m\right\}u(t)dt \geq -\gamma_3^2, \qquad (4.25)$$

$$\int_0^{t_1} y^T(t)\Psi_2[t, y(t)]u(t)dt \geq -\gamma_4^2, \qquad (4.26)$$

cu condiția ca $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 \leq \gamma_0^2$.

Pentru o autoadaptare simplă se caută pentru (4.23) – (4.26) soluții de forma:

$$\Phi_1[t, y(\tau)] = M_A\, y(\tau)[N_A x(\tau)]^T, \qquad (4.27)$$

$$\Psi_1[t, y(\tau)] = M_B y(\tau)[N_B u(\tau)]^T, \qquad (4.28)$$

$$\Phi_2[t, y(t)] = P_A\, y(t)[Q_A x(t)]^T, \qquad (4.29)$$

$$\Psi_2[t, y(t)] = P_B\, y(t)[Q_B u(t)]^T, \qquad (4.30)$$

unde M_A, N_A, M_B, N_B şi P_A, Q_A, P_B, Q_B sunt matrice constante adecvat alese.

Înlocuind (4.27), (4.29) şi (4.28, (4.30) respectiv în (4.17) şi (4.18) se obțin comenzile de autoadaptare:

$$A(t,e) = A(0,0) + M_A \int_0^t y(\tau)x^T(\tau)d\tau\, N_A^T + P_A\, y(t)x^T(t)Q_A^T, \quad t \geq 0, \quad (4.31)$$

$$B(t,e) = B(0,0) + M_B \int_0^t y(\tau)u^T(\tau)d\tau\, N_B^T + P_B\, y(t)u^T(t)Q_B^T, \quad t \geq 0. \quad (4.32)$$

Conform relațiilor (4.31), (4.32), se spune că autoadaptarea este de tip PI.

Se mai poate arăta că inecuațiile integrale (4.24) şi (4.26) admit şi soluțiile:

$$\Phi_2[t, y(t)] = [\operatorname{sgn} y(t)][Q_A x(t)]^T, \qquad (4.33)$$

$$\Psi_2[t, y(t)] = [\operatorname{sgn} y(t)][Q_B u(t)]^T, \qquad (4.34)$$

în care sgn este *funcția signum*. Cu acestea comenzile de autoadaptare devin:

$$A(e,t) = A(0,0) + M_A \int_0^t y(\tau)x^T(\tau)d\tau M_A^T + [\operatorname{sgn} y(t)]x^T(t)Q_A^T, \; t \geq 0, \quad (4.35)$$

$$B(e,t) = B(0,0) + M_B \int_0^t y(\tau)u^T(\tau)d\tau M_B^T + [\operatorname{sgn} y(t)]u^T(t)Q_B^T, \; t \geq 0. \quad (4.36)$$

Având în vederea forma relațiilor (4.35), (4.36) se spune că s-a realizat o autoadaptare de tip RI (releu + integrator).

Pasul 3. Se determină elementul de corecţie $K(s)$ astfel încât partea liniară a sistemului cu structura din fig. V.4.3, descrisă de matricea de transfer

$$G_K(s) = K(s)(Is - A_m)^{-1}, \tag{4.37}$$

să fie strict real pozitivă (Teorema 4.2 şi Definiţia 4.4).

În final, se observă că este posibil ca eroarea e să se obţină prin compararea numai a câtorva componente omoloage ale vectorilor x_m şi x. În acest caz, e este de dimensiune mai mică decât x_m (sau x), aşa cum se arată în exemplul următor.

Exemplul 4.3 (sistem automat de poziţionare asimptotic hiperstabil)

Se consideră sistemul automat de poziţionare cu schema bloc structurală din fig. V.4.4, în care T este constanta de timp, k_v este parametrul variabil în funcţie de perturbaţiile externe şi k_x este parametrul ajustabil care trebuie modificat astfel încât $k_x k_v \approx 1$ şi sistemul în ansamblu să fie asimptotic hiperstabil.

Se adoptă un model de referinţă cu funcţia de transfer:

$$G_m(s) = \frac{1}{Ts^2 + s + 1} \tag{4.38}$$

şi se auto-ajustează k_x pentru a realiza $k_x k_v \approx 1$.

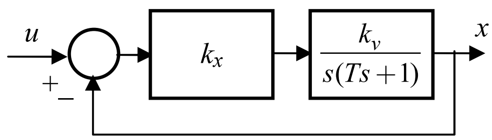

Fig. V.4.4. Sistem automat de poziţionare

Funcţia de transfer a sistemului automat cu parametrul ajustabil k_x este

$$G_0(s) = \frac{k_x k_v}{Ts^2 + s + k_x k_v} \approx \frac{k_x k_v}{Ts^2 + s + 1}, \tag{4.39}$$

în care aproximaţia $k_x k_v \approx 1$ este posibilă pentru $\left|\dot{k}_x\right|$ suficient de mare.

Eroarea $e \triangleq x_m - x$ în transformată Laplace are expresia:

$$E(s) = X_m(s) - X(s) = [G_m(s) - G_0(s)]U(s) = \frac{1 - k_x k_v}{Ts^2 + s + 1} U(s).$$

În domeniul timpului eroarea este descrisă de ecuaţia diferenţială:

$$T\ddot{e} + \dot{e} + e = (1 - k_x k_v)u.$$

Comanda de autoadaptare are forma:

$$k_x k_{v0} = k_{x0} k_{v0} + \int_0^t \Psi[t, y(\tau)] d\tau , \tag{4.40}$$

în care se consideră $k_{v0} = \text{constant}$ pe durata procesului de auto-ajustare.

Introducând variabila

$$\tilde{u}(t) = (1 - k_x k_{v0}) u(t)$$

şi ţinând seama de (4.3) cu $w = -\tilde{u}$, se ajunge la inecuaţia:

$$\int_0^{t_1} u(t) y(t) \left(\int_0^t \Psi[t, y(\tau)] d\tau + k_{x0} k_{v0} - 1 \right) dt \geq -\gamma_0^2, \; t > 0 .$$

Cea mai simplă soluţie a acestei inecuaţii integrale este

$$\Psi[t, y(\tau)] = k_0 u(\tau) y(\tau), \quad k_0 \geq (k_{x0} k_{v0} - 1)^2 / (2\gamma_0^2) . \tag{4.41}$$

În aceste condiţii din (4.40) şi (4.41) rezultă:

$$k_x = k_{x0} + \frac{k_0}{k_{v0}} \int_0^t u(\tau) y(\tau) d\tau . \tag{4.42}$$

Partea liniară a sistemului este descrisă de funcţia de transfer

$$G_K(s) = \frac{1}{Ts^2 + s + 1} K(s) . \tag{4.43}$$

Adoptând

$$K(s) = a + bs , \tag{4.44}$$

din condiţia $\operatorname{Re} G_K(j\omega) > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$, se obţine:

$$\frac{a + (b - aT)\omega^2}{(1 - T\omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \quad \omega \in \mathbb{R} .$$

Această inegalitate este îndeplinită pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $b > aT, \; a > 0$.

Se remarcă în final că legea de autoadaptare (4.42) şi elementul de corecţie (4.44), de tip PD, se obţin exact în aceeaşi formă dacă se aplică o procedură de sinteză bazată pe metoda directă Liapunov. □

5. Metoda invarianței de flux

5.1. Evoluția restricționată a sistemelor dinamice

a. Preliminarii

Obiectul de studiu al *teoriei invarianței de flux* este fluxul (*flow* în l. engleză) de traiectorii $x(t) \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_f], t_f > t_0$, generat de un sistem dinamic Σ în spațiul stărilor $\mathbb{X}$. Aceste traiectorii pornesc din *stările inițiale* $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{X}$ şi, corespunzător, ajung în *stările curente* $x(t) \in \mathbb{X}$. Matematic, este vorba de *operatorul de evoluție* sau *fluxul* $\Phi_t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ al sistemului Σ. Fluxul este *aplicația* care transformă mulțimea stărilor inițiale în mulțimea stărilor curente şi sistemul Σ este reprezentat prin $x(t) = \Phi_t(x_0)$. Noțiunea de flux şi viziunea bazată pe studiul aplicației Φ_t şi prin intermediul lui Φ_t oferă instrumente mult mai rafinate pentru analiza calitativă a unor aspecte subtile privind structura şi parametrii sistemelor dinamice. Folosind totodată şi conceptul clasic al *invarianței* se deschide un nou domeniu de cercetare în teoria sistemelor. Foarte interesant şi fertil, în acest cadru se studiază existența unor mulțimi *invariante la flux* $X \subseteq \mathbb{X}$ (nu în mod necesar invariante şi în timp). Acestea au proprietatea că pentru orice $x_0 \in X$ are loc $x(t) \in X$ pentru fiecare $t \in [t_0, t_f]$.

Acest subcapitol este dedicat principalelor rezultate obținute prin metoda invarianței de flux, prezentate sintetic în [249], cu trimiteri bibliografice adecvate. Pentru completarea cu alte rezultate se recomandă consultarea lucrărilor incluse în lista din finalul bibliografiei acestei cărți, dedicată metodei invarianței de flux.

b. Definiția şi caracterizarea evoluției restricționate

Se consideră sistemul dinamic neliniar continuu în timp:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{5.1}$$

în care u este mărimea de intrare şi x este starea; f este o funcție continuă şi local lipschitziană în x, ipoteză prin care se asigură existența şi unicitatea soluției problemei Cauchy (5.1) cu $x(t_0) = x_0$.

Se consideră că u aparține unei mulțimi de intrări admisibile definită prin:

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \bar{C}^0;\ u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{T} \right\}, \tag{5.2}$$

în care $\bar{C}^0$ este mulțimea funcțiilor continue pe porțiuni (discontinue la stânga într-un număr de puncte) pe intervalul de timp:

$$\mathbb{T} = [t_0, t_f) \subseteq \mathbb{R}_+,\ t_f > t_0, \tag{5.3}$$

şi $U(t)$ este o submulțime compactă (închisă şi mărginită) dependentă de timp.

Corespunzător acestor restricții impuse mărimii de intrare, se consideră că starea $x(t)$ aparține unei anumite submulțimi compacte dependente de timp $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$.

În aceste circumstanțe problema evoluției restricționate a sistemului dinamic (5.1) pe $\mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X$ este consistentă şi poate fi tratată prin metoda invarianței de flux pornind de la următoarea definiție.

Definiția 5.1

Evoluția sistemului dinamic (5.1) se numeşte *evoluție restricționată pe* $\mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X$ dacă pentru fiecare $t_0 \in \mathbb{T}$ şi fiecare

$$x(t_0) = x_0 \in X(t_0), \tag{5.4}$$

fiecare $u \in \mathcal{U}$ şi fiecare $t \in \mathbb{T}$ starea sistemului satisface condiția:

$$x(t) \in X(t),\ t \geq t_0 . \square \tag{5.5}$$

În conformitate cu [222], evoluția restricționată pe $\mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X$ a sistemului (5.1), în ipoteza că problema Cauchy are soluție unică, este echivalentă cu invarianța de flux a submulțimii $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru fiecare $u \in \mathcal{U}$ pe $\mathbb{T}$. Aceasta înseamnă că rezultatele generale formulate în [220] pot fi utilizate pentru a caracteriza *evoluția restricționată* pe $\mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X$. Acestea se exprimă în termenii *sub-tangenței* explicitată cu ajutorul *distanței* $d(v;V)$ de la un punct $v \in \mathbb{R}^n$ la o submulțime $V \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.1

Sistemul dinamic (5.1), cu f continuă şi local lipschitziană în x, are o evoluție restricționată pe $\mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X$ dacă şi numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\lim_{h \downarrow 0} \inf h^{-1} d\big(v + h f(t, v, u(t)); X(t+h)\big) = 0,\ \forall (t, u, v) \in \mathbb{T} \times \mathcal{U} \times X . \square \tag{5.6}$$

Acest rezultat general se poate utiliza atât pentru analiza cât şi pentru sinteza sistemului dinamic (5.1), pentru f şi $\mathbb{T}, \mathcal{U}, X$ date sau determinabile. În acest sens există diferite posibilități de conversie a *condiției de sub-tangență* (5.6) într-un instrument uşor utilizabil şi, totodată, relevant pentru aplicații. Una dintre ele, în care calculul distanței $d(v;V)$ este foarte simplu, constă în a defini submulțimea $X(t)$ sub forma unui hiperinterval în $\mathbb{R}^n$. Aceasta asigură evaluarea dinamicii sistemului prin componentele $x_i(t),\ i=\overline{1,n}$, ale vectorului de stare $x(t)$.

c. Evoluția restricționată pe componente [234]

Pentru o formulare concisă a următoarelor rezultate se introduc o serie de notații şi definiții. Fie $v,w\in\mathbb{R}^k$, cu $v\triangleq(v_i), w\triangleq(w_i)$. Prin $|v|\triangleq(|v_i|)$ se notează vectorul cu componentele luate în valoare absolută. Se definesc $v\le w\ (v<w)$ sau $v\ge w\ (v>w)$ cu semnificația de inegalități vectoriale *pe componente*, adică $v_i\le w_i\ (v_i<w_i)$ respectiv $v_i\ge w_i\ (v_i>w_i)$.

Fie $V\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime compactă, $g:V\to\mathbb{R}^n$, cu $g\triangleq(g_i)$, o funcție continuă, şi $z\in V$ un punct dat, cu $z\triangleq(z_i)$. Se notează prin $\mathcal{C}_v^z$ operatorul care *fixează* pe $g(v)$ în z de o manieră diagonală şi anume:

$$\mathcal{C}_v^z\{g(v)\}\triangleq[g_1(z_1,v_2,...,v_n),...,g_i(v_1,...,z_i,...,v_n),...,g_n(v_1,...,v_{n-1},z_n)]^T. \quad (5.7)$$

Se notează cu $\text{ext}_V\,\mathcal{C}_v^z\{g(v)\}$ vectorul ale cărui componente sunt $\text{ext}_V\, g_i(v_1,...,z_i,...,v_n)$, în care «ext» poate fi «min» (minim) sau «max» (maxim).

Fie funcțiile diferențiabile $\underline{a}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$, $\overline{a}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$, cu $\underline{a}(t)\le\overline{a}(t)$, şi funcțiile continue $\underline{b}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^m$, $\overline{b}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^m$, cu $\underline{b}(t)\le\overline{b}(t)$. În mod obişnuit atât x cât şi u trebuie să satisfacă anumite restricții prescrise care în mod frecvent se referă la componentele celor doi vectori. Astfel de restricții pot fi luate în considerare respectiv cu ajutorul următoarelor hiperintervale:

$$X(t)\triangleq\left\{v\in\mathbb{R}^n;\ \underline{a}(t)\le v\le\overline{a}(t)\right\},\ t\in\mathbb{T}, \quad (5.8)$$

$$U(t)\triangleq\left\{w\in\mathbb{R}^m;\ \underline{b}(t)\le w\le\overline{b}(t)\right\},\ t\in\mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Acestea se asociază sistemului (5.1), ceea ce conduce la conceptul pragmatic de *evoluție restricționată pe componente* (pe scurt, *evoluție RC*). O astfel de evaluare este mai subtilă şi mai nuanțată comparativ cu evaluarea globală bazată pe norma vectorială. În acelaşi timp, submulțimea (5.8) permite o conversie explicită a condiției de sub-tangență (5.6) după cum se va arăta în continuare.

Teorema 5.2, [234]

Sistemul dinamic (5.1), cu f continuă şi local lipschitziană în x, are o evoluție RC pe $X(t)$, dat prin (5.8), şi pe $U(t)$, dat prin (5.9), dacă şi numai dacă

$$\min_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}\times X}[\mathcal{C}_v^{\underline{a}(t)}\{f[t,v,u(t)]\}-\dot{\underline{a}}(t)]\geq 0\,, \qquad (5.10)$$

$$\max_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}\times X}[\mathcal{C}_v^{\overline{a}(t)}\{f[t,v,u(t)]\}-\dot{\overline{a}}(t)]\leq 0\,. \;\square \qquad (5.11)$$

Condițiile de tip inegalitate (5.10) şi (5.11) indică faptul că trebuie avute în vedere anumite clase de sisteme cărora li se asociază submulțimile $X(t), U(t)$. Într-adevăr, pentru (5.8) şi (5.9) date, inegalitățile (5.10) şi (5.11) pot furniza, pe de o parte, clase de soluții $f(t,x,u)$ şi, pe de altă parte, deschid abordarea evoluției RC ca o formă practică şi practicabilă de evoluție restricționată pe $\mathbb{T}$, $\mathcal{U}$, X.

d. Sisteme dinamice liniare constante

Pentru a obține formule simple, utilizabile în aplicații, se consideră sistemul:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad t\in\mathbb{R}_+, x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m\,, \qquad (5.12)$$

în care A,B sunt matrice constante de dimensiuni adecvate. $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$ şi în (5.8) şi (5.9) se au în vedere şi următoarele particularizări:

$$-\underline{a}(t)=\overline{a}(t)\triangleq a=\text{constant}>0,\ t\in\mathbb{R}_+\,. \qquad (5.13)$$

$$-\underline{b}(t)=\overline{b}(t)\triangleq b=\text{constant}>0,\ t\in\mathbb{R}_+\,. \qquad (5.14)$$

În acest fel $\mathcal{U}$ şi X sunt simetrice față punctele $u=0$ şi respectiv $x=0$. Problema abordată este de *evoluție restricționată pe componente prin constante* (pe scurt, *evoluție RCC*), care se exprimă cel mai simplu prin:

$$|x(t)|\leq a,\ |u(t)|\leq b,\quad t\in\mathbb{R}_+\,, \qquad (5.15)$$

pentru fiecare x_0 şi fiecare $u\in\overline{C}^0$, ambele compatibile cu (5.15).

Pentru formulări concise se adoptă notații suplimentare. M este o matrice reală. $|M|$ este matricea cu toate elementele lui M luate în valoare absolută și $\bar{M}$ – matricea în care numai elementele extradiagonale sunt luate în valoare absolută.

Teorema 5.3

Sistemul dinamic (5.12) are o evoluție RCC dacă și numai dacă

$$\bar{A}a + |B|b \leq 0 \,. \square \tag{5.16}$$

Din (5.16) rezultă că evoluția RCC implică în mod necesar ca toate elementele diagonale ale matricei $\bar{A}$ (ca și ale matricei A) să fie strict negative.

5.2. Stabilitatea asimptotică pe componente

a. Sisteme dinamice neliniare

Pentru analiza stabilității interne a unui sistem dinamic neliniar se consideră $u(t) \equiv 0$. În aceste circumstanțe ecuația (5.1) se înlocuiește cu

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n . \tag{5.17}$$

În ipoteza

$$f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.18}$$

rezultă că sistemul (5.17) are *starea de echilibru* $x = 0$. Se poate asocia sistemului (5.17) hiperintervalul simetric dependent de timp:

$$X^{\gamma}(t) \triangleq \left\{ v \in \mathbb{R}^n ; |v| \leq \gamma(t) \right\}, \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.19}$$

în care $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă și $\gamma(t) > 0, \ t \in \mathbb{R}_+$. Privitor la comportarea asimptotică a lui $x(t)$ următoarea proprietate joacă un rol esențial:

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0 . \tag{5.20}$$

Definiția 5.2

Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (5.17) se numește *asimptotic stabilă pe componente în raport cu* $\gamma(t)$ (pe scurt, *asimptotic stabilă* $C\gamma$) dacă pentru fiecare $t_0 \geq 0$ și fiecare x_0 cu $|x_0| \leq \gamma(t_0)$, sistemul (5.17) satisface:

$$|x(t)| \leq \gamma(t), \ t \geq t_0 . \square \tag{5.21}$$

Trebuie remarcat faptul că, sub condiția (5.20), inegalitatea (5.21) are loc numai dacă starea de echilibru $x=0$ este asimptotic stabilă.

Urmează că stabilitatea asimptotică Cγ implică stabilitatea asimptotică. Exceptând anumite clase de sisteme, implicația inversă nu are loc. Aceasta deoarece în Definiția 5.2 condiția „fiecare x_0 cu $\left|x_0\right| \leq \gamma(t_0)$ ” corespunde, în Definiția III.1.2 a stabilității, cazului particular $\varepsilon=\delta$. Evident, această egalitate este de fapt premisa necesară de realizare a invarianței de flux. În Definiția III.1.2 stabilitatea este formulată în termenii (ε, δ). Aceasta implică în mod necesar $\varepsilon \leq \delta$. Urmează că pentru $\varepsilon=\delta$ se consideră un caz particular de stabilitate, care nu este realizat de toate sistemele care se încadrează în Definiția III.1.2.

Caracterizarea stabilității asimptotice Cγ se poate obține direct din Teorema 5.2 pentru $u(t) \equiv 0$ şi $X^{\gamma}(t)$ definit prin (5.19).

Teorema 5.4

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.17) este asimptotic stabilă Cγ dacă şi numai dacă

$$\max_{t \geq 0, |v| \leq \gamma(t)} \left[\mathcal{C}_v^{\pm\gamma(t)}\{\pm f(t,v)\} - \dot{\gamma}(t)\right] \leq 0 \,. \; \square \tag{5.22}$$

Inegalitatea (5.22) este o condiție suficientă de stabilitate asimptotică a stării de echilibru $x=0$ şi mulțimea

$$X_{AS}^{\gamma} \triangleq \left\{v \in \mathbb{R}^n ; |v| \leq \max_{\mathbb{R}_+} \gamma(t)\right\}$$

este una dintre *regiunile de stabilitate asimptotică*. Avantajul stabilității asimptotice Cγ este subliniat prin (5.22), care este o condiție necesară şi suficientă.

Definiția 5.3

Se înlocuieşte $\gamma(t)$ în Definiția 5.2 cu $\rho\gamma(t)$, în care $\rho \geq 1$. Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.17) se numeşte *global asimptotic stabilă* $C\gamma$ (pe scurt, GASCγ) dacă ea este asimptotic stabilă Cγ pentru toți $\rho \geq 1$. □

Teorema 5.5

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.17) este GASCγ dacă şi numai dacă

$$\max_{t \geq 0, |v| \leq \rho\gamma(t), \rho \geq 1} \left[\mathcal{C}_v^{\pm\rho\gamma(t)}\{\pm f(t,v)\} - \rho\dot{\gamma}(t)\right] \leq 0 \,. \; \square \tag{5.23}$$

Acest rezultat este totodată o condiție suficientă de stabilitate asimptotică pentru toți $\rho \geq 1$.

b. Sisteme dinamice liniare constante

În continuare se prezintă o ilustrare a aplicării Teoremei 5.5 în cazul sistemelor dinamice liniare constante.

Pentru analiza stabilității se consideră $u(t) \equiv 0$. În aceste circumstanțe ecuația (5.12) devine:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n . \tag{5.24}$$

Teorema 5.6, [226], [227]

Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (5.17) este GASCγ dacă și numai dacă:

$$\max_{\mathbb{R}+} \left[\overline{A}\gamma(t) - \dot{\gamma}(t) \right] \leq 0 . \ \square \tag{5.25}$$

Problema solvabilității inecuației

$$\overline{A}\gamma(t) - \dot{\gamma}(t) \leq 0 \tag{5.26}$$

în raport cu $\gamma(t)$ conduce la următoarele rezultate.

Teorema 5.7

Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (5.17) este GASCγ dacă și numai dacă:

$$\gamma(t) \geq e^{\overline{A}(t-t_0)}\gamma(t_0), \quad t \geq t_0 \geq 0 . \ \square \tag{5.27}$$

Teorema 5.8

O condiție necesară și suficientă de existență a lui $\gamma(t)$ astfel încât soluția $x = 0$ a sistemul (5.24) să fie GASCγ este ca matricea $\overline{A}$ să fie hurwitziană. □

5.3. Stabilitatea exponențial asimptotică pe componente

Fie Γ *semigrupul abelian* al soluțiilor inecuației (5.27) cu $\overline{A}$ hurwitziană. Urmează că pentru oricare două funcții $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ afirmațiile „$x = 0$ este GASCγ_1” și „ $x = 0$ este GASCγ_2” sunt echivalente. În acest context și având în vedere membrul drept din (5.27) se va studia dacă în mulțimea Γ pot exista funcții exponențiale simple.

Fie

$$\gamma(t)=\alpha e^{-\beta(t-t_0)},\quad t\ge t_0\ge 0\,, \tag{5.28}$$

în care $\alpha \triangleq [\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]^T > 0$ şi $\beta > 0$ (scalar).

Definiția 5.4

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.1) se numeşte *exponențial asimptotic stabilă pe componente* (EASC) dacă există $\alpha>0$ şi $\beta>0$ astfel încât pentru fiecare $t_0\ge 0$ şi fiecare x_0 cu $|x_0|\le\alpha$, sistemul (5.17) satisface:

$$|x(t)|\le \alpha e^{-\beta(t-t_0)},\ t\ge t_0\,.\ \square \tag{5.29}$$

Definiția 5.5

Se înlocuieşte α în Definiția 5.4 cu $\rho\alpha$, în care $\rho\ge 1$. Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.17) se numeşte *global* EASC (GEASC) dacă ea este EASC pentru toți $\rho\ge 1$. □

Teoremele 5.4 şi 5.5 cu (5.28) conduc la următoarele rezultate.

Teorema 5.9

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.1) este EASC dacă şi numai dacă:

$$\max_{t\ge 0,|v|\le\gamma(t)}\left[\mathcal{C}_v^{\pm\gamma(t)}\{\pm f(t,v)\}-\dot\gamma(t)\right]\le 0,\ \gamma(t)=\alpha e^{-\beta(t-t_0)},\ t\ge t_0\ge 0\,.\ \square \tag{5.30}$$

Teorema 5.10

Starea de echilibru $x=0$ a sistemului (5.1) este GEASC dacă şi numai dacă:

$$\max_{t\ge 0,|v|\le\rho\gamma(t),\rho\le 1}\left[\mathcal{C}_v^{\pm\rho\gamma(t)}\{\pm f(t,v)\}-\rho\dot\gamma(t)\right]\le 0,\gamma(t)=\alpha e^{-\beta(t-t_0)},t\ge t_0\ge 0\,.\ \square \tag{5.31}$$

Pentru cazul liniar (5.24) se adoptă notații suplimentare. Fie matricea reală $M\triangleq(m_{ij})$. $M>0$ $(M\ge 0)$ semnifică $m_{ij}>0$ $(m_{ij}\ge 0)$ pentru toți i,j . Pentru (5.24) se notează: $A_\alpha\triangleq[\alpha_i]^{-1}A[\alpha_i]$, cu $[\alpha_i]\triangleq \mathrm{diag}\{\alpha_1,...,\alpha_n\}>0$; $G_i(A_\alpha)\triangleq\left\{s\in\mathbb{C};|s-a_{ii}|\le(1/\alpha_i)\sum_{\substack{j=\overline{1,n}\\ j\ne i}}|a_{ij}|\alpha_j\right\},i=\overline{1,n}$ – discurile Gherşgorin asociate matricei A_α; $\overline{A}_k$, $k=\overline{1,n}$ – minorii principali diagonali ai matricei $\overline{A}$.

Teorema 5.11, [234]

Pentru sistemul liniar constant (5.24) următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(1) Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (5.17) este GEASC.

(2) $\overline{A}\alpha \leq -\beta\alpha$.

(3) $0 < \beta \leq \min_{i=\overline{1,n}} \left(-a_{ii} - (1/\alpha_i)\sum_{j=\overline{1,n}\ j\neq i} |a_{ij}|\alpha_j\right)$.

(4) $\overline{A}\alpha < 0$.

(5) $-\overline{A}$ este o M-matrice, [6].

(6) $\overline{A}$ este hurwitziană.

(7) $\bigcup_{i=\overline{1,n}} G_i(A_\alpha) \subset \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s < 0\}$.

(8) $(-1)^k \overline{A}_k > 0,\ k = \overline{1,n}$.

(9) $\det A \neq 0,\ \left(-\overline{A}\right)^{-1} \geq 0$.

(10) Starea de echilibru $x = 0$ a sistemului (5.17) este GASCγ. □

GEASC este un tip special de stabilitate exponenţial asimptotică. Ea depinde de baza de vectori din $\mathbb{R}^n$ în care este exprimat sistemul. Cu ale cuvinte, există o bază în $\mathbb{R}^n$ în care un sistem asimptotic stabil este şi GEASC. În cazul matricei A, este o proprietate a liniilor în care există o anumită dominanţă diagonală şi, în mod necesar, elementele primei diagonale sunt strict negative (v. Teorema 5.11 (3)).

Exemplul 5.1

Se consideră sistemul (5.12) cu matricele

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că sistemul este GEASC şi să se determine α şi β pentru care are loc (5.29). Apoi, pentru $a = \alpha$ să se determine b din (2.16).

Se utilizează Teorema 5.11. Condiţia (8) conduce la: $-1 < 0,\ 3 - 2 > 0$, ceea ce înseamnă că sistemul este GEASC. Din condiţia (4) se obţin inecuaţiile:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 < 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 < 0, \end{cases}$$

din care rezultă $\alpha_1/\alpha_2 \triangleq \eta \in (2, 3)$. Totodată, din (3), după calcule relativ simple, se obține: $0 < \beta \le \beta_{\max} \triangleq \max_{\eta\in(2,3)} \min\{1-2\eta^{-1},\ 3-\eta\}$. Din $1-2\eta^{-1} = 3-\eta$ rezultă $\eta_{\max} = (1+\sqrt{3}) \in (2, 3)$ şi $\beta_{\max} = 1-2\eta_{\max}^{-1} = 3-\eta_{\max} = 2-\sqrt{3}$.

Conform condiției (2.16), pentru $a \triangleq [a_1\ \ a_2]^T$, $a_{1,2} = \alpha_{1,2}$, se scrie:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + b \le 0 \\ \ \ \alpha_1 - 3\alpha_2 + b \le 0. \end{cases}$$

Se obține $0 < b \le b_{\max} \triangleq \alpha_2 \max_{\eta\in(2,3)} \min\{\eta-2, -\eta+3\}$. Din $\eta-2 = -\eta+3$ rezultă $\eta_{\max} = (\alpha_1/\alpha_2)_{\max} = 2{,}5 \in (2, 3)$ şi $b_{\max} = \alpha_2(\eta_{\max}-2) = \alpha_2(-\eta_{\max}+3) = 0{,}5\alpha_2$. □

Inegalitățile (5.30) şi (5.31) permit alte două noi abordări în studiul stabilității. Pe de o parte este posibilă realizarea unei *robusteți* naturale a stabilității exponențial asimptotice pe componente. Rezultate în acest sens sunt prezentate în [198] – [200]. Pe de altă parte, este posibilă caracterizarea în sensul stabilității exponențial asimptotice pe componente a unor clase de sisteme: cu *matrice de tip interval* [181], [199], [208], [213], cu *incertitudini*, [206], [210], cu *întârziere* şi *2D discrete*, [184], *rețele neuronale*, [190], cu *neliniarități*, [202] – [206], etc.

Pornind de la observația că Definiția 5.4 poate fi formulată folosind norma Hölder (v. Anexa A), cu $p = \infty$, utilizarea unui p oarecare a condus la noțiunile mai generale de *stabilitate exponențial asimptotică invariantă*, [215], de *stabilitate diagonală generalizată* şi la echivalența acestora, [217].

5.4. Stabilitatea absolută pe componente

Forma de inegalitate a condiției (5.31) şi Teorema 5.11 sugerează şi o altă abordare, la fel de naturală, pentru următoarea clasă de sisteme dinamice neliniare:

$$\dot{x} = F(t,x)x, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.32}$$

În această clasă se includ clase de circuitele electric, sisteme economice, biologice, ecologice, farmacocinetice etc. Abordarea în cadrul GEASC are în vedere clasa de matrice $F(t,x)$ mărginite în sensul următor: există o matrice reală constantă A şi există $\alpha > 0\ (\alpha \in \mathbb{R}^n)$ şi $\beta > 0$ (scalar) astfel încât are loc inegalitatea pe componente:

$$\mathcal{C}_v^{\pm\alpha}\left\{\overline{F}(t,\rho v e^{-\beta t})\right\} \le \overline{A}, \quad t \ge 0,\ |v| \le \alpha,\ \rho \ge 1. \tag{5.33}$$

În acesta $\mathcal{C}_v^{\pm\alpha}$ se aplică fiecărei coloane a matricei $\overline{F}(t,x)$. Se poate arăta că există o clasă $\mathcal{F}_{\overline{A}}$ de matrice continue care satisfac (5.33). Corespunzător, sistemul (5.24) se numeşte *$\mathcal{C}$–majorantul liniar pe elemente* al sistemului (5.32) cu $F \in \mathcal{F}_{\overline{A}}$.

Definiția 5.6

Sistemul dinamic neliniar (5.32) se numeşte *absolut stabil pe componente* (AbSC) dacă starea de echilibru $x = 0$ este GEASC pentru toți $F \in \mathcal{F}_{\overline{A}}$. □

Teorema 5.12

Sistemul dinamic neliniar (5.32) este AbSC dacă şi numai dacă starea de echilibru $x = 0$ a sistemului $\mathcal{C}$–majorant liniar pe elemente (5.24) este GEASC (echivalent: $\overline{A}$ este hurwitziană sau $(-1)^k \overline{A}_k > 0,\ k = \overline{1,n}$). □

5.5. Detectarea şi stabilizarea pe componente

a. Detectarea exponențial asimptotică pe componente, [211], [233]

Se consideră sistemul dinamic liniar constant:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{5.34}$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{5.35}$$

cu $x(0) = x_0$, în care A, B, C sunt matrice reale de dimensiuni adecvate.

S-a arătat în secțiunea III.4.3 că folosind *estimatorul de stare*:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.36}$$

cu $\hat{x}(0) = 0$, se poate obține o estimare $\hat{x}$ a stării x. L se alege astfel încât

$$x_\varepsilon \triangleq x - \hat{x}, \tag{5.37}$$

numită *eroarea de estimare*, să tindă la zero, cât mai repede posibil, pentru $t \to \infty$.

Se utilizează Teorema 5.11 (2) pentru determinarea lui L. Fie X_0 mulțimea mărginită a tuturor stărilor inițiale posibile x_0, respectiv $x_\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x_0$. Se determină apoi $X^\alpha \triangleq \left\{v \in \mathbb{R}^n,\ |v| \le \alpha,\ \alpha > 0\right\}$, astfel încât $X_0 \subseteq X^\alpha$.

Definiția 5.7

Estimatorul de stare (5.36) se numeşte *exponențial asimptotic stabil pe componente* în raport cu α şi $\beta > 0$ (pe scurt EASC$\alpha\beta$) dacă pentru fiecare $x_\varepsilon(0) = x_0 \in X^\alpha$ eroarea de estimare (5.37) satisface condiția:

$$\left| x_\varepsilon(t) \right| \le \alpha e^{-\beta t}, \; t \ge 0 . \square \tag{5.38}$$

Conform relației (III.4.26) *ecuația erorii de estimare* are forma:

$$\dot{x}_\varepsilon = (A - LC)x_\varepsilon, \; t \in \mathbb{R}_+ . \tag{5.39}$$

Pe baza acestei ecuații şi a Teoremei 5.11 (2) se obține următorul rezultat.

Teorema 5.13

Estimatorul de stare (5.36) este EASC$\alpha\beta$ dacă şi numai dacă există cel puțin o matrice L astfel încât:

$$\overline{(A - LC)}\alpha \le -\beta\alpha . \square \tag{5.40}$$

O soluție universală, în care (5.40) urmează să fie îndeplinită pentru orice $\alpha > 0$, constă în a determina matricea L (dacă există) pentru care $F \triangleq A - LC$ are formă diagonală, $F_d \triangleq \mathrm{diag}\{f_{11}, ..., f_{nn}\}$ cu $f_{ii} \le -\beta, \; i = \overline{1,n}$.

Pentru formularea concisă a unui rezultat în acest sens se consideră ecuațiile:

$$C_{(i)}^T z_i = a_{(i)}^T, \; z_i \in \mathbb{R}^p, \; i = \overline{1,n} , \tag{5.41}$$

în care $C_{(i)}^T$ şi $a_{(i)}^T$ se obțin eliminând linia c_i^T din C^T şi respectiv elementul a_{ii} din coloana a_i^T a matricei A^T .

Teorema 5.14

Există o matrice L_d astfel încât $A - L_d C = F_d \le -\beta I_n$ dacă şi numai dacă:

$$\mathrm{rank} C_{(i)}^T = \mathrm{rank}\left[C_{(i)}^T, \, a_{(i)}^T \right], \; i = \overline{1,n} , \tag{5.42}$$

$$f_{ii} \triangleq \inf_{z_i \in \mathcal{Z}_i} (a_{ii} - c_i^T z_i) \le -\beta, \; i = \overline{1,n} , \tag{5.43}$$

unde $\mathcal{Z}_i \subseteq \mathbb{R}^p, \; i = \overline{1,n}$, sunt respectiv mulțimile de soluții ale ecuațiilor (5.41). $\square$

Evident, soluțiile L_d pentru care $A - L_d C = F_d \le -\beta I_n$ sunt:

$$L_d^T \in \left\{ [z_1, z_2, ..., z_n] \in \mathbb{R}^{p \times n}, z_i \in \mathcal{Z}_i, i = \overline{1,n};\ \max_{i=\overline{1,n}} \inf_{z_i \in \mathcal{Z}_i} (a_{ii} - c_i^T z_i) \le -\beta \right\}. \quad (5.44)$$

Mulțimea $\mathcal{L}$ a matricelor L care satisfac (5.40) este convexă, [232]. Pe această cale se ajunge la problema de optimizare a funcțiilor convexe:

$$f_i(l_i^T) = \alpha_i^{-1} \alpha^T \overline{(a_i^T - C^T l_i^T)},\ \ l_i^T \in \mathbb{R}^p,\ i = \overline{1,n}, \quad (5.45)$$

în care $\alpha \triangleq (\alpha_i)$ și $a_i, l_i, \overline{(a_i - l_i C)},\ i = \overline{1,n}$, sunt liniile matricelor A, L, respectiv $\overline{(A - LC)}$. Folosind (5.45) se pot formula următoarele rezultate.

Teorema 5.15

Mulțimea $\mathcal{L}$ este nevidă dacă și numai dacă

$$\max_{i=\overline{1,n}} \min_{z_i \in \mathbb{R}^p} f_i(z_i) \le -\beta. \ \square \quad (5.46)$$

Definiția 5.8

Sistemul (5.34), (5.35) se numește *detectabil* EASC$\alpha\beta$ dacă există o matrice L și $\alpha > 0$ și $\beta > 0$ astfel încât estimatorul (5.36) să fie EASC$\alpha\beta$. □

Teorema 5.16

Sistemul (5.34), (5.35) este detectabil EASC$\alpha\beta$ dacă și numai dacă

$$\max_{i=\overline{1,n}} \min_{z_i \in \mathbb{R}^p} f_i(z_i) < 0. \ \square \quad (5.47)$$

O soluție $L \in \mathcal{L}$ se poate determina prin tehnici de minimizare.

Folosind convexitatea funcțiilor $f_i(z_i),\ i = \overline{1,n}$, [233], rezultă că mulțimea punctelor de minim este identică cu mulțimea soluțiilor ecuațiilor:

$$0 \in \partial f_i(z_i),\ \ i = \overline{1,n}, \quad (5.48)$$

$$\partial f_i(z_i) \triangleq \left\{ z_i^* \in \mathbb{R}^p; f_i(z_i) - f_i(w_i) \le (z_i - w_i)^T z_i^*, w_i \in \mathbb{R}^p \right\},\ i = \overline{1,n}, \quad (5.49)$$

în care $\partial f_i(z_i)$ este *mulțimea subgradient* a funcției $f_i(z_i)$ în $\mathbb{R}^p$, [253].

Conform cu (5.45) și (5.49), ecuațiile (5.48) sunt echivalente respectiv cu:

$$\alpha^T \overline{(a_i^T - C^T z_i)} \le \alpha^T \overline{(a_i^T - C^T w_i)},\ \ \forall w_i \in \mathbb{R}^p,\ i = \overline{1,n}, \quad (5.50)$$

din care se determină punctele de minim $z_i \in \mathbb{R}^p$, respectiv $l_i^T = z_i$, $i = \overline{1,n}$.

O altă posibilitate de determinare a unei soluții L, [211], se bazează pe faptul că membrul stâng din (5.40) se poate exprima prin *măsura de matrice*, [188]:

$$\mu_L \triangleq \lim_{\xi \downarrow 0} \xi^{-1}\left(\left\|I_n + \xi S^{-1}(A - LC)S\right\|_\infty - 1\right) = \left\|\sigma I_n + S^{-1}(A - LC)S\right\|_\infty - \sigma, \quad (5.51)$$

în care $S \triangleq \mathrm{diag}\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $\|\cdot\|_\infty$ este norma ∞ (v. Anexa A) și $\sigma = \xi^{-1} >> 0$ este o constantă (arbitrară) foarte mare, aleasă astfel încât diagonala matricei $\sigma I_n + S^{-1}(A - LC)S$ să fie strict pozitivă. Se poate enunța rezultatul următor.

Teorema 5.17

Sistemul (5.34), (5.35) este detectabil EASC$\alpha\beta$ dacă și numai dacă

$$\mu_L \le -\beta\,. \; \square \quad (5.52)$$

Matricea L se poate determina pe baza minimizării funcției de cost:

$$J(L) = \left\|\sigma I_n + S^{-1}(A - LC)S\right\|_\infty - \sigma \quad (5.53)$$

prin proceduri numerice adecvate, pentru $\alpha > 0$ și / sau $\beta > 0$ impuși (fixați sau situați în intervale date), și cu eventuale restricții privind elementele matricei L.

Exemplul 5.2

Se consideră sistemul (5.34), (5.35) cu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine un estimator EASC$\alpha\beta$ pentru $\alpha = [2 \;\; 1 \;\; 1]^T$ și $\beta = -1{,}5$.

Pentru aplicarea Teoremei 5.14 se identifică mai întâi următoarele:

$$C_{(1)}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a_{(1)}^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{(2)}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a_{(2)}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{(3)}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, a_{(3)}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

pentru care au loc (5.42). Ecuațiile (5.41) au soluții unice cu care se obține:

$$L_d^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A - L_d C = \mathrm{diag}\{-3, -3, -7\} \le -\beta I_3 = -1{,}5 I_3$$

Inecuația (5.40) este satisfăcută pentru orice $\alpha > 0$.

Pe de altă parte, se pot folosi şi inecuațiile (5.50) scrise în formă scalară:

$$2(1-z_{11}-z_{12})+|4-z_{11}|+|z_{12}| \le 2(1-w_{11}-w_{12})+|4-w_{11}|+|w_{12}|,$$
$$2|1-z_{21}-z_{22}|-3-z_{21}+|1-z_{22}| \le 2|1-w_{21}-w_{22}|-3-w_{21}+|1-w_{22}|,$$
$$2|1-z_{31}-z_{32}|+|-2-z_{31}|-4-z_{32} \le 2|1-w_{31}-w_{32}|+|-2-w_{31}|-4-w_{32}.$$

Cu restricțiile $|z_i| \le 4$ acestea trebuie să aibă loc pentru orice $|w_i| \le 4$. Se obțin:

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},\ F{=}A{-}LC = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix},\ \max_i \min_{l_i} f_i(l_i^T) = \\ = \max\{-5,-3,-8\} = -3 \le \beta = -1{,}5.$$

Pentru funcția de cost (5.53), folosind procedura de optimizare fmincon (*MATLAB Optimization Toolbox*) se obține acelaşi L şi $J_{\min} = -3$, [210]. Dacă este posibil $[1{,}8\ \ 0{,}9\ \ 0{,}9]^T \le \alpha \le [2{,}1\ \ 1{,}1\ \ 1{,}1]^T$, rezultă $J_{\min} = -4 \le -\beta = -1{,}5$, [210], adică se obține o rată de anulare a erorii mai mare ca în cazul precedent. □

b. Stabilizarea exponențial asimptotică pe componente

Fie sistemul (5.34), (5.35) cu reacția după stare:

$$u = -Kx + v,\quad v \in \mathbb{R}^m, \tag{5.54}$$

unde v este noua mărime de intrare şi K este matricea regulatorului după stare.

Înlocuind (5.54) în (5.34) se obține noua ecuație de stare:

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv. \tag{5.55}$$

Fie X_0 mulțimea tuturor stărilor inițiale posibile ale sistemului (5.55). Se defineşte hiperintervalul $X^\alpha \triangleq \{v \in \mathbb{R}^n; |v| \le \alpha\}$ astfel încât $X^\alpha \supseteq X_0$. În acest context se aplică sistemului (5.55) Teorema 5.11 (2) şi se obține rezultatul următor.

Teorema 5.18

Sistemul (5.55) este EASCαβ dacă şi numai dacă există K astfel încât

$$\overline{(A - BK)}\alpha \le -\beta\alpha\ . \ \square \tag{5.56}$$

Ca şi în cazul estimatorului de stare EASCαβ, o soluție radicală, în care (5.56) urmează să fie satisfăcută pentru orice $\alpha > 0$, constă în a determina matricea

K_d (dacă există) pentru care $H \triangleq A - BK_d$ are formă diagonală, $H_d \triangleq \mathrm{diag}\{h_{11},...,h_{nn}\}$ cu $h_{ii} \le -\beta,\ i = \overline{1,n}$.

Pentru formularea concisă a unui rezultat în acest sens se consideră ecuațiile:

$$B_{(i)} w_i = a_{(i)}^c,\ w_i \in \mathbb{R}^m,\quad i = \overline{1,n}, \tag{5.57}$$

în care $B_{(i)}$ şi $a_{(i)}^c$ se obțin eliminând linia b_i din B_i şi respectiv elementul a_{ii} din coloana a_i^c a matricei A.

Teorema 5.19

Există o matrice K_d astfel încât $A - BK_d = H_d \le -\beta I_n$ dacă şi numai dacă:

$$\mathrm{rank}\, B_{(i)} = \mathrm{rank}\left[B_{(i)},\, a_{(i)}^c\right],\ i = \overline{1,n}, \tag{5.58}$$

$$h_{ii} \triangleq \inf_{w_i \in \mathcal{W}_i}(a_{ii} - b_i w_i) \le -\beta,\ i = \overline{1,n}, \tag{5.59}$$

unde $\mathcal{W}_i \subseteq \mathbb{R}^m,\ i = \overline{1,n}$, sunt respectiv mulțimile de soluții ale ecuațiilor (5.57). □

Evident, soluțiile K_d pentru care $A - BK_d = H_d \le -\beta I_n$ sunt:

$$K_d \in \left\{\left[w_1, w_2, .., w_n\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}, w_i \in \mathcal{W}_i, i = \overline{1,n}; \max_{i=\overline{1,n}} \inf_{w_i \in \mathcal{W}_i}(a_{ii} - b_i w_i) \le -\beta\right\}. \tag{5.60}$$

Definiția 5.9

Sistemul (5.34) se numeşte *stabilizabil* EASC$\alpha\beta$ dacă există o matrice K şi $\alpha > 0$, $\beta > 0$ astfel încât sistemul (5.55) să fie EASC$\alpha\beta$. □

Ca şi în cazul estimatorului de stare EASC$\alpha\beta$, mulțimea $\mathcal{K}$ a matricelor K care satisfac (5.56) este convexă. Pe această cale se ajunge la o problemă de optimizare. Determinarea unei soluții K se bazează pe faptul că membrul stâng din (5.56) se poate exprima prin *măsura de matrice* ([187], [216]):

$$\mu_K \triangleq \lim_{\xi \downarrow 0} \xi^{-1}\left(\left\|I_n + \xi S^{-1}(A - BK)S\right\|_\infty - 1\right) = \left\|\sigma I_n + S^{-1}(A - BK)S\right\|_\infty - \sigma, \tag{5.61}$$

unde $S \triangleq \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, $\|\cdot\|_\infty$ este norma ∞ (v. Anexa A) şi $\sigma = \xi^{-1} >> 0$ este o constantă (arbitrară) foarte mare, aleasă astfel ca elementele diagonale ale matricei $\sigma I_n + S^{-1}(A - BK)S$ să fie strict pozitive. Se poate enunța rezultatul următor.

Teorema 5.20

Sistemul (5.34) este stabilizabil EASCαβ dacă şi numai dacă

$$\mu_K \leq -\beta \,. \;\square \tag{5.62}$$

Matricea K se poate determina pe baza minimizării funcției de cost:

$$J(K) = \left\| \sigma I_n + S^{-1}(A - BK)S \right\|_{\infty} - \sigma \tag{5.63}$$

prin proceduri numerice adecvate, pentru $\alpha > 0$ şi / sau $\beta > 0$ impuşi (fixați sau situați în intervale date), cu eventuale restricții privind elementele matricei K .

5.6. Sinteza comenzii alunecătoare

a. Condiții de alunecare

Fie sistemul dinamic neliniar continuu în timp:

$$\dot{x} = f(t,\, x,\, u(t,x)) \triangleq F(t,\, x),\; t \in \mathbb{R}_+,\; x \in \mathbb{R}^n,\; u \in \mathbb{R}^m , \tag{5.64}$$

în care $x \triangleq (x_i)$ este starea şi $u(t,x)$ este o lege de reglare după stare, discontinuă, având ca *domeniu de comutare* hiperplanul:

$$S \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n ;\; x_n = 0 \right\} . \tag{5.65}$$

Realizarea *mişcării alunecătoare* (engl. *sliding motion*) a stării x pe hiperplanul S către un punct de echilibru în $\mathbb{R}^n$ constă în aplicarea unei comenzi $u(t,x)$, sintetizată astfel încât să fie satisfăcute următoarele trei condiții:

(a) <u>Condiția de atingere</u>. Pentru fiecare stare inițială $x(t_0) = x_0$, satisfăcând $(t_0,\, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^n \setminus S)$, starea $x(t)$, pe parcursul intervalului finit de timp $[t_0,\, \tau],\; \tau > t_0$, ajunge într-un *punct de atingere* al hiperplanului S . Acesta se numeşte *procesul de atingere*.

(b) <u>Condiția de mişcare alunecătoare ideală</u>. Din *momentul atingerii*, τ , a hiperplanului S, starea sistemului evoluează numai în hiperplanul S . Aceasta se numeşte *mişcare alunecătoare ideală* şi S se numeşte *domeniu de alunecare ideal*.

(c) <u>Condiția de stabilitate a mişcării alunecătoare ideale</u>. Mişcarea de alunecare ideală trebuie să fie asimptotic stabilă către un punct de echilibru (uzual şi convențional $x = 0$) aparținând lui S .

Cronologic, condițiile (a) şi (b) trebuie să aibă loc succesiv, în timp ce (b) şi (c) – simultan. Cu alte cuvinte, pentru fiecare $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^n \setminus S)$ evoluția sistemului (5.64) către punctul de echilibru $x = 0$ acoperă două intervale de timp *concatenate*: primul – $[t_0, \tau]$ finit, conform condiției (a), şi al doilea – $(\tau, t_f]$ finit sau nu, conform condițiilor (b) şi (c). Concatenarea *procesului de atingere* cu *procesul de mişcare de alunecare ideală* – care trebuie să urmeze imediat – este esențială şi totodată naturală pentru evoluția sistemului către punctul de echilibru.

b. Rezultate pregătitoare

Această concatenare se tratează unitar folosind adecvat Teorema 5.2. În acest scop, fie $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (v. (5.64)), continuă şi local lipschitziană. Pentru fiecare $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^n \setminus S)$ sistemul (5.64) are o soluție unică $x(t)$, cu $x(t_0) = x_0$, definită pe un interval maximal de timp $(t_a, t_b) \subseteq \mathbb{R}_+$, cu $t_0 \in (t_a, t_b)$.

Soluțiile $x^-(t) = x(t), t \in (t_a, t_0]$, şi $x^+(t) = x(t), t \in [t_0, t_b)$, se numesc respectiv *soluția la stânga* (sau *negativă*) şi *la dreapta* (sau *pozitivă*) prin (t_0, x_0).

Definiția 5.10

O mulțime $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+$, se numeşte *negativ* sau *pozitiv invariantă* (de flux) pentru sistemul (5.64) dacă pentru fiecare $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ au loc respectiv condițiile $x^-(t) = x(t) \in X(t), t \in (t_a, t_0]$ sau $x^+(t) = x(t) \in X(t), t \in [t_0, t_b)$. □

Teorema 5.21

$X(t)$ este pozitiv invariant pentru sistemul (5.64) dacă şi numai dacă $\mathbb{R}^n \setminus X(t)$ este negativ invariant pentru acelaşi sistem. □

Pentru $X(t)$ definit de (5.8), cu $\underline{a} \triangleq \left(\underline{a}_i(t)\right)$ şi $\overline{a} \triangleq \left(\overline{a}_i(t)\right)$, şi sistemul (5.64), cu $F \triangleq (F_i)$, prin aplicarea Teoremei 5.2 se obține rezultatul următor.

Teorema 5.22

$X(t)$ definit de (5.8) este pozitiv invariant pentru (5.64) dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} F_i(t, x_1, .., x_{i-1}, \underline{a}_i(t), x_{i+1}, .., x_n) \geq \dot{\underline{a}}_i(t), \\ F_i(t, x_1, .., x_{i-1}, \overline{a}_i(t), x_{i+1}, .., x_n) \leq \dot{\overline{a}}_i(t), \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X(t), \ i = \overline{1, n}. \square \end{cases} \tag{5.66}$$

c. Structura de flux indusă de mişcarea alunecătoare

Cu Teoremele 5.21, 5.22 se evaluează invarianţa de flux a sistemului cu structură variabilă (5.64), constituit din două subsisteme comutante, de forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} F^{-}(t, x), \ x \in S^{-}, \\ F^{+}(t, x), \ x \in S^{+}, \ \ t \in \mathbb{R}_{+}, \end{cases} \tag{5.67}$$

în care $S^{-} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n < 0\}$, $S^{+} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ sunt *submulţimile de funcţionare* şi $F^{\mp} : \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sunt continue şi local lipschitziene.

Pentru evaluarea structurii de flux se consideră şi sistemele distincte:

$$\dot{x} = F^{-}(t, x), \ \ (t, x) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n, \tag{5.68}$$

$$\dot{x} = F^{+}(t, x), \ \ (t, x) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n, \tag{5.69}$$

numite *subsistemele S-adiacente* ale sistemului (5.67).

Definiţia 5.11

Suprafaţa de comutare S este un *domeniu de mişcare alunecătoare ideală* al sistemului (5.67) dacă S nu conţine segmente de traiectorie ale sistemelor adiacente (5.68), (5.69) şi pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x^* \in S$ există o vecinătate V^* a lui x^* astfel încât pentru fiecare $x_0 \in V^* \setminus S$ starea sistemului (5.67) evoluează în interiorul domeniului $S_\varepsilon \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x_n| \le \varepsilon\}$ pentru $t \in [t_0, +\infty)$. □

Teorema 5.23

Dacă sistemele S-adiacente nu au segmente de traiectorii pe S atunci pentru sistemul (5.67) următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) S este un domeniu de mişcare alunecătoare ideală.

(b) Fiecare submulţime de funcţionare este negativ invariantă pentru propriul subsistem comutant.

(c) Complementara fiecărei submulţimi de funcţionare este pozitiv invariantă pentru subsistemul comutant al respectivei submulţimi de funcţionare.

(d) $\lim_{h \downarrow 0} \inf h^{-1} d(x + hF^{\mp}(t, x); S \cup S^{\pm}) = 0,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}_{+} \times (S \cup S^{\mp})$. (5.70)

(e) $$\begin{cases} F_n^{-}(t, x_1, ..., x_{n-1}, 0) \ge 0, \\ F_n^{+}(t, x_1, ..., x_{n-1}, 0) \le 0, \ \forall (t, [x_1, ..., x_{n-1}]^T) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^{n-1}. \square \end{cases} \tag{5.71}$$

Condițiile (c) şi (d) evidențiază structura de flux a sistemului (5.67) indusă de mişcarea alunecătoare ideală. Totodată, folosind condiția necesară şi suficientă (e), formulată pe hiperplanul S, se rezolvă problema mişcării de alunecare ideale şi a sintezei comenzii de alunecare $u(t, x)$. Aceasta spre deosebire de condițiile suficiente clasice care trebuie să fie satisfăcute într-o vecinătate a lui S, [222].

d. Procesul de atingere – precursor în flux al mişcării de alunecare ideale

Procesul de atingere poate fi caracterizat cu ajutorul Teoremei 5.22 aşa cum se sugerează în Teorema 5.23 (b).

Teorema 5.24

Pentru fiecare $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^n \setminus S)$ starea sistemului (5.67) atinge domeniul de alunecare ideală S dacă şi numai dacă există o funcție diferențiabilă $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dependentă de (t_0, x_0), care satisface următoarele condiții:

(a) Exista $\tau \in (t_0, +\infty)$ astfel încât $r(\tau) = 0$.

$$\text{(b)} \begin{cases} \text{Dacă } x_{0n} < 0, \text{ atunci } x_{0n} \geq r(t_0), \\ \text{Dacă } x_{0n} > 0, \text{ atunci } x_{0n} \leq r(t_0); \; x_{0n} \triangleq x_n(t_0). \end{cases} \tag{5.72}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} \text{Dacă } x_{0n} < 0, \text{atunci } F_n^-(t, x_1, .., x_{n-1}, r) \geq \dot{r}, \qquad (5.73) \\ \text{Dacă } x_{0n} > 0, \text{atunci } F_n^+(t, x_1, .., x_{n-1}, r) \leq \dot{r}, \forall (t, [x_1 ... x_{n\text{-}1}]^T) \in [t_0, \tau] \times \mathbb{R}^{n\text{-}1}. \square \end{cases}$$

Teorema 5.24 este consistentă cu condițiile (5.71) deoarece pentru $r(t) \equiv 0$ în (5.73) se obține (5.71). Condițiile (5.71) sunt echivalente cu existența unui domeniu de alunecare ideală. Rezultă că Teorema 5.24 include mişcarea de alunecare ca o parte cronologic subsecventă a procesului de atingere. Pentru sinteza comenzii de alunecare $u(t, x)$, trebuie să se caute o *funcție de atingere* $r(t)$ care să permită, într-o anumită măsură, prescrierea vitezei procesului de atingere.

e. Comanda alunecătoare a unui sistem dinamic liniar perturbat

Se consideră sistemul dinamic liniar constant:

$$\dot{x} = Ax + bu + Dz, \; t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^q, \tag{5.74}$$

unde starea x este direct măsurabilă, u este comanda scalară, şi z este perturbația; $A \triangleq (a_{ij}), b \triangleq (b_j), D \triangleq (d_{ij})$ sunt matrice reale constante de dimensiuni adecvate.

Se asociază sistemului (5.74) hiperplanul de comutare:

$$S_c \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ s \triangleq c^T x = 0\right\}, \tag{5.75}$$

în care $c \triangleq [c_1 \ldots c_{n-1}\ \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Se foloseşte în continuare transformarea:

$$\tilde{x} \triangleq [x_1 \ldots x_{n-1}\ s]^T = Px,\ \ P \triangleq \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline c_{(n)}^T & 1 \end{array}\right], \tag{5.76}$$

în care I_{n-1} este matricea unitate de ordinul $n-1$ şi $c_{(n)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ se obține eliminând $c_n = 1$ din c. Cu (5.76) sistemul (5.74) devine:

$$\dot{x}_{(n)} = Ex_{(n)} + a_{(n)}^c s + b_{(n)} u + D_{(n)} z\,, \tag{5.77}$$

$$\dot{s} = \sum\nolimits_{i=\overline{1,n}} c^T (a_i^c - c_i a_n^c) x_i + c^T a_n^c s + c^T bu + c^T D z\,, \tag{5.78}$$

în care $E \triangleq (a_{ij} - a_{in} c_j) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$; $D_{(n)}$ se obține eliminând linia a n-a din D; a_i^c este coloana i a lui A; $x_{(n)}, a_{(n)}^c, b_{(n)}$ se obțin eliminând componenta a n-a respectiv din x, a_i^c, b.

Conform Teoremelor 5.23 şi 5.24, urmează că pentru sinteza comenzii se utilizează numai (5.78). Pentru $c^T b \neq 0$ comanda de alunecare se alege astfel:

$$u = -u_r(s) - u_s(x_{(n)}) - u_z(x_{(n)})\,, \tag{5.79}$$

în care $u_r(s), u_s(x_{(n)})$ şi $u_z(x_{(n)})$ comandă respectiv procesul de atingere, mişcarea de alunecare ideală şi rejecția perturbației z. Acestea au expresiile:

$$u_r(s) = \rho s + \delta_r,\ \ \delta_r = \begin{cases} \delta_0, & s < 0, \\ 0, & s = 0, \\ -\delta_0, & s > 0, \end{cases} \tag{5.80}$$

$$u_s(x_{(n)}) = \sum_{i \in J} \psi_i x_i,\ \psi_i = \begin{cases} \beta_i, x_i s < 0 \\ \alpha_i, x_i s > 0 \end{cases},\ J \triangleq \left\{ i \in \{1,..,n-1\}; c^T (a_i^c - c_i a_n^c) \neq 0 \right\}, \tag{5.81}$$

$$u_z(x_{(n)}) = \begin{cases} \beta_0, & s < 0, \\ \alpha_0, & s > 0. \end{cases} \tag{5.82}$$

$\rho, \delta_0, \alpha_i, \beta_i \ (i \in J), \alpha_0, \beta_0$ sunt parametri ajustabili. Aceştia se determină utilizând condiția (5.71) pentru ecuația (5.78). Se obține următorul rezultat.

Teorema 5.25

S este domeniul de alunecare ideală pentru sistemul (5.74), (5.79), cu $c^T b \neq 0$, dacă şi numai dacă

$$\alpha_i c^T b \geq c^T (a_i^c - c_i a_n^c), \ \beta_i c^T b \leq c^T (a_i^c - c_i a_n^c), \ i \in J, \qquad (5.83)$$

$$\alpha_0 c^T b \geq \sup_t c^T Dz(t), \quad \beta_0 c^T b \leq \inf_t c^T Dz(t). \ \square \qquad (5.84)$$

Pentru a realiza procesul de atingere ca precursor al mişcării de alunecare ideale, se alege funcția de atingere:

$$r(t) = \begin{cases} \left[(|s_0| + \delta) e^{-\lambda(t-t_0)} - \delta\right] \operatorname{sgn}(s), & t \in [t_0, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, t_f), \end{cases} \qquad (5.85)$$

cu $s_0 \triangleq s(x_0) = s(x(t_0))$ şi $\delta > 0, \lambda > 0, \tau > t_0$ – parametri precizabili. Condițiile (a) şi (b) din Teorema 5.24 au loc pentru $r(\tau) = 0$, $\tau = t_0 + \lambda^{-1} \ln\left(1 + |s_0|/\delta\right) > t_0$). Folosind (5.73) pentru (5.80) – (5.82) se formulează rezultatul următor.

Teorema 5.26

Pentru fiecare $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^n \setminus S)$ starea sistemului (5.74), (5.79), cu $c^T b \neq 0$, atinge domeniul de alunecare ideală S dacă şi numai dacă

$$\rho c^T b \geq c^T a_n^c + \lambda, \quad \delta_0 c^T b \leq c^T a_n^c. \ \square \qquad (5.86)$$

Relațiile (5.79) – (5.82) şi (5.83) – (5.86) definesc comanda de alunecare ideală astfel încât să aibă loc condițiile de alunecare ideală (a) şi (b) (v. 5.6.a).

Soluția ecuației $\dot{s} = 0$ (cu (5.78)) se înlocuieşte în (5.77) şi se obține:

$$\dot{x}_{(n)} = A^1 x_{(n)} + D^1 z, \qquad (5.87)$$

în care matricele A^1, D^1 rezultă din calcule. Dacă $\operatorname{rank} b = \operatorname{rank}[b, D]$, atunci $D^1 = 0$ şi rejecția perturbației z este asigurată.

Stabilitatea sistemului (5.87) depinde numai de A^1 şi poate fi îmbunătățită printr-o reacție după stare (v. III.4.1). În acest fel, din orice $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus S$ starea sistemului evoluează cu viteză prescrisă către S şi apoi, asimptotic, către $x = 0$.

Capitolul VI
CONDUCEREA OPTIMALĂ A SISTEMELOR DINAMICE

1. Indici de calitate

În aplicațiile de conducere a sistemelor dinamice se pune frecvent problema determinării unei astfel de comenzi încât, dintr-un anumit punct de vedere, să se realizeze o comportare optimă (în latină, *optimus* ~ cel mai bun). Ca măsură a optimalității (prin care se precizează punctul de vedere amintit) se utilizează un *indice de calitate* J . Acesta se mai numeşte *funcție de calitate*, *funcție de performanță* sau *funcție de cost* şi se exprimă matematic printr-o funcțională reală. De regulă, aceasta este o integrală definită dependentă de mărimile de comandă şi / sau de stare. Evident, o comportare optimă în raport cu un anumit indice de calitate nu asigură o comportare similară în raport cu un alt indice de calitate.

Comportarea optimă a unui sistem constă în aceea că sub acțiunea *comenzii optimale*, pe un interval de timp, are loc *extremizarea* (fie *minimizarea*, fie *maximizarea*) indicelui de calitate J şi *realizarea* anumitor condiții privind starea sistemului la limitele acelui interval de timp. Cu alte cuvinte, *conducerea optimală* este o problemă de sinteză a sistemelor dinamice. Soluționarea ei constă în determinarea comenzii care asigură extremizarea indicelui de calitate şi realizarea transferului stării sistemului între starea inițială şi starea finală.

1.1. Exemple de indici de calitate

a. Problema timpului minim

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ astfel încât tranziția din starea inițială $x_0 = x(\tau)$ la starea finală $x_f = x(\theta)$ să se facă în timpul minim posibil. Indicele de calitate de minimizat are forma:

$$J = \int_\tau^\theta dt = \theta - \tau = T . \tag{1.1}$$

b. Problema stării finale

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ astfel încât starea finală efectiv realizată $x(\theta) = x_f$ să fie cât mai apropiată de o stare finală dorită $x_d(\theta)$, liberă sau fixată. Indicele de calitate de minimizat este:

$$J = [x_d(\theta) - x(\theta)]^T M [x_d(\theta) - x(\theta)], \tag{1.2}$$

în care

$$e(t) \triangleq x_d(t) - x(t) \tag{1.3}$$

este eroarea dintre stările dorită şi curentă şi M – matrice simetrică, pozitiv definită (v. Anexa C), de ponderare a componentelor lui e. Dacă $M = I_n$, (1.2) devine:

$$J = \| e(\theta) \|^2 . \tag{1.4}$$

c. Problema efortului minim

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ astfel încât tranziția din starea inițială $x_0 = x(\tau)$ la starea finală $x_f = x(\theta)$ să se facă cu un efort total de comandă minim. Este cazul consumului minim de combustibil, u fiind debitul de combustibil. Indice de calitate de minimizat este:

$$J = \int_\tau^\theta \sum_{i=1}^m r_i \left| u_i(t) \right| dt , \tag{1.5}$$

în care u_i sunt componentele lui u şi $r_i > 0$ sunt coeficienți de ponderare.

d. Problema energiei minime

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ astfel încât tranziția din starea inițială $x_0 = x(\tau)$ la starea finală $x_f = x(\theta)$ să se facă cu un consum total de energie de comandă minim. Ca indice de calitate de minimizat se utilizează integrala unei forme pătratice:

$$J = \int_\tau^\theta u^T(t) R u(t)\, dt , \tag{1.6}$$

în care R este o matrice reală, simetrică, pozitiv definită (v. Anexa C), de pondere a componentelor lui u. Înlocuind $R = I_m$, (1.6) devine (v. şi Observația II.1.1):

$$J = \int_{\tau}^{\theta} \| u(t) \|^2 \, dt \,. \tag{1.7}$$

e. Problema urmăririi

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ astfel încât, pe parcursul tranziției din starea inițială $x_0 = x(\tau)$ la starea finală $x_f = x(\theta)$, starea $x(t)$ a sistemului să urmărească o stare dorită $x_d(t)$ cu o eroare pătratică medie minimă pe $[\tau,\ \theta]$. Ca indice de calitate de minimizat se utilizează:

$$J = \int_{\tau}^{\theta} [x_d(t) - x(t)]^T Q [x_d(t) - x(t)] \, dt \,, \tag{1.8}$$

în care Q este o matrice reală, simetrică, pozitiv definită (v. Anexa C), de ponderare a componentelor erorii (1.3). Dacă $Q = I_n$, ținând seama de (1.3), indicele (1.8) devine:

$$J = \int_{\tau}^{\theta} \| e(t) \|^2 \, dt \,. \tag{1.9}$$

f. Probleme combinate

În afara problemelor specializate prezentate mai sus, se pot formula şi probleme combinate. De exemplu, în problema urmăririi (indicele (1.8)), comanda optimală $u^*(t)$ poate avea componente de valori prea mari, dificil de realizat practic. Indici de calitate prin care se pot elimina aceste dificultăți sunt următorii:

$$J = \int_{\tau}^{\theta} \left\{ e^T(t) Q e(t) + \sum\nolimits_{i=1}^{m} r_i \left| u_i(t) \right| \right\} dt \,, \tag{1.10}$$

$$J = \int_{\tau}^{\theta} \left\{ e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt \,, \tag{1.11}$$

$$J = e^T(\theta) M e(\theta) + \int_{\tau}^{\theta} \left\{ e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt \,, \tag{1.12}$$

care, cu notația (1.3), reprezintă combinații între (1.5) şi (1.8), (1.6) şi (1.8), sau respectiv (1.2), (1.6) şi (1.8).

De asemenea, trebuie subliniat că toate problemele şi indicii de mai sus pot fi definiți şi pentru mărimea de ieşire $y(t)$ (înlocuind x cu y şi făcând toate adaptările necesare).

1.2. Forme generale ale indicelui de calitate

Rolul indicelui de calitate J este de a agrega condiții privitoare la comanda $u(t)$, la starea $x(t)$, la momentul final θ şi la starea finală x_f. Momentul inițial τ şi starea inițială x_0 fiind, de regulă, fixate şi cunoscute, nu se includ, în J. Evident, $x(t)$ depinde de $u(t)$ conform ecuațiilor de stare ale sistemului dinamic.

După forma indicelui de calitate se disting următoarele trei cazuri:

<u>Problema Lagrange</u>

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ care să extremizeze funcționala:

$$J(u)=\int_{\tau}^{\theta} F\big(t,\, x(t),\, u(t)\big)\,d\,t\,. \tag{1.13}$$

F este o funcție scalară suficient derivabilă prin care se precizează condiții privind atât evoluția stării cât şi a comenzii pe intervalul $[\tau,\,\theta]$.

În această problemă se încadrează indicii (1.5) şi (1.11).

<u>Problema Bolza</u>

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ care să extremizeze funcționala:

$$J(u)=G(\theta,x_f)+\int_{\tau}^{\theta} F\big(t,\, x(t),\, u(t)\big)\,d\,t\,. \tag{1.14}$$

$F,\, G$ sunt funcții scalare suficient derivabile care includ condiții privind starea şi comanda pe intervalul $[\tau,\,\theta]$, precum şi starea finală.

În această problemă se încadrează indicele de calitate (1.12).

Pentru $G\equiv 0$ indicele Bolza (v. (1.14)) devine indicele Lagrange (v. (1.13)).

<u>Problema Mayer</u>

Pentru un sistem dinamic dat să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ care să extremizeze funcționala:

$$J(u)=G(\theta,x_f)\,. \tag{1.15}$$

Acest indice este un caz particular al indicelui de tip Bolza (cu $F\equiv 0$ în (1.14)). În problema Mayer se încadrează indicii de calitate (1.2) şi (1.4).

2. Rezultate fundamentale

Starea $x(t)$ a unui sistem dinamic depinde de comanda $u(t)$ prin ecuațiile de stare. De aici rezultă că sinteza conducerii optimale pe baza unui indice de calitate este o *problemă de extremum cu legături*, în care legăturile sunt înseşi ecuațiile de stare ale sistemului (după cum se va vedea în secțiunile 3.1 şi 3.2).

La legăturile prin ecuațiile de stare se pot adăuga şi alte tipuri de legături, numite *legături suplimentare*. Este vorba de *legături punctuale* şi / sau de *legături globale*. Legăturile suplimentare punctuale se referă la evoluția sistemului în anumite domenii în spațiul comenzilor şi respectiv în spațiul stărilor. Legăturile suplimentare globale se referă la evoluția sistemului astfel încât să se asigure invarianța în medie şi / sau mărginirea în medie a anumitor indici de calitate.

Problemele cu legături suplimentarea vor fi studiate în secțiunea 3.3.

2.1. Definiții

Calculul variațional are ca obiect studiul extremelor funcționalelor de forma (1.14). În acest capitol se au în vedere funcționale definite după cum urmează:

$$J : \Omega \to \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

în care Ω este un spațiu de funcții, liniar, normat. $u \in \Omega$ este o funcție continuă de timp $u : [\tau, \theta] \to \mathbb{R}^m$, cu $\theta > \tau \geq 0$, care satisface *condițiile la limite liniare*:

$$\Gamma_0[u(\tau)] = \gamma_0\,,\ \Gamma_f[u(\theta)] = \gamma_f\,, \tag{2.2}$$

în care Γ_0, Γ_f şi γ_0, γ_f sunt funcții liniare şi respectiv constante cunoscute.

Definiția 2.1

Funcția $u \in \Omega$ se numeşte *admisibilă* dacă satisface condițiile (2.2). □

Definiția 2.2

Dacă u şi $u + \delta u$ sunt funcții admisibile, atunci

$$\Delta J(u, \delta u) = J(u + \delta u) - J(u) \tag{2.3}$$

se numeşte *creşterea funcționalei* $J(u)$. Funcția $\delta u \in \Omega$ se numeşte *variația funcției* u. □

Condițiile la limite liniare (2.2), induc pentru δu condițiile la limite omogene:

$$\Gamma_0[\delta u(\tau)] = 0\,,\;\; \Gamma_f[\delta u(\theta)] = 0\,. \tag{2.4}$$

Definiția 2.3

Creşterea funcționalei $J(u)$ se exprimă sub forma:

$$\Delta J(u,\,\delta u) = \delta J(u,\,\delta u) + g(u,\,\delta u)\|\,\delta u\,\|\,, \tag{2.5}$$

unde δJ este partea liniară în δu şi $g(u,\delta u)\|\delta u\|$ – partea neliniară în δu, în care $\|\cdot\|$ este norma pe spațiul de funcții Ω. Dacă funcția $g(u,\delta u)$ satisface condiția:

$$\lim_{\delta u\to 0} g(u,\,\delta u) = 0\,, \tag{2.6}$$

atunci $J(u)$ se numeşte *diferențiabilă* în raport cu u.

δJ se numeşte *variația* (*întâia a*) *funcționalei* $J(u)$. □

Ca urmare, pentru $\|\delta u\|$ suficient de mic are loc $|g(u,\delta u)| < |\delta J(u,\delta u)|$. În această situație, creşterea (2.5) se poate aproxima prin variația δJ astfel:

$$\Delta J(u,\,\delta u) \cong \delta J(u,\,\delta u)\,. \tag{2.7}$$

Definiția 2.4

Funcționala $J(u)$ are pentru $u = u^*$, admisibilă, un *extrem relativ* $J(u^*)$, dacă există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $u = u^* + \delta u$, admisibilă şi satisfăcând $\|u - u^*\| < \varepsilon$, creşterea $\Delta J(u^*,\,\delta u) = J(u) - J(u^*)$, are acelaşi semn.

Dacă

$$\Delta J(u^*,\,\delta u) = J(u) - J(u^*) \ge 0\,, \tag{2.8}$$

atunci $J(u^*)$ este un *minim relativ*.

Dacă

$$\Delta J(u^*,\,\delta u) = J(u) - J(u^*) \le 0\,, \tag{2.9}$$

atunci $J(u^*)$ este un *maxim relativ*.

Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ au loc fie (2.8), fie (2.9), atunci $J(u^*)$ este un *minim absolut*, respectiv un *maxim absolut*.

Funcția admisibilă u^* se numeşte *extremală* a funcționalei $J(u)$. □

2.2. Condiții necesare

a. O condiție necesară de extrem

Teorema 2.1

Fie $J(u)$ o funcțională diferențiabilă. O condiție necesară ca u^* să fie o extremală a lui $J(u)$ este ca pentru orice δu, cu $\|\delta u\| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$, să aibă loc:

$$\delta J(u^*,\, \delta u) = 0\,. \tag{2.10}$$

$\mathscr{D}$. Prin ipoteză u^* este extremală a lui $J(u)$. Pentru $u = u^*$ şi $\varepsilon > 0$ suficient de mic, conform cu (2.7), creşterea lui $J(u)$ se aproximează prin:

$$\Delta J(u^*,\, \delta u) \cong \delta J(u^*,\, \delta u), \quad \|\delta u\| < \varepsilon\,. \tag{2.11}$$

Se presupune, prin absurd, că (2.10) nu are loc. Fie de pildă

$$\delta J(u^*,\, \delta u) > 0\,. \tag{2.12}$$

Din (2.11) şi (2.12) rezultă:

$$\Delta J(u^*, \delta u) > 0\,. \tag{2.13}$$

Considerând acum variația $-\delta u$, care satisface $\|-\delta u\| < \varepsilon$, (2.11) devine:

$$\Delta J(u^*,\, -\delta u) \cong \delta J(u^*,\, -\delta u) = -\delta J(u^*,\, \delta u), \quad \|-\delta u\| < \varepsilon\,. \tag{2.14}$$

În aceste condiții, din (2.14) şi (2.12) se obține:

$$\Delta J(u^*, -\delta u) < 0\,. \tag{2.15}$$

Relațiile (2.13) şi (2.15) arată că $\Delta J(u^*, \pm\delta u)$ nu are acelaşi semn. Acest rezultat contrazice faptul că u^* este extremală a funcționalei $J(u)$. Demonstrația pornind de la presupunerea că $\delta J(u^*,\, \delta u) < 0$ (în loc de (2.12)) este similară. □

Observația 2.1

Pentru a aplica această teoremă se calculează creşterea $\Delta J(u^*,\, \delta u)$. În acest scop se dezvoltă funcționala $J(u)$ în serie Taylor în u^*, cu $\|u^* - u\| = \|\delta u\| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Se extrage apoi termenul liniar în variația δu, care de fapt este δJ. □

Exemplul 2.1

Pentru următoarea funcțională:

$$J(u) = \int_{\tau}^{\theta} F\big(u(t)\big)dt\,, \tag{2.16}$$

cu $\tau < \theta$ fixați, să se determine variația $\delta J(u^*, \delta u)$ și să se aplice Teorema 2.1.

Pentru $u = u^* + \delta u$, se explicitează $\delta u = \alpha\eta$. η este funcție admisibilă și $\alpha \in \mathbb{R}$ este variabila în care se dezvoltă $J(u)$ în serie Taylor. Se scrie:

$$\Delta J(u^*, \delta u) = J(u^* + \alpha\eta) - J(u^*)\,,$$

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \underbrace{J(u^* + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}}_{\cancel{J(u^*)}} + \frac{d\,J(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2 J(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha^2 + \ldots - \cancel{J(u^*)}\,,$$

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \frac{d\,J(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha^2 + \ldots\,. \tag{2.17}$$

Termenul liniar în $\delta u = \alpha\eta$, respectiv în α este variația căutată:

$$\delta J(u^*, \delta u) = \frac{d\,J(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = \int_{\tau}^{\theta}\frac{dF(u)}{d\alpha}dt\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = \int_{\tau}^{\theta}\frac{\partial F(u)}{\partial u}\frac{du}{d\alpha}dt\Bigg|_{\alpha=0}\alpha =$$

$$= \int_{\tau}^{\theta}\frac{\partial F(u^* + \alpha\eta)}{\partial u}\frac{d\,(u^* + \alpha\eta)}{d\alpha}dt\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = \int_{\tau}^{\theta}\frac{\partial F(u^*)}{\partial u}\alpha\eta dt\,.$$

În rezultatul de mai sus s-a notat:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \triangleq (\mathrm{grad}_u F)^T \triangleq \left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_m}\right] \tag{2.18}$$

și $\mathrm{grad}_u F$ este *vectorul gradient*, în raport cu vectorul u, al funcției scalare F.

Prin urmare

$$\delta J(u^*, \delta u) = \int_{\tau}^{\theta}\big[\mathrm{grad}_u F(u^*)\big]^T \delta u\, dt\,, \tag{2.19}$$

adică variația δJ a funcționalei (2.16) se obține derivând integrala din (2.16) în raport cu vectorul u şi înmulțind integrandul cu variația δu.

Pentru (2.16), din (2.10), (2.19) rezultă condiția necesară de extremum:

$$\int_\tau^\theta \left[\operatorname{grad}_u F(u^*)\right]^T \delta u dt = 0, \quad \forall \delta u \in \Omega. \ \square \tag{2.20}$$

Faptul că indicele de calitate (2.16) depinde numai de u a permis determinarea relativ simplă a variației δJ. Pentru indicele general (1.14) se va ține seama de legătura dintre x şi u prin ecuația sistemului (v. secțiunile 3.1 şi 3.2).

Observația 2.2

Simplitatea condiției necesare (2.10) este doar aparentă. Acest fapt este imediat vizibil din rezultatul (2.20) a cărui utilizare nu este posibilă imediat. Pentru a transforma condiția necesară de extremum (2.20) într-un rezultat mai simplu, utilizabil în aplicații, se foloseşte rezultatul din paragraful următor. □

b. Lema fundamentală a calcului variațional

Pentru aplicarea Teoremei 2.1 se va utiliza următorul rezultat.

Teorema 2.2

Fie funcția continuă $\varphi : [\tau, \theta] \to \mathbb{R}^m$. Dacă

$$\int_\tau^\theta \varphi^T(t)\delta u(t) dt = 0 \tag{2.21}$$

pentru orice funcție continuă $\delta u : [\tau, \theta] \to \mathbb{R}^m$, atunci

$$\varphi(t) = 0, \ \ t \in [\tau, \theta]. \tag{2.22}$$

$\mathscr{D}$. Vectorul δu este arbitrar. Rezultă că ipoteza (2.21) are loc şi pe componentele vectorului φ. Aceasta reduce demonstrația la cazul scalar ($m = 1$).

Se presupune, prin absurd, că există un $\sigma \in [\tau, \theta]$ pentru care $\varphi(\sigma) > 0$. În virtutea continuității, $\varphi(t) > 0$ pentru $t \in [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Pentru o funcție

$$\delta u(t) = \begin{cases} (t - \sigma + \varepsilon)^2 (t - \sigma - \varepsilon)^2, & t \in [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon], \\ 0 & , \ t \notin [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon], \end{cases}$$

care satisface condiția de continuitate, se obține:

$$\int_{\tau}^{\theta}\varphi(t)\,\delta u(t)\,dt=\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\varphi(t)\,\delta u(t)\,dt>0\,.$$

Acest rezultat contrazice ipoteza (2.21). La o contradicție similară se ajunge presupunând $\varphi(t)<0$, $t\in[\sigma-\varepsilon,\sigma+\varepsilon]$. Urmează că (2.22) este adevărată. □

Exemplul 2.1 (continuare)

Se revine la condiția necesară (2.20). Ținând seama de Teorema 2.2, o condiție necesară ca $u^*(t)$ să fie o extremală a funcționalei (2.16) este ca

$$\mathrm{grad}_u F(u^*)=0,\quad t\in[\tau,\theta]\,.\ \square \tag{2.23}$$

Observația 2.3

Pentru a evalua dacă $J(u^*)$ este un minim / maxim relativ, se studiază semnul creşterii ΔJ (v. Definiția 2.4). Din (2.17) se observă că, pentru $|\alpha|$ suficient de mic, semnul creşterii $\Delta J(u^*,\delta u)$ este dat de $(d^2J/d\alpha^2)_{\alpha=0}$, respectiv de *matricea hessiană* $\partial^2F[u^*(t)]/\partial u^2$.

În aplicații, de regulă, se alege o funcțională J (local) convexă / concavă astfel încât să se asigure din start existența unui minim / maxim (relativ). □

Exemplul 2.2

Se consideră indicele de calitate

$$J(u)=\int_0^{\theta}\left[\left(u(t)-e^{-t}\right)^2+u^2(t)\right]dt\,,$$

în care $\theta>0$ este fixat şi cunoscut şi $u:[0,\theta]\to\mathbb{R}$ este continuă. $J(u)$ fiind convexă, să se determine extremala u^* care minimizează funcționala $J(u)$.

Pentru $F(u)=(u-e^{-t})^2+u^2$, aplicând condiția necesară (2.23), rezultă:

$$\partial F/\partial u=2(u^*-e^{-t})+2u^*=0\,,$$

$$u^*(t)=e^{-t}/2,\ t\in[0,\theta]\,.$$

Întrucât pentru $t\ge 0$ are loc $\partial^2F/\partial u^2=4>0$, rezultă că

$$J(u^*)=\int_0^{\theta}(e^{-2t}/2)\,dt=(1-e^{-2\theta})/4$$

este valoarea minimă a indicelui de calitate. □

3. Sinteza comenzii optimale

3.1. Formularea problemei

a. Formulare preliminară

Fie un sistem dinamic descris de ecuația vectorială de stare:

$$\dot{x} = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [\tau, \theta] \subseteq \mathbb{R}_+, \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \Omega, \tag{3.1}$$

cu *momentul inițial* τ fixat, *starea inițială* x_0 fixată şi condiția la limita inițială:

$$x(\tau) = x_0 . \tag{3.2}$$

Se admite ca ipoteză că problema Cauchy (3.1), (3.2) are o soluție unică.

Se cere determinarea unei extremale $u^*(t)$, care extremizează funcționala (1.14) (Bolza) şi care transferă starea $x(t)$ din momentul τ şi starea x_0, cu (3.2), până în *momentul final* θ şi *starea finală* x_f, cu condiția la limita finală:

$$x(\theta) = x_f . \tag{3.3}$$

Observația 3.1

Condiția (3.3) comportă următoarele precizări:

1° Privitor la momentul final θ, se disting următoarele două cazuri:
   a. *Orizont finit fixat*: θ este fixat şi cunoscut.
   b. *Orizont finit liber*: θ nu este precizat explicit; indicele de calitate conține informații despre θ; exemplul tipic este cel al minimizării duratei $T = \theta - \tau$ a transferului (v. paragraful 1.1.a).

2° Privitor la starea finală x_f, se disting următoarele două cazuri:
   a. *Starea finală fixată*: x_f este fixat şi cunoscut.
   b. *Starea finală liberă*: x_f nu este precizat explicit; indicele de calitate conține informații despre x_f; exemplul tipic este cel al minimizării erorii finale (v. paragraful 1.1.b).

3° Evident, în cazul în care θ şi x_f sunt fixați, termenul $G(\theta, x_f)$ din indicele de calitate (1.14) este o constantă cunoscută şi independentă de extremala

$u^*(t)$. În această situație este firesc să se adopte de la început $G(\theta,\, x_f) \equiv 0$. Pentru θ şi / sau x_f liberi, prin $G(\theta,\, x_f)$ se pot preciza condiții implicite suplimentare pentru θ şi x_f. □

În acest context, *problema conducerii optimale* este o problemă de extremum cu indicele de calitate (1.14), cu legături prin ecuația diferențială (3.1) şi cu condițiile la limite inițială (3.2) şi finală (3.3).

b. Indicele de calitate extins

Aplicarea condiției necesare (2.10) pentru indicele de calitate (1.14) este dificilă deoarece în el apare şi variabila x. Aceasta nu este independentă, ci depinde de u prin ecuația de stare (3.1).

Dacă s-ar cunoaşte analitic soluția problemei (3.1), (3.2), atunci x ar putea fi eliminat din (1.14) şi s-ar aplica condiția necesară (2.16).

Pentru a rezolva problema în cazul general (fără eliminarea lui x), se defineşte *indicele de calitate extins*, de forma:

$$J_e(u) = G[\theta, x(\theta)] + \int_\tau^\theta \left\{ F\big(t, x(t), u(t)\big) + p^T(t)\big[f\big(t, x(t), u(t)\big) - \dot{x}(t) \big] \right\} dt\,, \quad (3.4)$$

în care necunoscuta $p \in \mathbb{R}^n$ este *vectorul adjunct* sau *vectorul multiplicatorilor Lagrange*. Acesta urmează să se determine în mod adecvat.

Observația 3.2

Pentru extremala $u^*(t)$, traiectoria optimală $x^*(t)$ satisface (3.1), (3.2). Urmează că noul termen introdus în integrandul din (3.4) se anulează oricare ar fi p. Aceasta deoarece $f(t, x, u) - \dot{x}(t) = 0$. Pentru $u = u^*$, din (3.4) şi (1.14) rezultă:

$$J_e(u^*) = J(u^*) = \text{extremum},\ \forall p \in \mathbb{R}^n\,. \quad (3.5)$$

Aceasta înseamnă că pentru $u = u^*$, vectorul adjunct p poate fi ales în mod arbitrar. Urmează în mod firesc, după cum se va arata în continuare, că pentru p se poate adopta soluția contextuală cea mai simplă. □

Se introduce acum *funcția Hamilton*:

$$H[t, x(t), p(t), u(t)] \triangleq F\big(t, x(t), u(t)\big) + p^T(t) f\big(t, x(t), u(t)\big)\,. \quad (3.6)$$

Din (3.4), prin integrarea prin părți a termenului $p^T(t)\dot{x}(t)$, cu (3.6) se obține:

$$J_e(u) = G(\theta, x_f) - p^T(t)x(t)\Big|_\tau^\theta + \int_\tau^\theta \left\{ H\big(t, x(t), p(t), u(t)\big) + \dot{p}^T(t)x(t) \right\} dt\,. \quad (3.7)$$

În acest nou context, soluționarea *problemei conducerii optimale* constă în determinarea pentru sistemul (3.1) a unei extremale $u^*(t)$ care să extremizeze funcționala (3.7) şi care să satisfacă condițiile la limite (3.2) şi (3.3) (v. Observația 3.1). Evident, pentru a determina comanda optimală $u^*(t)$ se aplică indicelui $J_e(u)$ condiția necesară de extremum (v. Teorema 2.1). Se are în vedere legătura (3.1) şi se determină traiectoria optimală a stării $x^*(t)$ şi vectorul adjunct $p^*(t)$.

3.2. Ecuațiile Hamilton

a. Problema cu orizont finit fixat şi stare finală fixată

Teorema 3.1

O condiție necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7), asociat sistemului dinamic (3.1) în problema cu orizont finit fixat şi stare finală fixată, este ca să aibă loc:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \operatorname{grad}_p H\big(t,\, x^*(t),\, p^*(t),\, u^*(t)\big) & (3.8) \\ \dot{p}^* = -\operatorname{grad}_x H\big(t,\, x^*(t),\, p^*(t),\, u^*(t)\big) & (3.9) \\ \operatorname{grad}_u H\big(t,\, x^*(t),\, p^*(t),\, u^*(t)\big) = 0, \qquad t \in [\tau,\, \theta], & (3.10) \end{cases}$$

cu condițiile la limite:

$$x^*(\tau) = x_0, \quad (3.11)$$

$$x^*(\theta) = x_f\,. \quad (3.12)$$

$\mathscr{D}$. Prin ipoteză $u^*(t)$ este o comandă optimală. Atunci $x^*(t)$ este o traiectorie optimală. Perechea $u^*(t)$, $x^*(t)$ satisface ecuația (3.1) şi condițiile la limite (3.2) şi (3.3). Dar (3.1), cu $u = u^*$, $x = x^*$, este echivalentă cu (3.8). Într-adevăr, derivând (3.6) în raport cu p pentru situația optimală se obține:

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*, p^*, u^*) = \left(\operatorname{grad}_p H(t, x^*, p^*, u^*)\right)^T = f^T(t, x^*, u^*)\,. \quad (3.13)$$

Înlocuind (3.13), transpusă, în (3.8) rezultă (3.1) cu $u = u^*$, $x = x^*$.

În continuare se calculează variația $\delta J_e(u^*, \delta u)$ și se aplică Teorema 2.1. Se are în vedere că lui δu îi corespund variațiile $\delta x, \delta p, \delta\tau, \delta x_0, \delta\theta, \delta x_f$. Dar τ, x_0, θ, x_f fiind constante (v. Observația 3.1, 1°a, 2°a), rezultă că:

$$\delta\tau = 0, \quad \delta x_0 = 0, \tag{3.14}$$

$$\delta\theta = 0, \quad \delta x_f = 0. \tag{3.15}$$

Urmează că variația funcției $G(\theta, x_f)$ este nulă ceea ce permite să se considere $G \equiv 0$ în (3.7) chiar la formularea problemei. În acest context pentru (3.7) se scrie:

$$\delta J_e(u^*, \delta u) = -\delta p^T x^* \Big|_\tau^\theta - \underbrace{p^{*T} \delta x \Big|_\tau^\theta}_{=0} +$$

$$+ \int_\tau^\theta \left[\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u + \delta\dot{p}^T x^* + \dot{p}^{*T}\delta x \right] dt, \tag{3.16}$$

în care H depinde de t, x^*, p^*, u^* (au fost omise pentru simplitatea scrierii).

Făcând uz de identitatea:

$$\delta p^T x^* \Big|_\tau^\theta \equiv \int_\tau^\theta \frac{d}{dt}\left(\delta p^T x^*\right) dt$$

din (3.16), după regruparea termenilor, se obține:

$$\delta J_e(u^*, \delta u) = \int_\tau^\theta \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p}^{*T} \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u \right] dt +$$

$$+ \int_\tau^\theta \underbrace{\left[\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \delta\dot{p}^T x^* - \frac{d}{dt}\left(\delta p^T x^*\right) \right]}_{=\left[\cancel{\dot{x}^{*T}\delta p} + \cancel{\delta\dot{p}^T x^*} - \cancel{\delta\dot{p}^T x^*} - \cancel{\dot{x}^*\delta p^T}\right]=0} dt, \tag{3.17}$$

în care s–a ținut seama că $\delta p^T \dot{x}^* = \dot{x}^{*T}\delta p$ (produsul scalar este comutativ).

Din (3.17), cu condiția necesară de extremum (v. Teorema 2.1), rezultă:

$$\delta J_e(u^*, \delta u) = \int_\tau^\theta \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p}^{*T} \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u \right] dt = 0. \tag{3.18}$$

Vectorul adjunct p poate fi arbitrar (v. Observația 3.2). Ca urmare, p se alege astfel încât să satisfacă ecuația (3.9). Înlocuind (3.9) în (3.18) se obține:

$$\delta J_e(u^*, \delta u) = \int_\tau^\theta \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \, dt = 0 \,. \tag{3.19}$$

Folosind acum Teorema 2.2 se obține ecuația (3.10). □

Aşadar, s-a arătat că ecuațiile (3.8) şi (3.1), cu $u = u^*, x = x^*$, coincid. Ecuația (3.9), numită *ecuația adjunctă*, este conformă cu afirmația finală din Observația 3.2. Ecuația (3.10) este condiția necesară de existență a extremalei $u^*(t)$.

Ecuațiile diferențiale neliniare (3.8) – (3.10), numite şi *ecuațiile Hamilton*, cu condițiile la limite (3.11), (3.12), se rezolvă, de regulă, numeric. Dacă (3.10) se poate rezolva analitic în raport cu u^*, se explicitează $u^* = u^*(t, x^*, p^*)$ şi se înlocuieşte în (3.8) şi (3.9). Acestea formează un sistem de $2n$ ecuații diferențiale scalare cu $2n$ funcții necunoscute: x^* şi p^*, cu condițiile la limite (3.11) şi (3.12). Se rezolvă (analitic sau numeric) acest sistem şi se obțin $x^* = x^*(t)$ şi $p^* = p^*(t)$, cu ajutorul cărora se obține în final $u^* = u^*(t, x^*, p^*)$.

Se poate demonstra ca la Teorema 3.1 că, oricare ar fi condițiile la limite, condiția necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ este reprezentată de ecuațiile (3.8) – (3.10). Astfel de rezultate vor fi prezentate în continuare fără demonstrație.

b. Problema cu orizont finit fixat şi stare finală liberă

Teorema 3.2

O condiție necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit fixat şi stare finală liberă, este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condițiile la limite (3.11) şi

$$p^*(\theta) = \operatorname{grad}_x G\big(\theta, x^*(\theta)\big) \,. \;\square \tag{3.20}$$

(3.20) are semnificație geometrică şi se numeşte *condiția de transversalitate*.

<u>Cazul A</u>. Pentru F, f independente de t se scrie:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial u}\dot{u} + p^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial u}\dot{u} \right) + \dot{p}^T f =$$

$$=\left((\mathrm{grad}_x F)^T + p^T\frac{\partial f}{\partial x}\right)\dot{x}+\left((\mathrm{grad}_u F)^T + p^T\frac{\partial f}{\partial u}\right)\dot{u}+\dot{p}^T f =$$

$$=(\mathrm{grad}_u H)^T\dot{u}+(\mathrm{grad}_x H)^T\dot{x}+\dot{p}^T f\ ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=(\mathrm{grad}_u H)^T\dot{u}+\left((\mathrm{grad}_x H)^T+\dot{p}^T\right)f\ .$$

Cu (3.8) şi (3.9) din rezultatul precedent se obține:

$$\frac{\partial}{\partial t}H\left(x^*(t),\ p^*(t),\ u^*(t)\right)=0,\quad t\in[\tau,\ \theta],$$

$$H(t,x^*,p^*,u^*)=F(t,x^*,u^*)+p^{*T}f(t,x^*,u^*)=\text{const.},\ t\in[\tau,\theta]\ ,\quad (3.21)$$

din care rezultă dependența lui $p^*(t)$ de $F(t,\ x^*,\ u^*)$ şi $f(t,\ x^*,\ u^*)$. □

c. Problema cu orizont finit liber şi stare finală fixată

Teorema 3.3

O condiție necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit liber şi stare finală fixată, este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condițiile la limite (3.11), (3.12) şi

$$H\left(\theta,\ x^*(\theta),\ p^*(\theta),\ u^*(\theta)\right)+\frac{\partial}{\partial t}G\left(\theta,\ x^*(\theta)\right)=0\ .\ \square \qquad (3.22)$$

<u>Cazul B</u>. Pentru F, f, G independente de t, din (3.21) şi (3.22), rezultă:

$$H(t,x^*,p^*,u^*)=F(t,x^*,u^*)+p^{*T}f(t,x^*,u^*)=0,\ t\in[\tau,\theta].\ \square. \quad (3.23)$$

d. Problema cu orizont finit liber şi stare finală liberă

Teorema 3.4

O condiție necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit liber şi stare finală liberă, este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condițiile la limite (3.11) şi (3.20), (3.22). □

Particularizări adecvate în Teorema 3.4 conduc la precedentele trei teoreme.

În plus, sunt posibile şi următoarele particularizări pentru starea finală liberă.

e. Problema cu orizont finit liber şi stare finală pe o traiectorie dată

În acest caz momentul final şi starea finală nu mai sunt complet libere, ci

$$x^*(\theta) = x_d(\theta)\,, \tag{3.24}$$

unde $x_d : [\tau,\, \theta] \to \mathbb{R}^n$, cu derivata continuă, este o traiectorie dată.

Teorema 3.5

O condiţie necesară de existenţă a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit liber şi stare finală pe o traiectorie dată $x_d(t)$, este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condiţiile la limite (3.11), (3.24) şi

$$H\Big(\theta,\, x^*(\theta),\, p^*(\theta),\, u^*(\theta)\Big) + \frac{\partial}{\partial t} G\Big(\theta,\, x^*(\theta)\Big) +$$

$$+ \Big[\mathrm{grad}_x\, G\Big(\theta, x^*(\theta)\Big) - p^*(\theta)\Big]^T \dot{x}_d(\theta) = 0\,.\ \square \tag{3.25}$$

f. Problema cu orizont finit fixat şi starea finală pe o suprafaţă dată

Nici în acest caz starea finală nu mai este complet liberă, ci trebuie să aparţină unei suprafeţe date. Această suprafaţă este definită prin funcţiile scalare:

$$g_k(x) = 0,\ \ k = \overline{1, r},\ \ \ 1 \le r \le n-1\,, \tag{3.26}$$

în care funcţiile $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ k = \overline{1, r}$, au derivatele parţiale de ordinul întâi continue. Evident, starea finală $x^*(\theta)$ trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

$$g_k\Big(x^*(\theta)\Big) = 0,\ \ k = \overline{1, r}\,. \tag{3.27}$$

Teorema 3.6

O condiţie necesară de existenţă a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit fixat şi stare finală pe suprafaţa dată (3.26), este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condiţiile la limite (3.11), (3.27) şi

$$\mathrm{grad}_x\, G\Big(\theta, x^*(\theta)\Big) - p^*(t) = \sum\nolimits_{k=1}^{r} \alpha_k\, \mathrm{grad}_x\, g_k\Big(x^*(\theta)\Big), \tag{3.28}$$

în care $\alpha_k,\ k = \overline{1, r}$, sunt constante determinabile. $\square$

g. Problema cu orizont finit liber şi starea finală pe o suprafaţă dată

Teorema 3.7

O condiţie necesară de existenţă a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (3.7) asociat sistemului (3.1) în problema cu orizont finit liber şi stare finală pe suprafaţa dată (3.26), este ca să aibă loc (3.8) – (3.10), cu condiţiile la limite (3.11), (3.22), (3.26), (3.27) şi (3.28), în care α_k, $k=\overline{1,r}$, sunt constante determinabile. □

h. Aplicaţii

Se consideră un servomotor descris de ecuaţiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u. \end{cases}$$

Să se determine comanda optimală u^* pentru următorii indici de calitate:

a) $J=(1/2)\int_0^3 u^2(t)\,dt$,

cu stările iniţială şi finală: $x_1(0)=x_2(0)=0,\quad x_1(3)=4,\ x_2(3)=1$.

b) $J=(1/2)\left[\left(x_1(3)-4\right)^2+\left(x_2(3)-1\right)^2+\int_0^3 u^2(t)\,dt\right]$,

cu starea iniţială $x_1(0)=x_2(0)=0$, momentul final $\theta=3$ şi starea finală $\left(x_1(\theta),\, x_2(\theta)\right)$ liberă.

c) $J=(1/2)\int_0^\theta u^2(t)\,dt$,

cu starea iniţială $x_1(0)=x_2(0)=0$, momentul final θ liber şi starea finală $\left(x_1(\theta),\, x_2(\theta)\right)$ situată pe traiectoria $x_{d1}(t)=10t,\quad x_{d2}(t)=10$.

d) $J=(1/2)\int_0^3 u^2(t)\,dt$,

cu starea iniţială $x_1(0)=x_2(0)=0$, momentul final $\theta=3$ şi starea finală $\left(x_1(\theta),\, x_2(\theta)\right)$ situată pe dreapta $x_1+4x_2=12$.

Soluții

Funcția Hamilton şi ecuațiile Hamilton au expresiile:

$H = (1/2)u^2 + p_1x_2 - p_2x_2 + p_2u$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^* \\ \dot{x}_2^* = -x_2^* + u^*, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1^* = 0 \\ \dot{p}_2^* = -p_1^* + p_2^*, \end{cases} \quad u^* = -p_2^*.$$

Se înlocuieşte u^* în primul sistem şi se obțin soluțiile generale:

$$\begin{cases} x_1^* = c_1 + c_2(1-e^{-t}) + c_3(-t - e^{-t}/2 + e^t/2) + c_4(1 - e^{-t}/2 - e^t/2) \\ x_2^* = c_2 e^{-t} + c_3(-1 + e^{-t}/2 + e^t/2) + c_4(e^{-t}/2 - e^t/2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1^* = c_3 \\ p_2^* = c_3(1-e^t) + c_4 e^t, \end{cases} \quad u^* = -c_3(1-e^t) - c_4 e^t.$$

a) $c_1,\ldots,c_4$ se determină din condițiile la limite (Teorema 3.1):

$$\begin{cases} x_1^*(0) = 0 \\ x_2^*(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^*(3) = 4 \\ x_2^*(3) = 1. \end{cases}$$

b) $c_1,\ldots,c_4$ se determină din condițiile la limite (Teorema 3.2):

$$\begin{cases} x_1^*(0) = 0 \\ x_2^*(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1^*(3) = x_1^*(3) - 4 \\ p_2^*(3) = x_2^*(3) - 1. \end{cases}$$

c) $c_1,\ldots,c_4$ şi θ se determină din condițiile la limite (Teorema 3.5):

$$\begin{cases} x_1^*(0) = 0 \\ x_2^*(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^*(\theta) = 10\theta \\ x_2^*(\theta) = 10. \end{cases}$$

$$(1/2)u^{*2}(\theta) + [p_1^*(\theta) - p_2^*(\theta)]x_2^*(\theta) + p_2^*(\theta)u^*(\theta) - 10p_1^*(\theta) = 0 .$$

d) $c_1,\ldots,c_4$ şi α se determină din condițiile la limite (Teorema 3.6):

$$\begin{cases} x_1^*(0) = 0 \\ x_2^*(0) = 0, \end{cases} \qquad x_1(3) + 4x_2(3) = 12, \qquad \begin{cases} -p_1^*(3) = \alpha \\ -p_2^*(3) = \alpha. \end{cases} \quad \square$$

3.3. Sisteme dinamice cu legături suplimentare

Față de formularea din secțiunea 3.1, problema de sinteză a comenzii optimale poate fi însoțită de condiții suplimentare (legături) privind evoluția comenzii optimale şi stării optimale.

a. Legături punctuale

Fiind dată $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^\mu$, funcțiile $u^*(t)$ şi $x^*(t)$ trebuie să satisfacă *legăturile punctuale*:

$$\varphi\big(t,\, x^*(t),\, u^*(t)\big)=0,\quad t\in[\tau,\,\theta]. \tag{3.29}$$

Similar cu (3.4), se defineşte un nou *indice de calitate extins*:

$$J_e(u)=G(\theta,x_f)+\int_\tau^\theta\Big\{F(t,x,u)+p^T[f(t,x,u)-\dot{x}]+q^T\varphi(t,x,u)\Big\}dt\,, \tag{3.30}$$

în care $q\in\mathbb{R}^\mu$ este o nouă necunoscută (un nou *vector al multiplicatorilor Lagrange*). Evident, pentru (3.1), (3.29) şi conform Observației 3.2, are loc:

$$J_e(u^*)=J(u^*)=\text{extremum},\ \forall p\in\mathbb{R}^n,\ \forall q\in\mathbb{R}^\mu. \tag{3.31}$$

Similar cu (3.6), se defineşte o nouă *funcție Hamilton*:

$$H(t,\,x,\,p,\,q,\,u)\triangleq F(t,\,x,\,u)+p^T f(t,\,x,\,u)+q^T\varphi(t,\,x,\,u)\,. \tag{3.32}$$

Cu aceasta noul indice de calitate extins devine:

$$J_e(u)=G(\theta,\,x_f)-p^T(t)x(t)\Big|_\tau^\theta+\int_\tau^\theta\Big\{H(t,\,x,\,p,\,q,\,u)+\dot{p}^Tx\Big\}dt\,. \tag{3.33}$$

Noile *ecuații Hamilton* se obțin aplicând condiția necesară de extremum (2.10) (utilizând procedeul de la demonstrația Teoremei 3.1). Rezultă:

$$\begin{cases}\dot{x}^*=\operatorname{grad}_p H\big(t,\,x^*(t),\,p^*(t),\,q^*(t),\,u^*(t)\big) & (3.34)\\ \dot{p}^*=-\operatorname{grad}_x H\big(t,\,x^*(t),\,p^*(t),\,q^*(t),\,u^*(t)\big) & (3.35)\\ \operatorname{grad}_q H\big(t,\,x^*(t),\,p^*(t),\,q^*(t),\,u^*(t)\big)=0 & (3.36)\\ \operatorname{grad}_u H\big(t,\,x^*(t),\,p^*(t),\,q^*(t),\,u^*(t)\big)=0,\qquad t\in[\tau,\,\theta]\,. & (3.37)\end{cases}$$

Evident, se pot enunța rezultate similare cu Teoremele 3.1 – 3.7, cu mențiunea că acum, în locul ecuațiilor (3.8) – (3.10), se folosesc ecuațiile (3.34) – (3.37) şi (3.29). În acelaşi timp, condițiile la limite, corespunzătoare problemei de soluționat, rămân neschimbate.

b. Legături globale

În acest caz $u^*(t)$ şi $x^*(t)$ trebuie să satisfacă *legăturile globale*:

$$\int_\tau^\theta \psi\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)dt = c\,, \tag{3.38}$$

unde $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\nu$ şi $c \in \mathbb{R}^\nu$ este un vector constant.

Se introduce o nouă variabilă (necunoscută):

$$z(t) = \int_\tau^t \psi\big(t, x(\sigma), u(\sigma)\big)d\sigma\,. \tag{3.39}$$

Evident, $z^*(t)$ satisface ecuația:

$$\dot{z}^* = \psi(t, x^*, u^*), \quad t \in [\tau, \theta]\,, \tag{3.40}$$

cu condițiile la limite:

$$z^*(\tau) = 0,\ z^*(\theta) = c\,. \tag{3.41}$$

Procedând ca în secțiunea 3.1, noul *indice de calitate extins* are forma:

$$J_e(u) = G(\theta, x_f) + \int_\tau^\theta \Big\{F(t, x, u) + p^T\big[f(t, x, u) - \dot{x}\big] + \\ + r^T\big[\psi(t, x, u) - \dot{z}\big]\Big\}dt\,, \tag{3.42}$$

în care $r \in \mathbb{R}^\nu$ este o nouă necunoscută (un nou *vector al multiplicatorilor Lagrange*). Fireşte, cu (3.1), (3.39), (3.40) şi Observația 3.2, are loc:

$$J_e(u^*) = J(u^*) = \text{extremum},\ \forall p \in \mathbb{R}^n,\ \forall r \in \mathbb{R}^\nu\,. \tag{3.43}$$

Similar cu (3.32), se defineşte o nouă *funcție Hamilton*:

$$H(t, x, p, r, u) \triangleq F(t, x, u) + p^T f(t, x, u) + r^T\psi(t, x, u)\,. \tag{3.44}$$

Cu aceasta noul indice de calitate extins, după calcule relativ simple, devine:

$$J_e(u) = G(\theta, x_f) - p^T(t)x(t)\Big|_\tau^\theta - r^T(t)z(t)\Big|_\tau^\theta +$$

$$+\int_\tau^\theta \left\{H(t, x, p, r, u) + \dot{p}^T x + \dot{r}^T z\right\} dt\,. \qquad (3.45)$$

Noile *ecuații Hamilton* (care vor înlocui ecuațiile (3.8) – (3.10)) se obțin prin aplicarea condiției necesare de extrem (2.10) (utilizând procedeul la demonstrația Teoremei 3.1). Rezultă:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \operatorname{grad}_p H\big(t, x^*(t), p^*(t), r^*(t), u^*(t)\big) & (3.46) \\ \dot{z}^* = \operatorname{grad}_r H\big(t, x^*(t), p^*(t), r^*(t), u^*(t)\big) & (3.47) \\ \dot{p}^* = -\operatorname{grad}_x H\big(t, x^*(t), p^*(t), r^*(t), u^*(t)\big) & (3.48) \\ \dot{r}^* = -\operatorname{grad}_z H\big(t, x^*(t), p^*(t), r^*(t), u^*(t)\big) = 0 & (3.49) \\ \operatorname{grad}_u H\big(t, x^*(t), p^*(t), r^*(t), u^*(t)\big) = 0, \qquad t \in [\tau, \theta]. & (3.50) \end{cases}$$

Este uşor de observat că ecuația (3.47) coincide cu ecuația (3.40) şi că din (3.49) rezultă:

$$r^*(t) = \text{constant}\,.$$

Şi în acest caz se pot enunța rezultate similare cu Teoremele 3.1 – 3.7, cu mențiunea că, în locul ecuațiilor (3.8) – (3.10), se folosesc ecuațiile (3.46) – (3.50). În acelaşi timp, condițiile la limite, asociate problemei de soluționat, rămân neschimbate, dar de fiecare dată se adaugă şi condițiile la limite (3.41).

4. Sinteza comenzii optimale pentru sisteme dinamice liniare

4.1. Ecuația Riccati

Acest subcapitol este dedicat sintezei comenzii optimale pentru sisteme dinamice liniare. După cum se va vedea în cele ce urmează, în acest caz este posibilă, în general, generarea în timp real a comenzi optimale pe baza reacției după starea sistemului.

Fie sistemul dinamic liniar variant în timp, descris de ecuația de intrare – stare:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ t \in [\tau, \theta] \subseteq \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{4.1}$$

cu starea inițială (3.2), cunoscută fixată, şi starea finală fixată sau liberă (3.3) (v. Observația 3.1).

Se cere să se determine o comandă optimală $u^*(t)$ care minimizează indicele de calitate:

$$J(u) = (1/2)x^T(\theta)M\,x(\theta) + (1/2)\int_\tau^\theta \left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt, \tag{4.2}$$

în care M şi $Q(t)$ sunt matrice reale pozitiv semidefinite şi $R(t)$ este o matrice reală pozitiv definită pentru $t \in [\tau, \theta]$ (v. Anexa C). Aceste matrice ponderează contribuția componentelor vectorilor $x(\theta)$, $x(t)$ şi respectiv $u(t)$ în indicele (4.2).

Pentru indicele de calitate (4.2), prin comparație cu (1.12), se poate da următoarea interpretare fizică: se doreşte ca prin minimizarea indicelui de calitate $J(u)$ starea $x(t)$ să fie cât mai apropiată de origine (traiectoria dorită este $x_d(t) \equiv 0$; v. indicele de calitate (1.12) cu (1.3)) şi consumul de energie de comandă să fie limitat.

Funcția Hamilton, conform definiției (3.6), are expresia:

$$H\big(t, x(t), p(t), u(t)\big) \triangleq (1/2)x^T(t)Q(t)x(t) + (1/2)u^T(t)R(t)u(t) + \\ + p^T(t)\big[A(t)x(t) + B(t)u(t)\big]. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1

O condiție necesară de existență a unei extremale $u^*(t)$ pentru indicele de calitate (4.1), asociat sistemului dinamic (4.1) este ca să aibă loc:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)u^* & (4.4) \\ \dot{p}^* = -Q(t)x^* - A^T(t)p^* & (4.5) \\ R(t)u^* + B^T(t)p^* = 0, \qquad t \in [\tau, \theta], & (4.6) \end{cases}$$

cu condiția inițială (3.11) şi, după caz, cu una din condițiile finale:

(i) pentru orizont finit fixat, stare finală fixată: (3.12);

(ii) pentru orizont finit fixat, stare finală liberă:

$$p^*(\theta) = M\,x^*(\theta)\,; \tag{4.7}$$

(iii) pentru orizont finit liber, stare finală fixată: (3.12) şi

$$x^T(\theta)Q(\theta)x(\theta) + u^{*T}(\theta)Ru^*(\theta) + 2p^{*T}(\theta)\big[Ax^*(\theta) + Bu^*(\theta)\big] = 0\,; \tag{4.8}$$

(iv) pentru orizont finit liber, stare finală liber: (3.12), (4.7) şi (4.8).

$\mathscr{D}$. Ecuațiile (4.4) – (4.6) se obțin din (4.3) şi (3.8) – (3.10). Condițiile (i) – (iv) se obțin respectiv din condițiile la limite de la Teoremele 3.1 – 3.4. □

Din (4.6) se obține comanda optimală:

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*\,. \tag{4.9}$$

Înlocuind (4.9) în (4.4), aceasta devine:

$$\dot{x}^* = A(t)x^* - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p^*\,. \tag{4.10}$$

Ecuațiile (4.10) şi (4.5) formează un sistem de $2n$ ecuații omogene cu $2n$ necunoscute scalare, a cărui formă vectorial matriceală este:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \hline \dot{p}^* \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ \hdashline -Q(t) & -A^T(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} x^* \\ \hline p^* \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Soluția acestui sistem de ecuații, cu condiții la limite adecvat formulate, oferă posibilitatea de a se determina atât comanda optimală, cât şi traiectoria optimală ale sistemului. Trebuie remarcat că în acest caz $u^*(t)$ se obține ca funcție de timp. În aplicații aceasta trebuie sintetizată şi utilizată ca o comandă în circuit deschis, ceea ce poate implica dificultăți de realizare şi utilizare.

Un procedeu mai simplu de realizare a comenzii $u^*(t)$ constă în utilizarea reacției după stare. În acest sens se poate arăta că există o matrice $K(t)$, n dimensională, simetrică, astfel încât

$$p^* = K(t)x^* . \tag{4.12}$$

În această situație comanda optimală are expresia:

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x^* . \tag{4.13}$$

Aceasta înseamnă că este posibilă comanda optimală a unui sistem liniar de forma (4.1) utilizând *reacția după stare*. Această soluție este ilustrată în fig. VI.4.1 (v. şi fig. I.3.1), în care s-a introdus şi comanda externă $v \in \mathbb{R}^m$.

Pentru a determina matricea $K(t)$ se elimină x^*, p^*, u^* între ecuațiile (4.4), (4.5), (4.12) şi (4.13). Se obține *ecuația diferențială Riccati*:

$$\dot{K} + K\,A(t) + A^T(t)K - K\,B(t)R^{-1}(t)B(t)K + Q(t) = 0, \quad t \in [\tau, \theta], \tag{4.14}$$

căreia i se adaugă condițiile la limite. De pildă, pentru problema cu orizont finit fixat şi stare finală liberă (v. Teorema 3.2), ecuațiilor (4.4) – (4.6) li se adaugă condițiile inițială (3.11) şi finală (3.20).

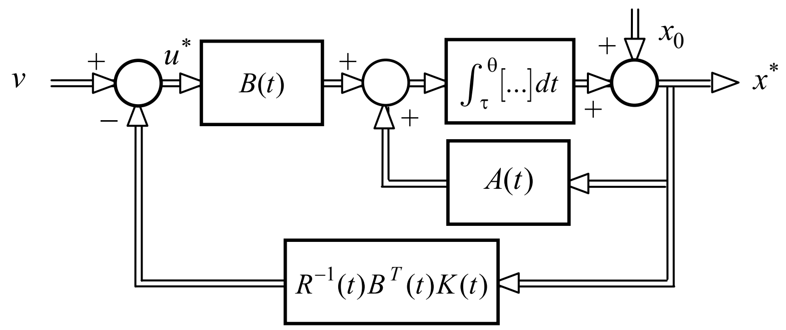

Fig. VI.4.1. Comanda optimală prin reacție după stare

Condiția finală (3.20), concretizată prin (4.7), este semnificativă pentru soluția ecuației Riccati (4.14). Comparând (4.7) cu (4.12) (pentru $t = \theta$) se obține:

$$K(\theta) = M \ . \tag{4.15}$$

Ecuația (4.14) cuprinde $n(n+1)/2$ ecuații diferențiale scalare de ordinul 1, cu tot atâtea necunoscute. Ea poate fi rezolvată numeric şi integrarea are loc regresiv, de la $t = \theta$, cu condiția (4.15), către $t = \tau$.

În cazul problemei cu orizont finit fixat şi stare finală fixată termenul $x^T(\theta) M\, x(\theta)/2$ din (4.2) este o constantă cunoscută şi independentă de comanda optimală $u^*(t)$. În această situație, în mod firesc, se adoptă $M = 0$.

4.2. Ecuația algebrică Riccati

Din ecuația (4.14) rezultă că, în general, chiar atunci când matricele A, B, Q, R sunt constante, soluția $K(t)$ este variantă în timp.

Un caz particular interesant, în special pentru aplicații, este acela al sistemelor dinamice liniare invariante în timp descrise de ecuația:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{4.16}$$

cu condiția inițială (3.2), cu $\tau = 0$, şi cu orizont infinit şi stare finală fixată $x_f = 0$.

Indicele de calitate (4.2) se particularizează sub următoarea formă:

$$J(u) = (1/2)\int_0^\infty \left\{x^T(t) Q\, x(t) + u^T(t) R u(t)\right\} dt\,, \tag{4.17}$$

unde $Q = Q_1^T Q_1$ şi R sunt matrice constante, cu Q_1 matrice de acelaşi rang cu Q.

Soluția $K(t)$ a ecuației (4.14) este dependentă de timp şi în cazul A, B, Q, R matrice constante. Dacă (A, B) şi (Q_1, A) sunt complet controlabilă şi respectiv complet observabilă, se poate demonstra că matricea $K(t)$ are proprietatea:

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = K_0\,. \tag{4.18}$$

K_0 este constantă, simetrică şi pozitiv definită (v. Anexa C). Pentru $t \to \infty$ se obține:

$$\dot{K}(t) = \dot{K}_0 = 0\,. \tag{4.19}$$

Urmează că pentru $t \to \infty$, cu (4.18) şi (4.19), ecuația diferențială Riccati (4.14) devine o ecuație algebrică. Ea este cunoscută sub numele de *ecuația algebrică Riccati* şi are forma:

$$K_0 A + A^T K_0 - K_0 B R^{-1} B^T K_0 + Q = 0 . \qquad (4.20)$$

Ipoteza observabilității complete a perechii (Q_1, A) asigură ca fiecare componentă a stării x a sistemului (4.16) să aibă o contribuție în $J(u)$.

Conform cu (4.13), reacția după stare pentru sistemul (4.16) cu (4.17) are expresia:

$$u = -R^{-1} B^T K_0 x . \qquad (4.21)$$

Teorema 4.2

Reacția (4.21), cu K_0 soluție a ecuației (4.20) pentru (A, B) complet controlabilă şi (Q_1, A) complet observabilă, realizează stabilizarea sistemului (4.16).

$\mathscr{D}$. Într-adevăr, înlocuind (4.21) în (4.16), se obține:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T K_0) x . \qquad (4.22)$$

K_0 este simetrică şi pozitiv definită. Pentru *funcția Liapunov* (v. III.1.4):

$$V(x) = x^T K_0 x \qquad (4.23)$$

se poate demonstra că $\dot{V}(x)$ este negativ definită. Într-adevăr, se scrie:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) = {} & \dot{x}^T K_0 x + x^T K_0 \dot{x} = \\
& = x^T (A - B R^{-1} B^T K_0)^T K_0 x + x^T K_0 (A - B R^{-1} B^T K_0) x = \\
& = x^T \left(A^T K_0 - K_0 B R^{-1} B^T K_0 + K_0 A - K_0 B R^{-1} B^T K_0 \right) x = \\
& = x^T (-Q + K_0 B R^{-1} B^T K_0 - 2 K_0 B R^{-1} B^T K_0) x ,
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(x) = x^T (-Q - K_0 B R^{-1} B^T K_0) x .$$

R^{-1} este pozitiv definită şi Q este pozitiv semidefinită (v. Anexa C). $\dot{V}(x)$ este negativ definită şi (4.23) este o funcție Liapunov tare. Conform Teoremei V.3.4 sistemul cu reacție după stare (4.22) este *global asimptotic stabil*. □

Există numeroase metode de rezolvare a ecuației (4.20). Una dintre aceste metode constă în calculul vectorilor proprii ai matricei de ordinul $2n$:

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A & -BR^{-1}B^T \\ \hline -Q & -A^T \end{array}\right].$$

Aceasta apare în ecuația (4.11) şi este particularizată pentru sistemul (4.16).

Se poate demonstra că cele $2n$ valori proprii ale matricei L sunt simple şi simetrice două câte două față de axa imaginară şi nici una nu este situată pe respectiva axă. Fie vectorii proprii asociați valorilor proprii situate în $\mathbb{C}_-$,

$$c_i = \left[d_i^T \mid e_i^T\right]^T,\quad i = \overline{1,n},$$

în care d_i, e_i sunt vectori n dimensionali corespunzători partiției din L. Soluția ecuației algebrice Riccati (4.20) are expresia:

$$K_0 = \left[d_1,\, d_2,\, \ldots,\, d_n\right]\left[e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n\right]^{-1}.$$

Exemplul 4.1

Se consideră sistemul liniar

$$\dot{x} = ax + bu,\quad t \in \mathbb{R}_+,\, x \in \mathbb{R},\, u \in \mathbb{R},\quad a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

şi indicele de calitate (4.2) cu $M = 0, Q = q \ge 0, R = r > 0, \tau = 0$ şi θ fixat.

Să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care transferă starea sistemului între $x(0) = x_0$ şi $x(\theta) = x_f$ liberă, şi care minimizează indicele $J(u)$.

Comanda optimală (4.13) se obține cu ecuația diferențială Riccati scalară

$$\dot{k} = b^2 r^{-1} k^2 - 2ak - q,$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Cu $k(\theta) = 0$ (v. (4.15)), soluția este:

$$k(t) = k_1 k_2 \frac{1 - e^{2\alpha(t-\theta)}}{k_2 - k_1 e^{2\alpha(t-\theta)}},\ t \in [0, \theta],\quad \text{cu } \alpha = \sqrt{a^2 + b^2 q r^{-1}} \ge 0,$$

în care $k_{1,2} = b^{-2} r(a \pm \alpha)$ sunt rădăcinile polinomului $b^2 r^{-1} k^2 - 2ak - q$.

Pentru $\theta = \infty$ se obțin: $k_0 = k_1 = b^{-2} r(a + \alpha)$, $u^*(t) = -b^{-1}(a + \alpha)x^*(t)$. Sistemul cu reacție după stare (v. (4.22)) este descris de: $\dot{x} = -\alpha x$. Pentru $\alpha > 0$ acest sistem este global asimptotic stabil, fapt care are loc pentru $q > 0$. □

5. Principiul minimului

5.1. Probleme de conducere optimală cu restricții

La formularea problemei de sinteza a comenzii optimale (v. paragraful 3.1) s-a precizat că $x \in \mathbb{R}^n$ şi $u \in \mathbb{R}^m$, ceea ce, implicit, înseamnă că pentru funcțiile $x(t)$ şi $u(t)$ nu s-au formulat condiții de mărginire. În condiții reale însă aceste funcții trebuie să satisfacă anumite restricții determinate de limitele admisibile de funcționare a sistemelor dinamice reale. Tipice în acest sens sunt restricțiile de forma:

$$\left| u_i(t) \right| \le u_{i0}, \quad t \in [\tau, \theta], \ \ i = \overline{1, m}, \tag{5.1}$$

în care u_i, $i = \overline{1, m}$, sunt componentele comenzii u. Limitele admisibile ale mărimii de intrare, u, se precizează prin constantele cunoscute $u_{i0} > 0$, $i = \overline{1, m}$. Ele sunt dependente de puterea disponibilă a mărimii de intrare, de palierele de saturație, de restricțiile impuse de siguranța în funcționare etc.

În aceste noi circumstanțe condiția necesară de extrem din Teorema 2.1 trebuie să fie în mod adecvat generalizată. Teorema 2.1 a fost formulată pentru mărimea de intrare admisibilă $u : [\tau, \theta] \to \mathbb{R}^m$, căreia nu i s-au prescris nici un fel de restricții.

Pentru generalizarea Teoremei 2.1 se introduce noțiunea de funcție admisibilă relativ la restricții în conformitate cu considerațiile de mai sus. Se au în vedere funcționale de forma (2.1), $J : \Omega \to \mathbb{R}$. Un element $u \in \Omega$ este o funcție de timp, $u : [\tau, \theta] \to U \subset \mathbb{R}^m$, cu $[\tau, t] \subseteq [0, \infty)$, continuă pe porțiuni, cu valori într-o mulțime (închisă şi mărginită) $U \subset \mathbb{R}^m$ (de pildă definită prin (5.1)) şi care satisface condițiile la limite liniare (2.2).

Definiția 5.1

O funcție $u \in \Omega$, admisibilă conform Definiției 2.1, se numeşte *admisibilă relativ la restricții* dacă

$$u \in \Omega_a \triangleq \left\{ u \in \Omega;\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,\ t \in [\tau, \theta],\ U - \text{ închisă şi mărginită } \right\}. \ \square$$

5.2. Generalizarea condiției necesare de extrem

Evident, orice funcție admisibilă relativ la restricții este şi admisibilă.

După cum s-a arătat în Definiția 2.4, comanda optimală u^* realizează, de exemplu, un minim relativ al funcționalei $J(u)$ dacă

$$J(u) - J(u^*) = \Delta J \geq 0 \qquad (5.2.)$$

pentru orice comandă admisibilă u suficient de apropiată de u^*.

S-a arătat în Definiția 2.3 că, pentru $u = u^* + \delta u$, creşterea ΔJ a funcționalei $J(u)$ poate fi pusă sub forma:

$$\Delta J(u^*,\ \delta u) = \delta J(u^*,\ \delta u) + \text{termeni de ordin superior}\,. \qquad (5.3)$$

Dacă u^* este suficient de îndepărtată de frontiera lui U, atunci o condiție necesară ca u^* să fie o comandă optimală este $\delta J(u^*, \delta u) = 0$ pentru orice variație δu suficient de mică în normă (v. Teorema 2.1).

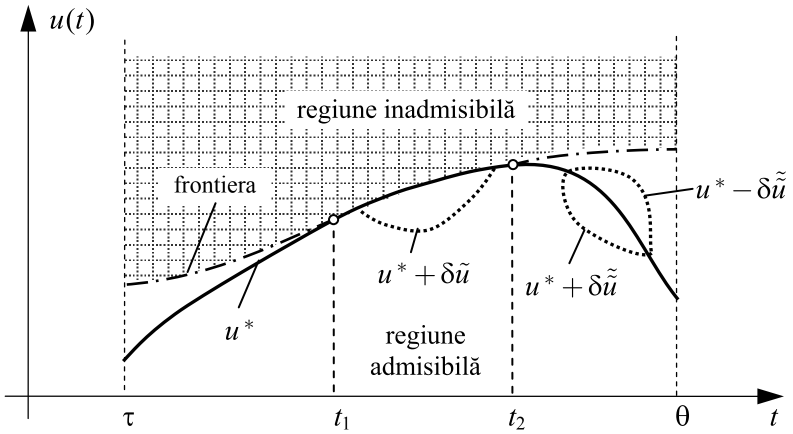

Fig. VI.5.1. Comenzi admisibile relativ la restricții

Dacă pentru un interval $[t_1, t_2] \subseteq [\tau, \theta]$, $u^*(t)$ aparține frontierei lui U (ca în fig. VI.5.1), atunci există o variație $\delta\tilde{u}$, astfel ca $u^* + \delta\tilde{u}$ să fie admisibilă relativ la restricții. Dacă se consideră numai variațiile $\delta\tilde{u}$ pentru care $u^* + \delta\tilde{u}$ este admisibilă relativ la restricții, atunci o condiție necesară pentru ca u^* să minimizeze funcționala $J(u)$ (v. (5.2), (5.3)) este $\Delta J(u^*, \delta\tilde{u}) \geq 0$. Pentru $t \in [\tau, t_1] \cup [t_2, \theta]$, pentru care $u^*(t)$ nu aparține frontierei lui U , o condiție necesară de minimum este $\delta J(u^*, \delta\tilde{\tilde{u}}) = 0$, pentru orice variație $\delta\tilde{\tilde{u}}$ suficient de mică în normă.

În concluzie, având în vedere toate comenzile u , admisibile relativ la restricții, astfel ca semnul creșterii ΔJ să fie dat de variația δJ , se ajunge, pentru problema de minimum, la următoarele generalizări ale Teoremelor 2.1 şi 3.1 – 3.7.

Teorema 5.1

Fie $J(u)$ o funcțională diferențiabilă în care comanda u este admisibilă relativ la restricții. O condiție necesară ca u^* să minimizeze $J(u)$ este:

$$\delta J(u^*, \delta\tilde{u}) \geq 0,\ t \in [\tau, \theta] \text{ a.p.t. (aproape peste tot)}. \ \square \qquad (5.4)$$

Teorema 5.2 (Pontriaghin)

O condiție necesară de existență a unei comenzi optimale $u^*(t) \in U$ (admisibilă relativ la restricții conform Definiției 5.1), care minimizează indicele de calitate extins (3.7), asociat sistemului (3.1), este ca să aibă loc:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \operatorname{grad}_p H\left(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)\right) & (5.5) \\ \dot{p}^* = -\operatorname{grad}_x H\left(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)\right) & (5.6) \\ H\left(t, x^*(t), p^*(t), u(t)\right) \geq H\left(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)\right), & (5.7) \end{cases}$$

$$\forall u(t) \in U,\ u^*(t) \in U,\quad t \in [\tau, \theta] \text{ a.p.t.},$$

şi după caz, condițiile la limite conform Teoremelor 3.1 – 3.7.

$\mathcal{D}$. Demonstrația condițiilor (5.5) – (5.7) este similară cu aceea a Teoremei 3.1, exceptând utilizarea condiției necesare (2.10), care se înlocuieşte cu (5.4). □

Observația 5.1

Principiul minimului (Teorema 5.2) prin care se asigură minimizarea funcționalei $J(u)$ poate fi reformulat, schimbând $J(u)$ cu $-J(u)$, pentru problema maximizării funcționalei $-J(u)$. Corespunzător, în (5.4) şi (5.7), se înlocuieşte „$\geq$”cu „$\leq$”. În acest caz se vorbeşte despre *principiul maximului*. □

5.3. Problema timpului minim

Acesta este una din problemele cele mai interesante de aplicare a principiului minimului. Pentru ilustrare se consideră sistemul dinamic liniar invariant în timp, cu restricţiile de comandă (5.1), descris de:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{5.8}$$

$$U \triangleq \left\{ u \in \mathbb{R}^m;\ \left| u_i \right| \le u_{i0},\ u_{i0} > 0,\ \ i = \overline{1,m} \right\}, \tag{5.9}$$

în care u_i, u_{i0} $i = \overline{1,m}$, sunt componentele lui u, respectiv ale restricţiei date u_0.

Sistemului (5.8) i se asociază indicele de calitate:

$$J(u) = \int_{\tau=0}^{\theta} dt = \theta\,. \tag{5.10}$$

Să se determine o comandă u^*, conformă restricţiilor (5.9), care transferă sistemul (5.8) din orice stare iniţială $x(0) = x_0 \ne 0$ în starea finală $x(\theta) = x_f = 0$ în timpul cel mai scurt posibil, respectiv se realizează minimizarea indicelui (5.10).

Teorema 5.3

O condiţie necesară de existenţă a unei comenzi optimale $u^*(t) \in U$ (admisibilă relativ la restricţii conform cu (5.9)), care minimizează indicele de calitate (5.10) asociat sistemului (5.8) este ca să aibă loc:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + Bu^* & (5.11)\\ \dot{p}^* = -A^T p^* & (5.12)\\ p^{*T}(t)B\left[u(t) - u^*(t)\right] \ge 0, & (5.13)\end{cases}$$

$$\forall u(t) \text{ cu } \left| u_i(t) \right| \le u_{i0},\ u^*(t) \text{ cu } \left| u_i^*(t) \right| \le u_{i0},\ i = \overline{1,m},\ \ t \in [0,\theta]\ \ \text{a.p.t.},$$

cu condiţiile la limite:

$$x^*(0) = x_0, \tag{5.14}$$

$$x^*(\theta) = 0, \tag{5.15}$$

$$1 + p^{*T}(\theta)Bu^*(\theta) = 0. \tag{5.16}$$

$\mathscr{D}$. În acest caz $G \equiv 0, F = 1$ (v. (3.4)). Funcția Hamilton (v. (3.6)) are forma:

$$H(t, x, p, u) = 1 + p^T (Ax + Bu) . \qquad (5.17)$$

Condițiile (5.4) – (5.7) aplicate funcției (5.17) conduc imediat respectiv la (5.11) – (5.13). Condițiile la limite (5.14) – (5.16) sunt conforme respectiv condițiilor similare de la Teorema 3.3. □

Condiția (5.13) poate fi pusă şi sub forma:

$$\sum_{i=1}^{m} (p^{*T} b_i) \left[u_i(t) - u_i^*(t) \right] \geq 0 , \qquad (5.18)$$

$$\forall \left| u_i(t) \right| \leq u_{i0} , \ \left| u_i^*(t) \right| \leq u_{i0} , \ i = \overline{1,m}, \quad t \in [0, \theta] \ \text{a.p.t.},$$

în care b_i, $i = \overline{1,m}$, sunt coloanele matricei B.

Se definesc următoarele funcții scalare:

$$s_i(t) \triangleq p^{*T}(t) b_i = b_i^T p^*(t), \ i = \overline{1,m} . \qquad (5.19)$$

Se observă că soluția $u^*(t)$ cu $\left| u_i^*(t) \right| \leq u_{i0}$, $t \in [0, \theta]$ a.p.t., $i = \overline{1,m}$, se obține în sensul satisfacerii inegalității (5.18) pentru orice $\left| u_i(t) \right| \leq u_{i0}$, $t \in [0, \theta]$ a.p.t., $i = \overline{1,m}$, dacă

$$u_i^*(t) = -u_{i0} \operatorname{sgn} s_i(t), \ i = \overline{1,m} . \qquad (5.20)$$

Aceasta este comanda optimală căutată şi ea implică utilizarea unui *regulator neliniar de tip releu* format din m *relee bipoziționale ideale*, câte unul pentru fiecare componentă a comenzii u. Fiecare releu este comandat de un $s_i(t)$ şi realizează comutarea comenzii $u_i^*(t)$ între $-u_{i0}$ şi $+u_{i0}$ atunci când semnul funcției $s_i(t)$ se schimbă. Din acest motiv $s_i(t)$ se numesc *funcții de comutare*.

Funcțiile de comutare se detaliază folosind soluția ecuației (5.12):

$$p^*(t) = e^{-A^T t} p^*(0) . \qquad (5.21)$$

Înlocuind (5.21) în (5.19) şi (5.20) rezultă:

$$s_i(t) = b_i^T e^{-A^T t} p^*(0), \ i = \overline{1,m}, \qquad (5.22)$$

$$u_i^*(t) = -u_{i0}\,\mathrm{sgn}[b_i^T e^{-A^T t} p^*(0)],\ i = \overline{1,m}\,. \tag{5.23}$$

θ rezultă din (5.15), iar $p^*(0)$ din (5.16) cu (5.21), (5.23). Se scrie:

$$p^{*T}(0)e^{-A\theta}B\,\mathrm{diag}\left\{\mathrm{sgn}[b_1^T e^{-A^T\theta}p^*(0)],....,\mathrm{sgn}[b_m^T e^{-A^T\theta}p^*(0)]\right\}u_0 = 1\,.$$

Este posibil ca pentru anumiți i și anumite intervale de timp să aibă loc $s_i(t) \equiv 0$. Urmează că pe acele intervale de timp $u_i^*(t)$ este nedeterminat și se spune că problema timpului minim este *singulară*. În caz contrar ea este *nesingulară*. Se poate arăta că singularitatea se elimină în următoarele condiții.

Teorema 5.4

Dacă perechile $(A, b_i),\ i = \overline{1,m}$, sunt complet controlabile atunci problema timpului minim (5.11) – (5.13) este nesingulară. Comanda optimală este (5.23). □

Relativ la numărul de comutări ale releelor ideale care realizează comanda optimală (5.23) se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 5.5 (Feldbaum)

Dacă valorile proprii ale matricei A sunt reale şi perechile $(A, b_i),\ i = \overline{1,m}$, sunt complet controlabile, atunci în problema timpului minim (5.11) – (5.13) fiecare componentă a comenzii optimale (5.23) comută de cel mult $n-1$ ori. □

Exemplul 5.1

Fie un sistem dublu integrator descris de următoarele ecuații:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = bu,\ \ t \ge 0,\ |u| \le u_0.$$

Să se determine o comandă optimală $|u^*| \le u_0$ care realizează transferul din orice stare $x_{10} \ne 0,\ x_{20} \ne 0$ în starea $x_{1f} = 0,\ x_{2f} = 0$, în timp minim.

Funcția Hamilton (v. (5.17)) are expresia: $H = 1 + p_1 x_2 + b p_2 u$.

Conform Teoremei 5.3, condiția necesară de extrem se exprimă prin:

$$\begin{cases}\dot{x}_1^* = x_2^* \\ \dot{x}_2^* = bu^*,\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{p}_1^* = 0 \\ \dot{p}_2^* = -p_1^*,\end{cases} \quad bp_2^*(u - u^*) \ge 0,\ \forall |u| \le u_0,\ |u^*| \le u_0,\ t \in [0,\theta].$$

Din ecuațiile în p şi respectiv din inecuația în u se obțin:

$$p_1^*(t) = c_1,\ p_2^*(t) = -c_1 t + c_2,\quad u^*(t) = -u_0 \operatorname{sgn} s(t)\,,$$

în care $s(t) = b p_2^*(t)$ este funcția de comutare. $p_2^*(t)$ fiind liniară în timp, rezultă că $s(t)$ are cel mult un zero în intervalul $[0,\ \theta]$.

Integrând ecuațiile sistemului pentru $u = \pm u_0$ se obțin ecuațiile:

$$b u_0 x_1(t) = \pm x_2^2(t)/2 + c_{3,4} \text{ pentru } u^* = \pm u_0\,.$$

Acestea sunt două familii de parabole ale căror imagini se dau în fig. VI.5.2 (F_+, F_-). Dacă traiectoria care pornește din (x_{10}, x_{20}) trece prin origine, atunci nu este necesară nicio comutare, sistemul evoluând natural spre origine.

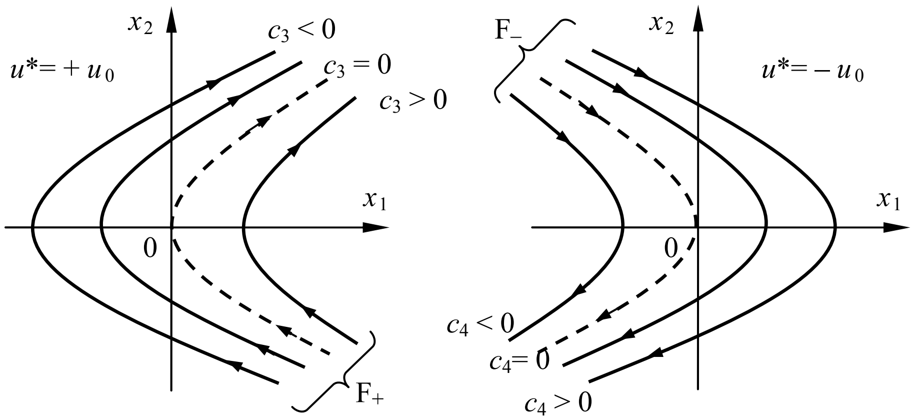

Fig. VI.5.2. Traiectoriile de stare ale sistemului dublu integrator

Dacă traiectoria care pornește din (x_{10}, x_{20}) nu trece prin origine, comutarea trebuie să aibă loc la intersecția acestei traiectorii cu acea traiectorie din cealaltă familie, care trece prin origine, fig. VI.5.3.

Prin urmare, curba de comutare este formată din două ramuri, care trec prin origine, una din familia F_+ şi una din familia F_-. Ecuația curbei de comutare este:

$$x_1 = -S(x_2) \triangleq -(b u_0)^{-1} x_2 \left| x_2 \right| / 2\,.$$

Comanda optimală se realizează cu ajutorul unui releu bipozițional ideal, iar comutarea acestuia are loc după următoarea lege:

$$u^*(t) = u_0 \operatorname{sgn}[-x_1 - S(x_2)]\,.$$

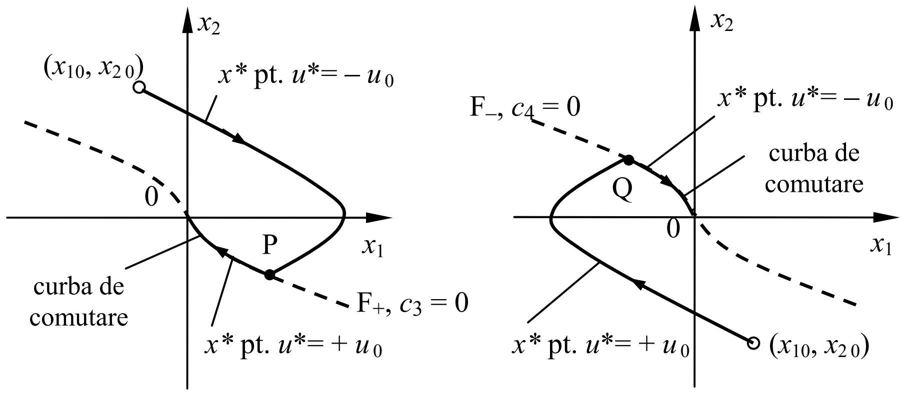

Fig. VI.5.3. Comutarea optimală

Rezultă că $u^*(t)$ se poate realiza prin două conexiuni de reacție negativă:

$u_1 = -x_1 - x_3,\ \ x_3 = S(x_2)$,

una liniară după x_1 şi cealaltă neliniară după x_2. Structura sistemului se prezintă în fig. VI.5.4, iar caracteristica elementului neliniar are forma din fig. VI.5.5.

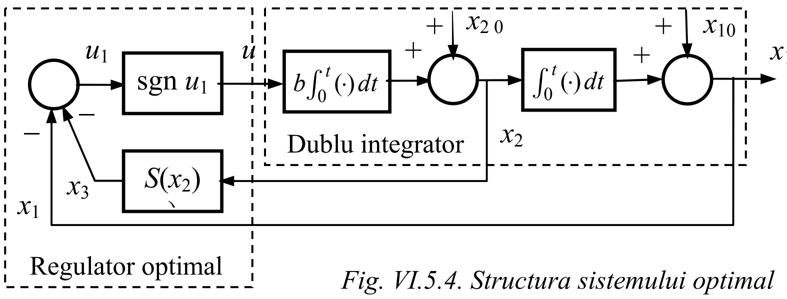

Fig. VI.5.4. Structura sistemului optimal

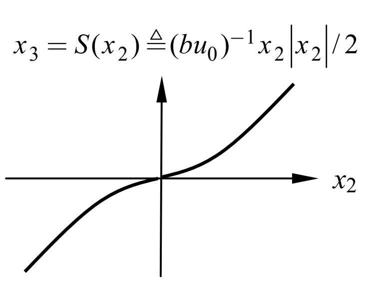

Fig. VI.5.5. Graficul elementului neliniar

Momentul optim al comutării poate fi determinat cunoscând punctele de intersecție P şi respectiv Q, fig. VI.5.3.

Caracteristica neliniară (fig. VI.5.5) poate fi aproximată prin segmente de dreaptă. În acest caz comutarea nu mai are loc în momentul optim. Se spune că procesul de comutare este *suboptimal*. □

6. Programarea dinamică

6.1. Principiul optimalităţii

În continuarea problemelor cu restricţii tratate în subcapitolul precedent, o altă posibilitate de generalizare a condiţiei necesare de extrem (Teorema 2.1) porneşte de la ideea conform căreia orice traiectorie optimală este formată din segmente care sunt de asemenea traiectorii optimale.

Pentru ilustrarea conversiei acestei idei într-un principiu aplicabil practic, se consideră un sistemul dinamic descris de ecuaţia de stare (3.1), în care comanda u este admisibilă relativ la restricţii ($u \in \Omega_a$, v. Definiţia 5.1). Se cere să se sintetizeze o extremală $u^*(t)$, admisibilă relativ la restricţii, care minimizează funcţionala (1.14) (Bolza) şi care transferă starea $x(t)$ din starea iniţială (3.2) până în *momentul final* θ şi în *starea finală* x_f , conform condiţiei finale (3.3).

Presupunând problema rezolvată, fie $u^*(t)$ o comandă optimală şi $x^*(t)$ traiectoria optimală a sistemului (3.1) – fig. VI.6.1. În această situaţie are loc:

$$J(u^*) = J^*_{AB} = \text{minim}\,. \quad (6.1)$$

Fie C, de stare $x^*(t')$, $t' \in [\tau, \theta]$, un punct intermediar al traiectoriei optimale de la A la B. Cu referire la traiectoria ACB se poate demonstra rezultatul următor.

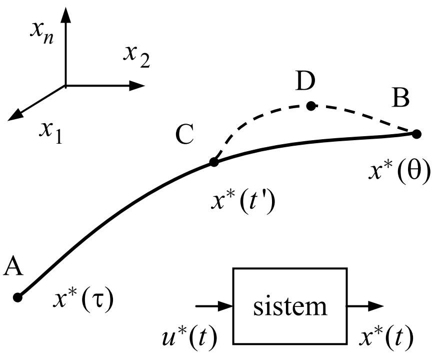

Fig. VI.6.1. Ilustrare la Teorema 6.1

Teorema 6.1

Dacă ACB este o traiectorie optimală de la A la B a sistemului (3.1), atunci CB este o traiectorie optimală de la C la B.

$\mathcal{D}$. Prin ipoteză traiectoria ACB este optimală. Conform cu (6.1) se scrie:

$$J^*_{\mathrm{AB}} = J_{\mathrm{AC}} + J_{\mathrm{CB}} = \text{minim}\,.$$

Se presupune că traiectoria CB nu este optimală. Urmează că există o altă traiectorie, de exemplu CDB (v. fig. VI.6.1) pentru care

$$J_{\mathrm{CDB}} < J_{\mathrm{CB}}.$$

Adunând ambilor membri ai inegalității de mai sus valoarea J_{AC}, se obține:

$$J_{\mathrm{AC}} + J_{\mathrm{CDB}} = J_{ACDB} < J_{\mathrm{AC}} + J_{\mathrm{CB}} = J^*_{\mathrm{AB}}.$$

Aceasta înseamnă că

$$J_{\mathrm{ACDB}} < J^*_{\mathrm{AB}},$$

ceea ce arată că traiectoria ACDB este optimală. Acest rezultat este absurd, deoarece prin ipoteză traiectoria ACB este optimală. □

Din Teorema 6.1 se deduce că în orice moment $t' \in [\tau, \theta]$ comanda $u(t')$ trebuie astfel aleasă încât traiectoria dintre stările $x^*(t')$ şi $x^*(\theta)$ să fie optimală, oricare ar fi starea inițială. Aceasta fiind calitatea esențială a comenzii optimale, se poate formula următorul rezultat fundamental.

Principiul optimalității (Bellman)

Fie sistemul (3.1) şi comanda optimală $u^*(t),\ t \in [\tau, \theta]$ care determină traiectoria optimală $x^*(t),\ t \in [\tau, \theta]$. Fie $x^*(t'),\ t' \in [\tau, \theta]$ o stare intermediară determinată de $u^*(t),\ t \in [\tau, t']$. Comanda optimală are proprietatea că pentru orice t' şi orice $x^*(t')$ comanda $u^*(t),\ t \in [t', \theta]$ este de asemenea optimală. □

6.2. Forma discretă a programării dinamice

Se va presupune că f din ecuația (3.1) a sistemului dinamic şi G, F din indicele de calitate (1.14) nu depind explicit de timp. Această ipoteză nu reduce din generalitatea tratării, deoarece oricând este posibil să se completeze vectorul de stare x cu componenta suplimentara $x_{n+1} = t$ şi ecuația de stare cu $\dot{x}_{n+1} = 1$.

În această situație se consideră sistemul dinamic (3.1) descris de ecuația:

$$\dot{x} = f\big(x(t), u(t)\big), \quad t \in [\tau, \theta] \subseteq \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \Omega_a, \qquad (6.2)$$

cu stările inițială (3.2) şi finală (3.3), şi u admisibilă relativ la restricții (Ω_a a fost introdusă prin Definiția 5.1). Ecuației (6.2) i se asociază indicele de calitate:

$$J(u) = G(x_f) + \int_{\tau}^{\theta} F[x(t), u(t)]dt \,. \tag{6.3}$$

Pentru a utiliza în mod transparent principiul optimalității şi, totodată, pentru a avea în vedere majoritatea aplicațiilor, se discretizează în timp problema (6.2), (6.3). Intervalul $[\tau, \theta]$, cu $\tau < \theta$ fixați, se împarte în N subintervale, fiecare de durată Δt, astfel că se obține $\Delta t = (\theta - \tau)/N$ şi $x_k \triangleq x(k\Delta t),\ u_k \triangleq u(k\Delta t)$.

Ecuația (6.2) are următoarea formă discretă în timp:

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k)\Delta t, \quad k = \overline{0, N-1} \,. \tag{6.4}$$

În acelaşi mod, indicele de calitate se aduce la forma discretă în timp:

$$J = G(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k, u_k)\Delta t \,. \tag{6.5}$$

Teorema 6.2

O condiție necesară ca $u_k^* \in U,\ k = \overline{0, N-1}$, să minimizeze indicele de calitate (6.5) şi să transfere sistemul (6.4) din starea inițială (3.2) în starea finală liberă

$$x_N^* = x_f \,, \tag{6.6}$$

este ca să aibă loc *ecuația Bellman*:

$$S_{N-k}(x_{N-k}^*) = \min_{u_{N-k} \in U} \Big\{ S_{N-k+1}\Big(x_{N-k}^* + f(x_{N-k}^*, u_{N-k})\Delta t \Big) +$$

$$+ F(x_{N-k}^*, u_{N-k})\Delta t \Big\}, \quad k = \overline{1, N} \,, \tag{6.7}$$

în care

$$S_{N-k}(x_{N-k}^*) \triangleq \min_{u_{N-k} \in U} J_{N-k} \,, \tag{6.8}$$

$$J_{N-k} = G(x_N) + \sum_{i=N-k}^{N-1} F(x_i, u_i)\Delta t =$$

$$= J_{N-k+1} + F(x_{N-k}, u_{N-k})\Delta t, \quad k = \overline{1, N} \,. \tag{6.9}$$

𝒟. Conform principiului optimalității, pentru deducerea ecuației (6.7) se pornește de la starea finală x_N^* către starea inițială x_0^* . Se presupune că $u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{N-k}^*, \ldots, u_{N-2}^*$ sunt cunoscuți. Urmează să se determine u_{N-1}^*, sistemul pornind din starea x_{N-1}^*. Comanda u_{N-1}^* se determină numai în funcție de x_{N-1}^* și x_N^* . Se scriu, pentru ultimul segment al traiectoriei stării, ecuația de stare și respectiv indicele de calitate:

$$x_N = x_{N-1} + f(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta t\,, \tag{6.10}$$

$$J_{N-1} = G(x_N) + F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta t\,, \tag{6.11}$$

Se determină u_{N-1}^* care satisface (6.10) și minimizează (6.11). În cadrul acestei proceduri se realizează:

$$S_{N-1}(x_{N-1}^*) = \min_{u_{N-1}\in U} J_{N-1} =$$

$$= \min_{u_{N-1}\in U} \left\{G(x_N^*) + F(x_{N-1}^* u_{N-1})\Delta t\right\}$$

$$= \min_{u_{N-1}\in U} \left\{G\left(x_{N-1}^* + f(x_{N-1}^*, u_{N-1})\Delta t\right) + F(x_{N-1}^*, u_{N-1})\Delta t\right\}.$$

Ca rezultat se obțin comanda optimală u_{N-1}^*, dependentă numai de x_{N-1}^*, și minimul $S_{N-1}(x_{N-1}^*)$ al indicelui de calitate.

Se consideră acum ultimele două segmente ale traiectoriei stării. Se scriu, în mod corespunzător, ecuația de stare și respectiv indicele de calitate:

$$x_{N-1} = x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta t\,, \tag{6.12}$$

$$J_{N-2} = G(x_N) + F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta t + F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta t =$$

$$= J_{N-1} + F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta t\,, \tag{6.13}$$

Se determină u_{N-2}^* care satisface (6.12) și minimizează (6.13). În cadrul acestei proceduri se realizează:

$$S_{N-2}(x_{N-2}^*) = \min_{u_{N-2}\in U, u_{N-1}^*\in U} J_{N-2} =$$

$$= \min_{u_{N-2}\in U, u^*_{N-1}\in U} \left\{ J_{N-1} + F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta t \right\} =$$

$$= \min_{u_{N-2}\in U} \left\{ S_{N-1}(x^*_{N-1}) + F(x_{N-2}\, u_{N-2})\Delta t \right\} =$$

$$= \min_{u_{N-2}\in U} \left\{ S_{N-1}\left(x^*_{N-2} + f(x^*_{N-2}, u_{N-2})\Delta t \right) + F(x^*_{N-2}, u_{N-2})\Delta t \right\}.$$

Ca rezultat se obțin comanda u^*_{N-2} şi minimul $S_{N-2}(x^*_{N-2})$ al indicelui.

Se repetă acest procedeu pentru $k = 3, 4, ..., N$ şi se obține ecuația (6.7). □

Observația 6.1

Aplicarea regresivă a formulei (6.7) conduce la determinarea şirurilor $u^*_{N-1}, u^*_{N-2}, \ldots, u^*_{N-k}, \ldots, u^*_0$ şi respectiv $x^*_N, x^*_{N-1}, \ldots, x^*_{N-k}, \ldots, x^*_1, x^*_0$, ceea ce sugerează realizarea *conducerii optimale prin reacție după stare*. Totodată, faptul că u^*_{N-k} depinde numai de x^*_{N-k}, oferă posibilitatea realizării efective a unei reacții după stare. Concret, comanda u^*_{N-k} poate fi elaborată de către un calculator numeric, pe baza ecuației de recurență (6.7). □

Observația 6.2

Dacă starea finală este fixată, de pildă $x^*_N = x_f = 0$, atunci comanda u^*_{N-1}, la începutul ultimului segment, se determină din (6.4), care se scrie sub forma:

$$f(x^*_{N-1}, u^*_{N-1}) = -\frac{1}{\Delta t} x^*_{N-1}, \quad u^*_{N-1} \in U.$$

Din această ecuație cu restricții se obține soluția

$$u^*_{N-1} = \varphi(x^*_{N-1}).$$

În indicele de calitate (6.5) se adoptă $G \equiv 0$ (v. Observația 3.1.3°). Valoarea minimă a indicelui de calitate, pe ultimul segment, este

$$S_{N-1}(x^*_{N-1}) = F\left(x^*_{N-1}, \varphi(x^*_{N-1}) \right)\Delta t.$$

Cu acest rezultat se continuă calculul conform formulei de recurență (6.7).

Dacă starea finală este fixată şi $x_N \neq 0$, atunci se face schimbarea de variabilă $\tilde{x}_k = x_k - x_N$, pentru care $\tilde{x}_N = 0$ şi se procedează ca mai sus. □

Exemplul 6.1

Se consideră integratorul $\dot{x} = au,\ t \in \mathbb{R}_+,\ |u| \le u_0$ ($m = n = 1,\ a \ne 0$).

Să se determine $u^*(t)$ care transferă starea $x(t)$ din orice $x(0) = x_0 \ne 0$ în $x(\theta) = x_f = 0$ şi minimizează indicele $J = \int_0^\theta u^2(t)\,dt$, cu $\theta > 0$ finit şi fixat.

În formă discretă, cu $\Delta t = \theta / N$, sistemul şi indicele au expresiile:

$$x_{k+1} = x_k + au_k\Delta t,\ J = \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \Delta t .$$

Pe ultimul segment al traiectoriei, ţinând seama că $x_N^* = x_f = 0$, se obţine: $u_{N-1}^* = -x_{N-1}^* / (a\Delta t)$, cu $|x_{N-1}^*| \le au_0\Delta t$, şi $S_{N-1}(x_{N-1}^*) = (x_{N-1}^*)^2 / (a^2\Delta t)$.

Pentru ultimele două segmente:

$$S_{N-2}(x_{N-2}^*) = \min_{u_{N-2}} \left\{ (x_{N-2}^* + a u_{N-2}\Delta t)^2 / (a^2\Delta t) + u_{N-2}^2 \Delta t \right\}.$$

Derivând polinomul dependent de u_{N-2}, condiţia de minim are forma:

$$(x_{N-2}^* + a u_{N-2}\Delta t) / a + u_{N-2}\Delta t = 0,\ |u_{N-2}| \le u_0 ,$$

din care rezultă: $u_{N-2}^* = -x_{N-2}^* / (2a\Delta t)$, $S_{N-2}(x_{N-2}^*) = (x_{N-2}^*)^2 / (2a^2\Delta t)$.

Continuând astfel, pentru $|u_{N-k}^*| \le u_0$, rezultă: $u_{N-k}^* = -x_{N-k}^* / (ak\Delta t)$, $k = \overline{1, N}$. Pentru a exprima comanda în sensul progresiv al timpului se face schimbarea $i = N - k$. Se obţine: $u_i^* = -x_i^* / [a(N-i)\Delta t],\ i = \overline{0, N-1}$.

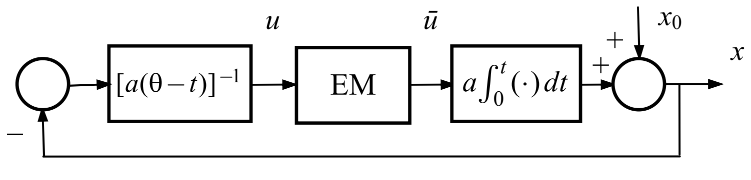

Fig. VI.6.2. Comanda optimală a unui integrator

Comanda u poate fi realizată prin reacţie după stare conform fig. VI.6.2. EM este un element de *eşantionare – memorare* a cărui mărime de ieşire este:

$$\bar{u}(t) = -x_i / [a(N-i)\Delta t],\ t \in [i\Delta t,\ (i+1)\Delta t),\ \ i = \overline{0, N-1} . \ \square$$

ANEXE

Anexa A. Spații vectoriale normate

Definiția 1

O mulțime X are structură de spațiu vectorial (liniar) peste un corp K dacă $(X,+)$ este *grup comutativ* (în care "$+$" este operația de sumare) şi *operația binară externă* $m: K \times X \to X$, notată multiplicativ "$\cdot$", satisface următoarele condiții oricare ar fi $x, y \in X$ şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$:

1° $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

2° $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

3° $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,

4° $1 \cdot x = x$ (1 este elementul unitar din K).

Elementele din X se numesc *vectori*, iar elementele din K se numesc *scalari*. Operația binară externă se numeşte *înmulțire cu un scalar*. □

Definiția 2

A. Elementele $x^1, x^2, ..., x^n \in X$ se numesc *liniar independente* dacă din

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0$$

rezultă $\alpha_i = 0,\ i = \overline{1,n}$.

B. În caz contrar elementele $x^1, x^2, ..., x^n$ se numesc *liniar dependente*. □

Definiția 3

O submulțime $X_b \subseteq X$ se numeşte *bază* a spațiului vectorial X dacă fiecare $x \in X$ se exprimă univoc printr-o combinație liniară

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$$

a unui număr finit de elemente $x^1, x^2, ..., x^n \in X_b$; $x^1, x^2, ..., x^n$ se numesc *coordonatele vectorului* x. □

Teorema 1

Orice spațiu vectorial X are o bază X_b. Fiecare bază X_b din X este formată din elemente liniar independente. □

Teorema 2

Dacă un spaţiu vectorial X are o bază finită X_b, atunci oricare altă bază X'_b are acelaşi număr de elemente ca şi X_b. Acest număr se numeşte dimensiunea spaţiului vectorial X. □

Definiţia 4

O funcţie reală $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ se numeşte *normă* dacă satisface condiţiile:

1° $\|x\| > 0$ oricare ar fi $x \in X,\ x \neq 0$.

2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $\alpha \in K$.

3° $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ oricare ar fi $x, y \in X$.

În cazul normelor de matrice se mai adaugă condiţia:

4° $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ oricare ar fi $x, y \in X$. □

Definiţia 5

Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă se numeşte spaţiu vectorial normat. □

Exemple de norme

Norma	vectorului $x \triangleq (x_i)_{i=\overline{1,n}}$	matricei $A \triangleq (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ indusă de o norma vectorială
norma p (Hölder)	$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$	$\|A\|_p = \max_{x\neq 0}\|Ax\|_p \left(\|x\|_p\right)^{-1}$
norma 2 (euclideană)	$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\|Ax\|_2 \left(\|x\|_2\right)^{-1}$
norma 1	$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert$	$\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^m \lvert a_{ij}\rvert$
norma ∞	$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \lvert x_i\rvert$	$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^n \lvert a_{ij}\rvert$

Norme matriceale. Dacă se tratează matricea A ca un vector de dimensiune mn, atunci norma p are forma $\|A\|_p = \left(\sum_{i=1,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}$.

Anexa B. Matrice polinomiale

1. Terminologie şi definiţii

O matrice $m \times n$ de forma:

$$P(s) \triangleq \left(p_{ij}(s)\right)_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

se numeşte *matrice polinomială* dacă elementele ei $p_{ij}(s)$ sunt polinoame în s.

Matricea polinomială (1.1) poate fi exprimată şi sub forma:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{q} P_k s^k \,, \tag{1.2}$$

în care P_k, $k = \overline{1,q}$, sunt matrice constante de dimensiuni $m \times n$. Gradul matricei $P(s)$ este egal cu gradul elementului de gradul cel mai înalt conținut de $P(s)$.

Dacă $m = n$, matricea $P(s)$ poate fi:

(a) *Nesingulară* dacă $\det P(s) \neq 0$.

(b) *Singulară* dacă $\det P(s) \equiv 0$.

(c) *Unimodulară* dacă $\det P(s) = \text{constant} \neq 0$.

Rangul normal al matricei polinomiale $P(s)$, notat

$$\rho \triangleq \text{nrang}\, P(s) \,, \tag{1.3}$$

este dimensiunea minorului de ordin maxim, neidentic nul, conținut de $P(s)$.

Pentru un număr finit de valori numerice $z \in \mathbb{C}$ are loc

$$\rho_z \triangleq \text{rang}\, P(z) < \rho = \text{nrang}\, P(s) \leq \min(m, p) \,. \tag{1.4}$$

O astfel de valoare a rangului se numeşte *rangul local,* iar z se numeşte *zero* al matricei $P(s)$.

Pentru $m = n$ şi $P(s)$ nesingulară se poate calcula matricea inversă:

$$P^{-1}(s) = \frac{\text{adj}\, P(s)}{\det P(s)} \,.$$

Evident, dacă inversa matricei polinomiale $P(s)$ este matrice polinomială, atunci $P(s)$ este unimodulară.

2. Operații elementare cu matrice polinomiale

Operațiile elementare, ca în cazul matricelor constante, constau în:

(a) Interschimbarea liniilor (coloanelor) *i* şi *j*.

(b) Multiplicarea oricărei linii (coloane) cu un scalar nenul.

(c) Înlocuirea oricărei linii (coloane) cu respectiva linie (coloană) înmulțită cu un polinom neidentic nul.

În legătură cu matricele unimodulare se poate afirma că acestea se obțin din matricea unitate de ordin corespunzător printr-un număr finit de operații elementare. Din această afirmație se trage următoarea concluzie: orice secvență finită de operații elementare pe linii (coloane) în matricea polinomială $P(s)$ este echivalentă cu înmulțirea lui $P(s)$, la stânga (dreapta), cu o matrice unimodulară.

3. Divizibilitatea matricelor polinomiale

Dacă $\det Q(s) \neq 0$, atunci perechea de matrice $P(s)$ şi $Q(s)$, cu $\mathrm{grd}P(s) > \mathrm{grd}Q(s)$, există perechile de matrice $\big(U(s),\ R_1(s)\big)$ şi $\big(V(s),\ R_2(s)\big)$ astfel încât

$$P(s) = U(s)Q(s) + R_1(s), \tag{3.1}$$

$$P(s) = Q(s)V(s) + R_2(s), \tag{3.2}$$

în care $\mathrm{grd}R_1(s) < \mathrm{grd}Q(s)$ şi $\mathrm{grd}R_2(s) < \mathrm{grd}Q(s)$.

Identitățile (3.1) şi (3.2) au, respectiv, următoarele cazuri particulare prin care se definesc divizorii şi multiplii unei matrice polinomiale:

(a) Dacă $R_1(s) \equiv 0$, atunci $\begin{cases} Q(s) \text{ este un } \textit{divizor la dreapta} \text{ al lui } P(s); \\ P(s) \text{ este un } \textit{multiplu la stinga} \text{ al lui } Q(s). \end{cases}$

(b) Dacă $R_2(s) \equiv 0$, atunci $\begin{cases} Q(s) \text{ este un } \textit{divizor la stinga} \text{ al lui } P(s); \\ P(s) \text{ este un } \textit{multiplu la dreapta} \text{ al lui } Q(s). \end{cases}$

Două matrice polinomiale $P(s)$ şi $Q(s)$ se numesc:

- echivalente pe linii dacă există o matrice unimodulară $U_L(s)$ astfel încât:

$$P(s) = U_L(s)Q(s); \tag{3.3}$$

- echivalente pe coloane dacă există o matrice unimodulară $U_R(s)$ astfel încât:

$$P(s) = Q(s)U_R(s); \tag{3.4}$$

- echivalente pe linii şi coloane dacă există matricele unimodulare $U_L(s)$ şi $U_R(s)$ astfel încât:

$$P(s) = U_L(s)Q(s)R_R(s). \tag{3.5}$$

Două matrice polinomiale $P(s)$ şi $Q(s)$, având acelaşi număr de coloane, se numesc relativ prime (sau co-prime) la dreapta dacă există două matrice polinomiale $M(s)$ şi $N(s)$ astfel încât:

$$M(s)P(s) + N(s)Q(s) = I, \tag{3.6}$$

în care I este matricea unitate de ordin corespunzător. Evident, dimensiunile matricelor sunt compatibile cu operațiile de înmulțire şi de sumare din relația (3.6).

În mod similar, două matrice polinomiale $M(s)$ şi $N(s)$, având acelaşi număr de linii, se numesc relativ prime (sau co-prime) la stânga dacă există două matrice polinomiale $P(s)$ şi $Q(s)$ astfel încât să aibă loc (3.6).

Matricele polinomiale $Q_R(s)$ şi $Q_L(s)$ se numesc c.m.m.d.c. la dreapta, respectiv la stânga, ale perechii de matrice $\left(P_1(s),\, P_2(s)\right)$, având acelaşi număr de linii, respectiv de coloane, dacă există perechea de matrice $\left(R_1(s),\, R_2(s)\right)$, respectiv $\left(L_1(s),\, L_2(s)\right)$, astfel încât au loc respectiv:

$$Q_R(s) = R_1(s)P_1(s) + R_2(s)P_2(s)\,, \tag{3.7}$$

$$Q_L(s) = P_1(s)L_1(s) + P_2(s)L_2(s)\,. \tag{3.9}$$

O consecință importantă a acestui rezultat este faptul că două matrice polinomiale cu acelaşi număr de coloane (linii) sunt relativ prime la dreapta (stânga) dacă toți c.m.m.d.c. la dreapta (stânga) sunt matrice unimodulare.

Determinarea c.m.m.d.c. la dreapta, respectiv la stânga, al unei perechi de matrice polinomiale $\left(P_1(s),\, P_2(s)\right)$ se bazează pe proprietatea că dacă $P_1(s)$ este de dimensiuni $n\times n$ şi $P_2(s)$ este de dimensiuni $m\times n$, atunci există matricele unimodulare $U_L(s)$, respectiv $U_R(s)$, de dimensiuni $(m+n)\times(m+n)$, astfel încât au loc respectiv:

$$U_L(s)\begin{bmatrix} P_1(s) \\ ----- \\ P_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_R(s) \\ ---- \\ 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ coloane}} \begin{matrix} \}\, n \text{ linii} \\ \\ \}\, m \text{ linii} \end{matrix} \quad (3.10) \qquad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ ----- \\ P_2(s) \end{bmatrix} U_R(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_L(s) \\ ---- \\ 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ coloane}} \begin{matrix} \}\, n \text{ linii} \\ \\ \}\, m \text{ linii} \end{matrix} .(3.11)$$

Anexa C. Forme pătratice şi forme hermitice

Forme pătratice

Fie A o matrice reală de ordinul *n*, simetrică, adică $A = A^T$. Prin definiție

$$y = x^T A x,\;\; x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

este o formă pătratică şi A este matricea formei pătratice.

Definiția 1

A. Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A se numesc *pozitiv definite* dacă $y > 0$ pentru $x \neq 0$ şi $y = 0$ pentru $x = 0$.

B. Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A se numesc *negativ definite* dacă $-y$ şi, $-A$ sunt pozitiv definite. □

Definiția 2

A. Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A se numesc *pozitiv semidefinite* dacă $y \geq 0$ pentru $x \neq 0$ şi $y = 0$ pentru $x = 0$.

B. Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A se numesc *negativ semidefinite* dacă $-y$ şi, $-A$ sunt pozitiv semidefinite. □

Definiția 3

Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A se numesc *nedefinite* dacă (1) nu satisface condițiile Definițiilor 1 şi 2. □

Criteriul Sylvester, [25], [26]

Forma pătratică (1) şi, respectiv, matricea A sunt:

1° pozitiv definite dacă şi numai dacă toți minorii principali diagonali ai matricei A sunt pozitivi;

2° negativ definite dacă şi numai dacă toți minorii principali diagonali ai matricei A sunt, cei de ordin impar, negativi, iar cei de ordin par, pozitivi;

3° pozitiv semidefinite dacă şi numai dacă $\det A = 0$ şi toți minorii principali diagonali sunt nenegativi;

4° negativ semidefinite dacă şi numai dacă $\det A = 0$ şi toți minorii principali diagonali sunt, cei de ordin impar, nepozitivi, iar cei de ordin par, nenegativi;

5° nedefinite dacă şi numai dacă nu au loc 1° – 4°. □

Forme hermitice

O matrice complexă A, de ordinul n, se numeşte *matrice hermitică* dacă satisface condiția $A = A^*$; $(\ )^*$ simbolizează conjugarea şi transpunerea.

Valorile proprii ale matricei hermitice A sunt reale şi $\det A$ este o cantitate reală. Dacă matricea hermitică A este reală, atunci ea este simetrică. Prin definiție

$$y = x^* A x,\ x \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

este o *formă hermitică*.

Întrucât y ia valori pe $\mathbb{R}$, Definițiile 1 – 3 se extind în mod corespunzător şi pentru forma hermitică (2). În acest caz se aplică *criteriul Sylvester*, care este valabil şi pentru matricele hermitice.

Anexa D. Calculul valorilor proprii ale matricei de răspuns la frecvență

1. Preliminarii

Trasarea locurilor de transfer caracteristice $g_i(j\omega),\ i=\overline{1,\eta}$, ale matricei de răspuns la frecvență $G(j\omega)$, se bazează pe determinarea valorilor sale proprii $\gamma_i(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,m}$. $G(j\omega)$ se calculează pentru un şir finit de valori semnificative ω_k, $k=\overline{1,K}$. În această situație prin proceduri de sortare şi interpolare se grupează şi se ordonează valorile proprii $\gamma_i(j\omega_k),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,K}$, în scopul asigurării continuității în trasarea locurilor de transfer caracteristice $g_i(j\omega),\ i=\overline{1,\eta}$.

Dificultățile abordării directe a problemei asigurării continuității pot fi evitate dacă se ține seama că $G(j\omega)$ formează o familie de matrice parametrizată după $\omega \in \mathbb{R}$. Acest punct de vedere transformă problema determinării valorilor proprii într-o problemă de tip Cauchy pentru care continuitatea soluției este asigurată în mod implicit.

2. Formularea problemei

Fie $M(\alpha)$ o matrice $m \times m$, complexă, dependentă de parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$. Fie λ_i, $i=\overline{1,m}$, valorile proprii simple ale matricei $M(\alpha)$ şi $\overline{\lambda}_i$ (conjugata lui λ_i), $i=\overline{1,m}$, valorile proprii ale matricei $M^*(\alpha)$ ($(\cdot)^*$ simbolizează transpunerea şi conjugarea matricelor şi vectorilor). Fie e_i şi f_i vectorii proprii asociați valorilor proprii λ_i şi $\overline{\lambda}_i$.

În aceste circumstanțe, în conformitate cu procedura din [119], se pot scrie următoarele ecuații:

$$\frac{d\lambda_i}{d\alpha} = \frac{< \frac{dM}{d\alpha} e_i, f_i >}{< e_i, f_i >},\ i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

$$\frac{de_i}{d\alpha} = \sum_{j=1\, j\neq i}^{m} \frac{< \frac{dM}{d\alpha} e_i, f_j >}{(\overline{\lambda}_i - \lambda_j) < e_i, f_i >} e_j,\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\frac{df_i}{d\alpha}=\sum_{j=1\, j\neq i}^{m}\frac{<f_i,\dfrac{dM}{d\alpha}e_j>}{(\bar{\lambda}_i-\lambda_j)<e_j,f_i>}f_j,\quad i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

în care $<,>$ simbolizează produsul scalar (complex) al vectorilor.

Ecuaţiile (1) – (3) pot fi scrise sub forma matriceală după cum urmează:

$$\frac{dS}{d\alpha}=W\left[S\frac{dM}{d\alpha}S^{-1},\ \ SMS^{-1}\right]S \tag{4}$$

$$\Lambda=SMS^{-1}, \tag{5}$$

în care $S\triangleq\left[f_1^*,\ \ f_2^*,....,f_m^*\right]$, $W[,]$ este o funcţie matriceală de două variabile matriceale în care se ţine seama de coeficienţii din (3), şi $\Lambda=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right\}$.

Având în vedere dificultăţile computaţionale ridicate de (4), (5), în locul transformării de similitudine (5) care diagonalizează matricea M, se apelează la transformări de similitudine care transformă matricea M într-o matrice inferior/ superior triunghiulară sau inferior / superior Hessenberg (cu elemente nule peste / sub prima supra/sub diagonală).

3. Algoritm de continuitate LU

Se are în vedere transformarea de similitudine:

$$L=U\,M\,U^{-1}, \tag{6}$$

în care L este o matrice inferior triunghiulară. Ecuaţia (4) se înlocuieşte cu:

$$\frac{dU}{d\alpha}=XU\ , \tag{7}$$

în care X (strict superior triunghiulară) se determină cu ajutorul *ecuaţiei comutante*:

$$^{u}[LX-XL]={}^{u}\left[U\frac{dM}{d\alpha}U^{-1}\right]. \tag{8}$$

$^{u}[\ \ ]$ simbolizează anularea elementelor supra diagonale ale unei matrice.

În acelaşi timp ecuaţia (5) se înlocuieşte cu (6).

În legătură cu ecuaţia (8) problema esenţială este aceea a soluţionării unei ecuaţii comutante de forma:

$$^{u}\left[LX-XL\right]={}^{u}\left[D\right], \tag{9}$$

în care L şi D sunt date. Soluția recursivă a ecuației (9) are forma:

$$\begin{cases} x_{ij} = \dfrac{d_{ij} + \sum_{k=j+1}^{m} x_{ik} l_{kj} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_{kj}}{(\lambda_i - \lambda_j)}, & 1 \le i < j \le m, \\ x_{ij} = 0, & 1 \le j < i \le m. \end{cases} \tag{10}$$

În aceste circumstanțe (7), (10), cu $U(0)$ dat, este o problemă de tip Cauchy. Cu soluția U se poate calcula L, conform ecuației (6), pe a cărei diagonală principală apar valorile proprii ale matricei M .

Anexa E. O formulă Schur pentru matrice partiționate

Fie M o matrice pătratică de ordinul n, cu următoarea partiționare:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right],$$

în care M_{11} este de ordinul $m < n$, cu $\det M_{11} \ne 0$, M_{22} este de ordinul $n - m$, şi M_{12}, M_{21} sunt matrice de dimensiuni adecvate. În aceste condiții are loc

$$\det M = \det M_{11} \det(M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}). \tag{1}$$

Demonstrația se bazează pe calculul determinanților produselor de matrice:

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{11}^{-1} & 0 \\ \hline -M_{21}M_{11}^{-1} & I_{n-m} \end{array}\right] M \equiv \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} M_{11}^{-1} & 0 \\ \hline -M_{21}M_{11}^{-1} & I_{n-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c|c} I_m & M_{11}^{-1}M_{12} \\ \hline 0 & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{array}\right]}, \tag{2}$$

în care I_{n-m} este matricea unitate de ordinul $n - m$.

Într-adevăr, trecând la determinanți în (2) se obține:

$$\det M_{11}^{-1} \det M = \det \left[\begin{array}{c|c} I_m & M_{11}^{-1}M_{12} \\ \hline 0 & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{array}\right], \tag{3}$$

unde I_m este matricea unitate de ordinul m. După calcule elementare, din (3) se obține (1).

Anexa F. Principiul argumentului

Fie $G(s) = Q(s)/P(s)$ o funcție rațională în care $P(s)$ și $Q(s)$ sunt două polinoame cu coeficienți reali, relativ prime, cu $\text{grd}\,P(s) = n$, $\text{grd}\,Q(s) = m$.

Fie γ un contur închis, cu tangenta continuă, situat în planul complex $\mathbb{C}$. $G(s)$ are m_γ zerouri şi n_γ poli în interiorul conturului γ şi $\tilde{m}_\gamma$ zerouri şi $\tilde{n}_\gamma$ poli pe conturul γ. Numerele $m_\gamma, n_\gamma, \tilde{m}_\gamma, \tilde{n}_\gamma$ includ şi multiplicitățile corespunzătoare.

Teoremă (Cauchy)

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma)\,. \square \qquad (1)$$

Prin integrare, din (1) se obține:

$$[\ln G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma) \qquad (2)$$

Pentru $G(s) = |G(s)| e^{j \arg G(s)}$ din (2) se obține *principiul argumentului*:

$$[\arg G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi(m_\gamma - n_\gamma) + \pi(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma). \qquad (3)$$

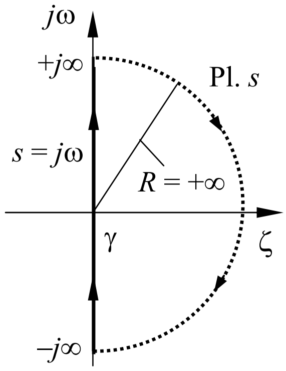

Fig. 1. Conturul Nyquist

Folosind *conturul Nyquist* (v. fig. 1), relația (3) permite evaluarea *variației totale a argumentului* în funcție de numărul de zerouri şi de poli ai funcției $G(s)$ situați în semiplanul $\{s \in \mathbb{C};\, \text{Re}\, s \geq 0\}$.

Fie $m_\gamma = m_+$ şi $n_\gamma = n_+$ numărul de zerouri şi respectiv de poli ai lui $G(s)$ situați în $\{s \in \mathbb{C};\, \text{Re}\, s > 0\}$. Fie m_0 şi n_0 numărul de zerouri finite şi respectiv de poli finiți în $\{s \in \mathbb{C};\, \text{Re}\, s = 0\}$. Se ştie că $G(s)$ mai are în punctul de la infinit: fie un zero de multiplicitate $|m - n|$ pentru $m < n$, fie un pol de aceeaşi multiplicitate pentru $m > n$. Întrucât $R = +\infty$ (fig. 1), rezultă că punctul de la infinit aparține conturului γ. Ca urmare, pe conturul Nyquist are loc $\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma = m_0 - n_0 - (m - n)$. În aceste circumstanțe, pentru $s = j\omega$ şi ω luând valori de la $-\infty$ la $+\infty$ (adică $s \in \gamma$ în fig. 1, dar γ parcurs în sens negativ), din (3) se obține variația totală a argumentului pe conturul Nyquist:

$$\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty} = 2\pi(n_+ - m_+) + \pi(n_0 - m_0) + \pi(m - n)\,.$$

Lista de simboluri şi abrevieri

$\mathbb{R}$ – mulţimea numerelor reale
$\mathbb{R}_+$ – mulţimea numerelor reale nenegative
$\mathbb{Z}$ – mulţimea numerelor întregi
$i = \overline{1,n}$ – indicele i ia valorile $1, 2, \dots, n$
$\mathbb{C}$ – mulţimea numerelor complexe
$\mathbb{C}_-$ – mulţimea numerelor complexe cu parte reală negativă
$\mathbb{C}_+$ – mulţimea numerelor complexe cu parte reală nenegativă
$\operatorname{int} X$ – interiorul mulţimii X
$\dim X$ – dimensiunea spaţiului X
$\inf S$ – infimum al submulţimii S
$\sup S$ – supremum al submulţimii S
$\oplus$ – suma directă de subspaţii
$\varnothing$ – mulţimea vidă
$\mathrm{j} \triangleq \sqrt{-1}$
$\operatorname{Re} s$ – partea reală a lui $s \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im} s$ – partea imaginară a lui $s \in \mathbb{C}$
$|s|$ – modulul lui $s \in \mathbb{C}$
$\arg s$ – argumentul lui $s \in \mathbb{C}$
$\|\cdot\|$ – norma entităţii $\cdot$ (vector sau matrice)
I_n – matricea unitate de ordinul n
M^T – transpusa matricei M
M^* – conjugata transpusă a matricei M
$\operatorname{rang} M$ – rangul matricei M
$\operatorname{Im} M$ – imaginea matricei M
$\operatorname{Ker} M$ – nucleul matricei M
$\dim M$ – dimensiunea (ordinul) matricei pătratice M
$\det M$ – determinantul matricei pătratice M
$\operatorname{adj} M$ – adjuncta matricei pătratice M
$\operatorname{Tr} M$ – urma matricei pătratice M
$\operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – matrice diagonală
$\operatorname{grd} \Delta(s)$ – gradul polinomului $\Delta(s)$
$p \mid q$ – p divide pe q
$\operatorname{grad} V(x)$ – vectorul gradient al funcţiei scalare $V(x)$
$\mathscr{D}$ – începutul unei demonstraţii
$\square$ – sfârşitul unui enunţ (excepţie fac teoremele urmate de demonstraţii), al unei demonstraţii, al unei observaţii sau al unui exemplu
$\mathscr{L}$ – transformarea Laplace directă
$\mathscr{L}^{-1}$ – transformarea Laplace inversă
c.m.m.m.c – cel mai mic multiplu comun
c.m.m.d.c. – cel mai mare divizor comun
v. $(\dots)$ – vezi $(\dots)$

Bibliografie

Bibliografie generală

[1] Arnold, V.I., Ordinary Differential Equations. Springer, 1992.

[2] Banks, S., Control Systems Engineering. *Prentice Hall*, Englewood Clifs, N.J, 1986.

[3] Barbu, V., Ecuații diferențiale. *Junimea*, Iaşi, 1985.

[4] Barnett, S., Matrices in Control Theory. *Van Nostrand*, London, 1971.

[5] Barnett, S., Introduction to Mathematical Theory of Control. *Clarendon*, Oxford, 1975.

[6] Bellman, R.E., Matrix Analysis. *McGraw Hill*, New York, 1968.

[7] Bertalanffy, L. v., Théorie générale des systèmes. *Dunod*, Paris, 1973.

[8] Boullion, T.L., Odell, P.L., Generalized Inverse Matrices. *Wiley*, New York, 1971.

[9] Broucke, M.E., Systems Control, August 15, 2006, http://www.control. utoronto.ca/~ broucke/ece557f/Lectures.

[10] Casti, J., Alternate Realities; Mathematical Models of Nature and Man. *Wiley*, New York, 1989.

[11] Cronin, J., Differential Equations. *Dekker*, New York, 1980.

[12] Cruz, Jr., J.B., Feedback Systems. *McGraw Hill*, New York, 1972.

[13] D'Azzo, J.J., Houpis, H.C., Linear Control System Analysis and Design; Conventional and Modern. *McGraw Hill*, New York, 1988.

[14] Dobra, P., Teoria sistemelor. Editura Mediamira, Cluju-Napoca, 2002.

[15] Doetsch, G., Handbuch der Laplace Transformation, I-III. *Birkhäuser*, Basel, 1950-56.

[16] Dorf, C.R., Modern Control Systems. *Addisson-Wesley*, Reading, 1989.

[17] Doyle, J., Francis, B., Tannenbaum, A., Feedback Control Theory, *Macmillan*, London, 1990.

[18] Dragănescu, M., conştiinței. Institutul de Cercedtări pentru Inteligență Artificială al Academiei Române, Bucureşti, 2007.

[19] Dragomir, T.L., , Elemente de teoria sistemelor, vol. 1. Editura Politehnica, Timişoara, 2004.

[20] Dumitrache, I., Ingineria sistemelor automate. Editura Politehnica Press, Bucureşti, 2005.

[21] Filip, F.G. (Ed.), Societatea informațională – Societatea conoaşterii; concepte, soluții şi strategii pentru România, *Ed. Expert*, Bucureşti, 2001.

[22] Föllinger, O., Laplace- Fourier- und z-Transformation, 8 Aufl. *Hüthig Verlag*, Heidelberg, 2003.

[23] Föllinger, O., Regelungstechnik, 8. Aufl. *Hüthig Verlag*, Heidelberg, 1994.

[24] Franklin, F.G., Powell, D.J., Emmami-Maeini, Abass, Feedback Control of Dynamic Systems. *Addisson-Wesley*, Reading, 1986.

[25] Gantmacher, F. R., Teoria Matrits. Nauka, Moskva, 1966.

[26] Horn, A. R, Johnson, A. C., Matrix Analysis. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1985.

[27] Kalman, R.E., Falb, P.L., Arbib, M.A., Topics in Mathematical System Theory. *McGraw Hill*, New York, 1969.

[28] Laszlo, E., General system theory: prospects and principles. Proceedings of the 3rd Int. Congress of Cybernetics and Systems, Bucharest, 1975.

[29] Lazăr, C., Vrabie Drăguna, Carari, S. Sisteme automate cu regulatoare PID, *Ed. Matrix Rom*, Bucureşti, 2004.

[30] Luenberger, D.G., Introduction to Dynamic Systems. *Wiley*, New York, 1975.

[31] Marin, C., Structuri şi legi de reglare automată. Editura Universitaria, 2000.

[32] Mesarovic, M.D., Takahara, Y., General System Theory. Mathematical Foundations. *Academic Press*, New York, 1975.

[33] Păstrăvanu, O., Ibănescu, R., Limbajul bond-graf în modelarea şi simularea sistemelor fizico-tehnice. Editura „Gh. Asachi“, Bucureşti, 2001.

[34] Preitl, Şt., Pricop, R.E., Elemente de bază ale reglajului automat. *Editura Politehnica*, Timişoara, 2001.

[35] Teodorescu, H.-N., Zbancioc, M., Voroneanu,O., Sisteme bazate pe cunoştinţe. Aplicaţii. *Editura Performantica*, Iaşi, 2004.

[36] Tufiş, D., Promovarea limbii române în SI-SC. www.academiaromana.ro /pro_pri/doc/st_h01.doc

[37] Unbehauen, R., Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich, *Oldenbourg*, München, Wien, 2002.

[38] Voicu, M., Teoria sistemelor, I, II. Institutul Politehnic din Iaşi, 1980.

[39] Voicu, M., Teoria sistemelor şi cibernetica tehnică – conexiuni şi perspective în domeniul învăţământului tehnic superior. Simp. „Contribuţii româneşti la dezvoltarea ştiinţei”, *Academia Română*, Filiala Iaşi, 1986.

[40] Voicu, M., De la legea lui Ohm la teoria sistemelor. *Al V-lea Simp. Naţ. de Teoria Sist.*, *Universitatea din Craiova*, 26-27 mai 1988, vol. II, pp. 47-60.

[41] Voicu, M., Marcu T., The integration of computer science topics – clue of education in control engineering. W*orkshop on Comp. Sci. Topics for Control Engrg. Education*, *Vienna University of Technology*, Sept. 13-15, 1993; *SEFI Documents*, No. 10/1993, Brussels, pp. 7-12.

[42] Voicu, M., Sisteme automate multivariabile. *Editura „Gh. Asachi*", Iaşi, 1993.

[43] Voicu, M., Moroşan B.-I., Teaching fundamentals of automatic control and system theory. *European Seminar on Automation and Control Technology Education – „EXACT 94*", *Technical University of Dresden*, 11-12.04.1994; *SEFI Documents*, Brussels, pp. 44-50.

[44] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Transfering knowledge from mathematics to control systems theory; a metatheoretic and didactic viewpoint. *Int. Workshop on Education in Control Engrg.*, *Vienna Univ Technol.*, 1993.

[45] Voicu, M., Păstrăvanu O., Schönberger F., Ferariu L., Introducere în automatică, culegere de probleme. *Editura Matrixrom*, Bucureşti, 2000.

[46] Voicu, M., Teoria sistemelor cu aplicații în bioingineria medicală. *Editura „Gh. Asachi*", Iaşi, 2001.

[47] Voicu, M., Introducere în automatică. *Editura Polirom*, Iaşi, 2002.

[48] Voicu, M., Secolul XXI sau cum descinde secolul XXI din mileniul II. *Editura Academiei Române*, Bucureşti, 2006.

[49] Vrabie, I., Ecuații diferențiale. *Editura Matrixrom*, Bucureşti, 1999.

[50] Wonham, W.M., Linear Multivariable Control. *Springer*, Berlin, 1974.

[51] Zadeh, L.A., Teoria sistemelor. *Editura Tehnică*, Bucureşti, 1976.

Bibliografie pentru capitolele I, II şi III (sisteme liniare)

[52] Ahmed, N.U., Elements of Finite – Dimensional Systems and Control Theory. *Logman*, Harlow, 1988.

[53] Ackermann, J., On th synthesis of linear control systems wth specified characteristics. Automatica, vol. 13, 1977, pp. 89-93.

[54] Antsaklis, P.J., Michel, A.N., Linear Systems. *Birkhäuser*, Boston, 2006.

[55] Barnett, S., Polynomials and Linear Control Systems. *Dekker*, New York, 1983.

[56] Bose, N. K., Buchberger, B., Guiver, J. P., Bose, N. K., Multidimensional Systems Theory and Applications. *Kluwer Academic*, Amsterdam, 2004.

[57] Brockett, R. W., Introduction to Dynamic Systems. Wiley, New York, 1970.

[58] Brogan, W.L., Modern Control Theory. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1991.

[59] Chen, C-T., Linear System Theory and Design. *Oxford Univ. Press*, 1999.

[60] Davison, E.J., Wang, S.H., On pole assignment in liniar multivariable systems using output feedback. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-20, 1975, pp. 516-518.

[61] Desoer, C.A., Schulman, J.D., Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation. *IEEE Trans. Circuits Syst*., vol. 21, 1974, pp. 3-8.

[62] Emami-Naeini, A., Van Doren, P., Computation of zeros of linear multivariable systems. *Automatica* (*IFAC*), vol. 18, no. 4, 1982, pp. 415-430.

[63] Feştilă, C., Abrudean, M., Dulf, Eva, Electronică de putere în automatică, Mediamira, Cluj_Napoca, 2003

[64] Friendland, B., Control System Design. *McGraw Hill*, New York, 1987.

[65] Furuta, K., Sano, A., Atherton, D., State Variable Methods in Automatic Control. *Wiley*, New York, 1988.

[66] Gilles, E.D., Retzbach, B., Silberberger, F., 1980, Modeling, simulation and control of an extractive distillation column. Computer Appl. to Chern. Eng. (ACS Symp. ser. nr. 124), 481-492.

[67] Gilles, E.D., Retzbach, B., 1983, Reduced models and control of distillation columns with sharp temperature profiles. IEEE Trans. on AC, AC-28, 5, 628-630.

[68] Ionescu, V., Sisteme liniare. *Editura Academiei*, Bucureşti, 1973.

[69] Ionescu, V., Teoria sistemelor; sisteme liniare. *EDP*, Bucureşti, 1985.

[70] Ionescu, V., Popeea C., Conducerea structurală a sistemelor liniare. *Editura Tehnică*, Bucureşti., 1986.

[71] Kailath, T., Linear Systems. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1980.

[72] Kalman, R.E., Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM J. Control*, vol. 1, 1963, 152-192.

[73] Kalman, R.E., Ho, Y.C., Narendra, K.S., Controllability of linear dynamical systems. *Contribution to Differential Equations*, vol. 1, no. 2, *Wiley*, New York, 1963, pp. 189-213.

[74] Laub, J.A., Heath T.M., Paige, C.C, Ward, C.R., Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-32, 1987, no. 2, pp. 115-122.

[75] Luenberger, D.G., An introduction to observers. *IEEE Trans. on AC*, AC-11, 1971, pp. 190-197.

[76] MacFarlane, J.G.A., Karkanias, N., Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory. *Int. J. Control*, vol. 24, 1976, pp. 33-74.

[77] Mayne, D.Q., Computational procedure for the minimal realization of transfer function matrices. *Proc. IEE*, 115, 1968, 1363-1368.

[78] Mikusinski, I., Une demonstration simple du theoreme de Titchmarsh sur la convolution. *Bull. Acad. Pol. Sc.*, 7, 1959, 12, pp. 715-717.

[79] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Eigenvalues assignment method based on non- recursive linear models. In V. Barbu (Ed.), Differential Equations and Control Theory, *Logman*, Harlow, 1991, pp. 264-272.

[80] Păstrăvanu, O., Voicu, M., A trajectory - related geometric insight on state feedback derived from Ackermann's formula. In Trappl, R., Cybernetics and Systems, *World*

Scientific Publ., Singapore, 1992.

[81] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Effects of sampled and quantized control on the geometry of reachability sets of linear continuous systems. In A. Sydow (Ed.), Computational Systems Analysis, *Elsevier*, Amsterdam, 1992, pp. 221-226.

[82] Păstrăvanu, O., Modelling and Real Time Control of Dynamic Systems with Unknown Parameters. *Doctoral thesis* (in Romanian), *Technical University of Iaşi*, 1992.

[83] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Isopescu, L., Design and real time implementation of a structurally stable compensator for a BIBO unstable multi-model system. *Studies in Informatics and Control*, vol. 1, 1992, 3, pp. 215-225.

[84] Pernebo, L., Notes on strict system equivalence. *Int. J. Control*, vol. 25, 1977, pp. 28-38.

[85] Porter, B., Eigenvalue assignment in linear multivariable systems by output feedback. *Int. J. Control*, vol. 25, 1977, pp. 483-490.

[86] Reinschke**,** K., Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.

[87] Retzbach, B., 1983, Einsatz von systemtechnische Methoden am Beispiel einer Mehrstoffdestillation. Chem-Ing.-Techn., 55, 3, 235-238.

[88] Rosenthal, J., Willems, Open problems in the area of pole placement. In Blondel, V.D., et al. (Eds.), Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, Ch. 37. *Springer*, Berlin, 1998.

[89] Rugh, W.J., Linear Systems Theory. *Prentice Hall*, New York, 1996.

[90] Schrader, C. B., and Sain, M. K. Research on system zeros: a survey. *Int. J. Control*, vol. 50, 1989, 4, pp. 1407–1433.

[91] Sinha, K.P., Multivariable Control. An Introduction. *Dekker*, New York, 1984.

[92] Voicu, M., Identification complète des processus dynamiques linéaires. *Rev. Française d'Automatique, Informatique et de Recherche operat.*, J-2, 1972, pp. 87-95.

[93] Voicu, M., Schätzung von Stromoberschwingungen der konventionellen Verzerrungs-betriebsquelle yon industriellen elektrischen Netzwerken mittels Luenberger-Beobachters. *Bul. Inst. Politeh. Iaşi*, (XXVI (XXX) 1980, 3-4, pp. 89-102.

[94] Voicu, M., Kirchhoff interconnectability of linear constant dynamical systems. *Int. Journal of Systems Science*, 8, 1980, pp. 907-919.

[95] Voicu, M., Bulea M., O posibilitate de alocare a polilor într-o regiune a planului complex prin programare liniară. Lucrările primei Conferinţe Naţionale de Electronică, Telecomunicaţii, Automatică şi Calculatoare, *Institutul Politehnic din Bucureşti*, 17-19 noiembrie 1982, vol. Teoria sistemelor, pp. 153-159.

[96] Voicu, M., Proprietăţile fundamentale ale sistemelor şi reacţia inversă. Simp. „Cibernetica în perspectiva revoluţiei ştiinţifico – tehnice contemporane". *Academia Română*, Filiala

Iaşi, 1983.

[97] Voicu, M., Pentru o teorie a modelării matematice. *Al III-lea Simp.Naț. de Teoria Sist.*, *Universitatea din Craiova*, 14-15.12.1984, vol. I, pp. 76-80.

[98] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Stabilizarea sistemelor automate cu obiect instabil IMEM; studiu de caz. *Sesiunea ştiințifică a Facultății de Electrotehnică*, *Institutul Politehnic,* Iaşi, 16-17 mai 1986, secția III, Analiza şi sinteza sistemelor automate, pp. 127-134.

[99] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Practical testing of state and output controllability. *Int. J. of Syst. Sci.*, vol. 13, 1987, no. 3-4, pp. 93-105.

[100] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Păvăluc, L., Numerical aspects of d.c. electric motor parameters and state estimation via adaptive observer simulation. *Int. Conf. on Electr. Drive*s, *Univ. Braşov*, 09.20-22, 1988; Proc., vol. 4, pp. 1-8.

[101] Voicu, M., Păstrăvanu, O., On the dimension of linear dynamical systems. *Bul. Inst. Politeh. Iaşi*, XXXIV (XXXVIII) , 1988, 1-4, pp. 21-26.

[102] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Păvăluc, L., Lazăr, C., State estimation techniques in increasing the efficiency of computer-controlled biosynthesis processes. *IFAC Workshop on Automatic Control for Quality and Productivity*, June 3-5, 1992, Istanbul; Proc. *IFAC*, vol.2, pp. 487-494.

[103] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Lazăr, C., Design and numerical implementation of a state estimator for biosynthesis processes. *IFAC Modelling and Control of Biotechnical Processes*, Colorado (USA), 1992; Proc., pp. 350-362.

[104] Voicu, M., On the McMillan degree of a strictly proper rational matrix. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția IV, XXXIX (XLIII), 1993, pp. 35-40.

[105] Voicu M., Determination of McMillan degree via Hankel block matrices associated to Taylor series expansion. *Studies in Informatics and Control*, vol. 16 (2007), no. 4.

[106] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Non-recursive models in control system analysis and design, *Editura Dosoftei*, Iaşi, 1997.

[107] Voicu, M., System matrix with prescribed off-diagonal entries obtained via state feedback. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția IV, XLIII (XLVIII), 1997, pp. 5-9.

[108] Voicu, M., Sufficient conditions for Hurwitz and Schur polynomials. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția IV, XLIV (XLVII), 1998, pp. 1-6.

[109] Voicu, M., Teoria sistemelor cu aplicații în bioingineria medicală. *Editura* "*Gh. Asachi*", Iaşi, 2001.

[110] Williams II, R. L., Lawrence, D. A., Linear State-Space Control Systems. *Wiley*, New York, published online: March 23, 2007.

[111] Wolovich, W.A., Linear Multivariable Control. *Springer*, Berlin, 1974.

[112] Wolovich, W.A., Multivariable system zeros. Control System Design by Pole-Zero

Assignment, F. Falside (Ed.). *Academic Press*, London, 1977.

[113] Wu, Y. M. A., A new method of computing the state transition of linear time -varying systems. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-19, 1974, no. 5, pp. 619-620.

Bibliografie pentru capitolul IV (sisteme automate multivariabile)

[114] Bliss, G.A., Algebraic Functions. *Dover Publ.*, New York, 1966.

[115] Capello, R.P., Laub, J .A., Systolic computation of multivariable frequency response. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-33, 1988, pp. 550-558.

[116] Dlabka, M., Mehrgrössensysteme. *Techn. Univ.*, Berlin, 1979.

[117] Doyle, J., Stein, G., Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-26, 1981, pp. 8-16.

[118] Gopinath, B., On the control of linear multiple input-output systems. *The Bell Technical J.*, vol. 50, 1971, pp. 1063-1081.

[119] Green, B., Iyer, A., Saeeks, R., Chao, K.S., Continuation algorithms for the eigenvalue problems. *Circuits Syst. Signal Process*, vol. 1, 1982, no. 1, pp. 123-134.

[120] Hartman, I., Lange, W., Poltmann, R., Robust and Insensitive Design of Multivariable Feedback Systems-Multimodel Design. *Vieweg & Sohn*, Braunschweig, 1986.

[121] Hsu, C.H., Chen, C.T., A proof of the stability of multivariable feedback systems. *Proc. lEE*, vol. 56, 1968, pp. 2061-2062.

[122] Hung, Y.S., MacFarlane, J.G.A., Multivariable Feedback, A Quasi-Classic Approach. *Springer*, Berlin, 1982.

[123] Korn, U., Wilfert, H.-H., Mehrgrössenregelungen; Moderne Entwurfsprinzi-pien im Zeit- und Frequenzbereich. *Verlag Technik*, Berlin, 1982.

[124] Kouvaritakis, B., MacFarlane, A.G.J., Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. *Int. J. Control*, vol. 23, 1976, pp. 149-181.

[125] Kouvaritakis, B., Edmunds, M.J., The characteristic frequency and characteristic gain design method for multivariable feedback systems. Alternatives for Multivariable Control, *Nat. Eng. Cons. Inc.*, Chicago, 1978.

[126] MacFarlane, J.G.A., Belletrutti, J.J., The characteristic locus design method. *Automatica* (*IFAC*), 1973, 9, pp. 575-588.

[127] MacFarlane, J .G.A., Relationship between recent developments in linear control theory and classical design techniques, 1-5. *Meas. Control*, 1975, 8.

[128] MacFarlane, J.G.A., Kouvaritakis, B., A design technique for linear multi-variable feedback systems. *Int. J. Control*, vol. 25, 1977, pp. 837-874.

[129] MacFarlane, J.G.A., Postlethwaite, I., The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci. *Int. J. Control*, vol. 25, 1977, pp.81-127.

[130] MacFarlane, J.G.A., Postletwaite, I., 1978, Extended principle of the argument. *Int. J. Control*, vol. 27, pp. 49-55.

[131] MacFarlane, J .G.A., Complex-variable-design method. Modern Approaches to Control System Design, N. Munro (Ed.). *Peter Peregrinus*, London, 1979.

[132] Mac Farlane, J.G .A., Scott-Jones, D.F .A., Vector gain. *Int. J. Control*, vol. 29, 1979, pp.65-91.

[133] MacFarlane, J.G.A., Complex Variable Method for Linear Multivariable Feedback Systems. *Taylor & Francis*, London, 1980.

[134] Mayne, D.Q., The design of linear multivariable systems. *Automatica* (*IFAC*), 9, 1973, pp. 201-207.

[135] Mayne, D.Q., Sequential return-difference-design. Modern Approach to Control System Design, N. Munro (Ed.). *Peter Peregrinu*s, London, 1979.

[136] Owens, D.H., Feedback and Multivariable Systems. *Peter Peregrinu*s, London, 1978.

[137] Patel, V.R., Munro, N., Multivariable System Theory and Design. *Pergamon Press*, Oxford, 1982.

[138] Postlethwaite, I., MacFarlane, J.G.A., A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems. *Springer*, Berlin, 1979.

[139] Raisch, J., Mehrgröβenregelung in Frequenzbereich. *Oldenbourg*, München, Wien, 1994.

[140] Rosenbrock, H.H., Design of multi variable control systems using the inverse Nyquist array. *Proc. IEE*, vol. 116, 1969, pp. 1929-1936.

[141] Rosenbrock, H. H., State Space and Multivariable Theory. *Nelson*, London, 1970.

[142] Rosenbrock, H. H., Progress in the design of multivariable control. *Meas. Control*, 4, 1971, pp. 9-11.

[143] Rosenbrock, H. H., Computer-Aided Control System Design. *Academic Press*, New York, 1974.

[144] Rosenbrock, H.H., Van Der Weiden, A. J. J., Inverse systems. Intern. J. Of Control, vol. 25, 1977, pp. 389-392.

[145] Springer, G., Introduction to Riemann Surfaces. *Addison & Wesley*, Reading Mass., 1957.

[146] Starkermann, R., Mehrgrössen-Regelsysteme. *BI Wissenschaftsverlag*, Mannheim, 1974.

Bibliografie pentru capitolul V (sisteme automate neliniare)

[147] Anderson, B.D.O, A system theory criterion for positive real matrices. *J. SIAM Control*, vol. 5, 1967, no. 2.

[148] Anderson, B.D.O, A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-13, 1968, no. 3, pp. 292-294.

[149] Atherton, D.P., Nonlinear Control Engineering. *Van Nostrand*, London, 1975.

[150] Belea, C., Teoria sistemelor; sisteme neliniare. *EDP*, Bucureşti, 1985.

[151] Bhatia, P. N., Szegö, P. G., Dynamical Systems: Stability Theory and Appilations. *Spinger*, Berlin, 1967.

[152] Cook, P.A., System stability. Modern Approaches to System Design, N. Munro (Ed.). *Peter Peregrinus*, London, 1979.

[153] Corduneanu, C., Integral Equations and Stability of Feedback Systems. *Academic Press*, New York, 1973.

[154] Csaki, F., Modern control Theories – Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems. *Akademiai Kiado*, Budapest, 1972.

[155] Follinger, O., Nictlineare Regelungen I; 8. Auflage. *Oldenbourg*, München, Wien, 1998.

[156] Follinger, O., Nictlineare Regelungen II, 7. Auflage. *Oldenbourg*, München, Wien, 1993.

[157] Goldner, K., Kubuk, S., Nichlineare Systeme der Regelungstechnik. *Verlag Technik,* Berlin, 1978.

[158] Grujic, T. L., Exact determination of a Lyapunov function and the asymptotic stability domain. *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 23, 1992, no. 11, pp. 1871-1888.

[159] Gruyitch, L., Richard, J-P., Borne, P., Gentina, J-C., Stability Domains. *Chapman & Hall / CRCPress*, Boca Raton, London, 2004.

[160] Hahn, W., Stability of Motion. *Springer*, Berlin, 1967.

[161] Halanay, A., Rasvan, V., Applications of Liapunov Methofs in Stability. *Kluwer Academic*, Amsterdam, 1993.

[162] Hormann, K., Direkte Methoden der Stabilitätsprüfung. *Verlg Technik*, Berlin, 1975.

[163] Ingwerson, R. D., A modified Lyapunow method for nonlinear stability analysis. *IRE Trans. AC*, vol. AC-6, 1961, pp. 199-210.

[164] Isidori, A., Nonlinear Control Systems, An Introduction. *Springer*, Berlin, 1995.

[165] La Salle, J., Lefschetz, S., Die Stabilitätstherie von Ljapunov. BI-Taschenbuch, *Bibliographisches Institut*, Mannheim, 1967.

[166] Lefschetz, S., Stability of Nonlinear Control systems. *Academic Press*, New York, 1965.

[167] Lyapunov, M. A., The General Problem of Stability of Motion. *Taylor and Francis*, London, 1992. (Traducere a originalului în l. rusă, Harcov, 1892).

[168] Mohler, R.R., Nonlinear Systems. *Prentice Hall*, Eglewood Cliffs, 1991.

[169] Parks, P.C., Hahn, V., Stabilitätstherie. *Springer*, Berlin, 1981.

[170] Popov, V. M., Hyerstability of Control Systems. *Springer*, Berlin, 1973.

[171] Rasvan, V., Teoria stabilității. *Ed. Şt. Şi Encicl.*, Bucureşti, 1987.

[172] Schultz, D. G., The generation of Lyapunov functions. In C. Leondes (Ed.), Advanes in Control Systems, vol. 2, *Academic Press*, New York, 1965, pp. 1-64.

[173] Slotine, J.-J.E., Wi, W., Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, Eglewood Cliffs, 1991.

[174] Vanelli, A., Vindyasagar, M., Maximal Lyapunov functions and domains of attractions for autonomous nonlinear systems. *Automatica* (*IFAC*), vol. 21, 1985, no.1, pp. 69-80.

[175] Voicu, M., Tehnici de analiza a stabilitatii sistemelor automate. *Editura Tehnică*, Bucureşti, 1986.

[176] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Lazăr C., A didactic approach to the hyperstability of automatic control systems. International Workshop on Advanced Education in Automation and Control Technology, *Czech Technical University of Prague*, 05.16-18, 1994; Proc, pp.14-17.

[177] Willems, J.L., Stability theory of Dynamical Systems. *Nelson*, London, 1970.

[178] Zoubov, I. V., Methods of A. M. Liapunov and Their Appications. *Noordhoff Ltd*., 1964.

[179] Zoubov, I. V., Théorie de la commande. *Éditions Mir*, Moscou, 1978.

Bibliografie pentru subcapitolul V.5 (metoda invarianței de flux)

[180] Brezis, H., On a characterization of floww invariant sets. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 23, 1970, pp. 261-263.

[181] Chen, J., Sufficient condition on stability of interval matrices:connections and new results. IEEE Trans. on AC, vol. AC-37, 1992, pp. 541-544.

[182] Chu T. G., Convergence in discrete-time neural networks with specific performance. *Phys. Revue E*, 6305, pp. 1904- + Part 1, no. 051904, 05.2001.

[183] Crandall, M.G., A generalization of Peano's theorem and flow invariance. Proc. AMS, vol. 36, 1972, pp. 151-155.

[184] Hmamed, A., Componentwise stability of continuous-time delay linear systems, *Automatica*, vol. 32, 1996, no. 4, pp. 651-653.

[185] Hmamed, A., Componentwise stability of 1D and 2D linear discrete-time systems, *Automatica*, 33, 1997, no. 9, pp. 1759-1762.

[186] Hmamed A., Benzaouia A., Componentwise stability of linear systems: a non-symmetrical case. *Int. J. Robust Nonlin.* vol. 7, 1997, no. 11, pp. 1023-1028.

[187] Hukuhara, M., Sur la théorie des equations differentieles ordinarie*s*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokio*, Math. Vol. 7, 1954 no. 8, pp. 483-510.

[188] Kiendl, H., J. Adamy and P. Stelzner (1992). Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control,* 37, No. 6, 839-842.

[189] Martin, R. H. jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 179, 1973, pp 399-414.

[190] Matcovschi, M., Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise absolute stability of Hopfield neural networks without delay. *Revue Roumaine des Sciences Techniques*, ser. electr.

energ., t. 48, 2003, 4, pp. 495-504.

[191] Matcovschi, M.-H., Păstrăvanu, O., Voicu, M., Invariant sets with arbitrary time dependence in the dynamics of linear systems with interval-type uncertainties. *16th Int. Conf. on Control Syst. and Comp. Sci.* (*CSCS 16*), Session A12 - Design Methods (II), Bucharest, May 22-26, 2007; Proc., *Ed. Printech*, Bucureşti, 2007; vol. I, pp. 663-668.

[192] Matcovschi, M.-H., Pastravanu, O., Voicu, M., Novel results in the qualitative analysis of continuous-time bidirectional associative memories. *Mathematical Reports* (Institutul de Matematică, Bucureşti), *Editura Academiei Române*, Bucureşti, vol. 9 (59), 2007, nr. 1, pp. 61-75.

[193] Moroşan, B. I., Quasi-sliding mode with integral control for a second order uncertain plant. I*nt. Symp. Aut. Control & Comp. Sci.*, Technical Univ. Iaşi; Prepr., pp. 1-6, 1993.

[194] Moroşan, B. I., Voicu, M., *Flow-invariance method in general sliding mode system*, Technical Report, Delft Univ. of Technology, 1993.

[195] Moroşan, B. I., Fuzzy control in quasi-sliding mode systems. I*nt. Workshop on Fuzzy Technology in Automation and Intelligent Syst. – Fuzzy Duisburg* '*94*, *Univ. Duisburg*; Proc., 1994 , pp. 155-161.

[196] Moroşan, B. I., Digital variable-structure systems studied by flow-invariance method. *Doctoral thesis* (in Romanian), *Technical University of Iaşi*, 1994.

[197] Moroşan, B. I., Voicu, M., General sliding mode systems analysis and design via flow invariance method. *Studies in Informatics and Control*, vol. 3, 1994, no. 4, pp. 347-366.

[198] Nagumo, N., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differential-gleichungen. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, vol. 24, 1942, pp. 551-559.

[199] Păstrăvanu O., Voicu, M., Flow-invariant rectangular sets and componentwise asymptotic stability of interval matrix systems. *5th European Control Conference*, Karlsruhe, 08.31-09.03, 1999; Proc. on CD, *rubicon-Agentur fűr digitale Medien*, Aachen, 1999, 16 pag.

[200] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Robustness analysis of componentwise asymptotic stability. *16th IMACS World Congres*s, Lausanne, August 21-25, 2000; Proc. CD, *imacs*, 16 pag.

[201] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Preserving componentwise asymptotic stability under disturbances. *Revue Roumaine des Sciences Techniques,* ser. electr. energ., t. 45 (2000), 3, pp. 413-425.

[202] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Robustness of componentwise asymptotic stability for a class of nonlinear systems. *Proc. of Romanian Academy*, Series A, Vol. 2 (2001), No. 1-2, pp. 61-67.

[203] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise characterization of the free response for a class of nonlinear systems, *13th Int. Conf. on Control Syst. and Comp. Sci.*, *Politehnica Univ.,* Bucharest, May 2001; Proc., pp. 50-55.

[204] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Dynamics of a class of nonlinear systems under flow-invariance constraints. 9*th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation* (*MED'01*), Dubrovnik (Croatia), June 27-29, 2001; Proc. on CD, Book of abstracts, IEEE, ©KoREMA Zagreb, 2001, 6 pag.

[205] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise asymptotic stability of a class of nonlinear systems.1*st IFAC Symposium on System Structure and Control* (*SSSC 01*), August 29-31, 2001, *Czech Technical Univ. of Prague*; Book of Abstracts, p. 28; Proc. CD, 078, 6 pag.

[206] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Flow-invariance in exploring stability for a class of nonlinear uncertain systems. *6th European Control Conference* (*ECC 2001*), Porto, September 4-7, 2001, Proc., CD, 6 pag.

[207] Păstrăvanu, O., Voicu, M., State feedback design for componentwise exponential asymptotic stability. *Int. Symp. on Automatic Control and Comp. Sci.* (*SACCS 2001*), *Technical University of Iaşi*, October 25-26, 2001; Proc. CD, 6 pag.

[208] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise asymptotic stability of interval matrix systems. *J. of Differential and Integral Equation* (USA), vol. 15, no. 11, pp. 1377-1394.

[209] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Flow-invariance and componentwise asymptotic stability of a class of nonlinear systems – the non-symmetrical case. *Memoriile Secţiilor Şt. ale Academiei Române*, Tom XXV/2002, pp. 7 – 22.

[210] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Dynamics of a class of uncertain systems under flow-invariance constraints. *Int. J. of Mathematics and Mathematical Sci.*, vol. 2003, nr. 5 (January 21), pp. 263 – 294.

[211] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise stabilizability and detectability of linear systems. 7*th European Control Conf.* (*ECC 2003*), September1-4, 2003, *University of Cambridge*; Preprints on CD, 6 pag.

[212] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Componentwise asymptotic stability – from flow-invariance to Lyapunov functions. In M. Voicu (Ed.), *Advances in Automatic Control*; *Kluwer Academic*, Boston, 2004; pp. 257-270.

[213] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Necessary and sufficient conditions for componentwise stability of interval matrix systems. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-49, 2004, no. 5, pp. 1016-1021.

[214] Păstrăvanu, O., Voicu, M., On the componentwise stability of linear systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 15, 2005, Issue 1, pp. 15-23.

[215] Păstrăvanu, O., Matcovschi, M.-H., Voicu, M., Diagonally-invariant exponential stability. *16th World Congress of Int. Federation of Automatic Control*, Prague, July 4-8, 2005; Proc. on CD; 6 pag.

[216] Păstrăvanu, O., Matcovschi, M.-H., Voicu, M., New results in the state-space analysis of positive linear systems. *Romanian J. of Information Sci. and Technol.y* (Academia

Română), vol. 9, 2006, nr. 3, pp. 217-225.

[217] Păstrăvanu, O., Voicu, M., Generalized matrix diagonal stability and linear dynamical systems. *Linear Algebra and Its Appl.*, vol. 419, 2006, issues 2-3, pp. 299-310.

[218] Păstrăvanu, O., Matcovschi, M.-H., Voicu, M., Time-Dependent Invariant Sets in System Dynamics. *IEEE Conf. on Control Appl.*, München, 4-6.10.2006; Proc. on CD; 6 pag.

[219] Pastravanu, O., Matcovschi, M.H., Voicu, M., Majorant matrices in the qualitative analysis of interval dynamical systems. *European Control Conf. 2007*, Kos, Greece 2-5 July 2007; Proc. on CD, 6 pag.

[220] Pavel., H.N., Differential Equations, Flow Invariance and Applications. Pitman, Boston, 1984.

[221] Siljak, D.D., Connective stability of competitive equilibrium.. Automatica, vol. 11, 1975, pp. 389-440.

[222] Ursescu, C., Caratheodory solutions of ordinary differential equations on locally compact sets in Fréchet spaces, *Preprint Series in Math.*, *University of Iași*, vol. 18, 1982, pp. 1-27.

[223] Utkin, V.I., Sliding Modes in Control Optimization. Springer, Berlin, 1991.

[224] Voicu, M., State feedback matrices for linear constant dynamical systems with state constraints. *4th Intern.l Conf. on Control Syst. and Comp.Sci.*, *Polytech. Instit.*, Bucharest, 17- June 20, 1981; Proc., vol. I, pp. 110-115.

[225] Voicu, M., State constraints and asymptotic stability of linear constant dynamical systems. *Bul. Instit. Politeh. Iași*, secția III, XXVII (XXXI), 1981, 3-4, pp. 57-60.

[226] Voicu, M., O condiție necesară şi suficientă de stabilitate asimptotică pe componente. *I-a Conf. Naț. de Electr., Telecom., Autom. şi Calculat.*, *Instit. Politeh. Bucureşti*, 17-19 nov 1982, vol. Teoria sistemelor, pp. 146-152.

[227] Voicu, M., On the determination of the linear state feedback matrix. *5th Int. Conf. on Control Syst. and Comp. Sci., Polytech. Instit.*, Bucharest, June 8-11, 1983; Proc., vol. I, pp. 119-123.

[228] Voicu, M., Free response characterization via flow invariance. *9th World Congress of Int. Federation of Automatic Control*, Budapest, July 2-6, 1984; Proc., vol. V, pp. 12-17.

[229] Voicu, M., Componentwise asymptotic stability of the linear constant dynamical systems. *IEEE Trans. on AC*, vol. AC-29, 1984, no. 10, pp. 937-939.

[230] Voicu, M., Evolution on control and state hyperintervals. *6th International Conf. on Control Syst. and Comp. Sci., Polytech. Instit.*, Bucharest, May 22-25, 1985; Proc., vol. I, pp. 81-83.

[231] Voicu, M., Gerschgorinsche Kreise und die komponentenweise Stabilisierung. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția III, XXXI (XXXV), 1985, 1-4, pp. 45-50.

[232] Voicu, M., Structural properties of the spatial manipulating systems in connection with the state and control constraints. 1*st IFAC Symp. on Robot Control*, Barcelona, Nov. 6-8 1985; Proc., *IFAC*, pp. 425-428.

[233] Voicu, M., Observing the state with componentwise exponentially decaying error. *Systems & Control Letters* 9 (The Netherlands), 1987, pp. 33-42.

[234] Voicu, M., On the application of the flow-invariance method in control theory and design. *10th World Congress of Int. Federation of Automatic Control*, Munich, July 26-31, 1987; Proc., *IFAC*, vol. VIII, pp. 364-369.

[235] Voicu, M., Moroşan, B. I., A theorem on structure-variable systems (in Romanian). *Al 2-lea Simp. „Structuri, algoritmi şi echip. de conducere a proceselor ind.*". *Inst. Politehnic Iaşi*; Prepr., pp. 21-26, 1989.

[236] Voicu, M., Moroşan, B.-I., State space flow structure induced by sliding motion control. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția III, XXXVI (XXXX), 1989, 3-4, pp. 25-29.

[237] Voicu, M. and Moroşan, B. I., Existence problem of an ideal sliding domain (in Romanian). *Zilele academice ieşene*, *Academia Română*, Fliala Iaşi, 7 p., 1989.

[238] Voicu, M., Sufficient existence conditions of limit cycles. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția III, XXXVII (XXXXI), 1990, 1-2, pp. 23-26.

[239] Voicu, M., Moroşan, B.-I., Variable structure controller for feedback positioning of dc electric motor. *Revue Roum. des Sci. Techn.*, ser. el. energ., t. 32, 1991, 2, pp. 247-264.

[240] Voicu, M., Moroşan, B. I, Flow structure involving reaching of the sliding surface in variable structure systems. *Int. Conf. on Electrical Drives*, *University of Braşov*, 1991; Proc., G4.

[241] Voicu, M., Moroşan, B. I., Flow invariance based characterization of quasi-sliding motion. *International Workshop on Applied Automatic Control*, *Czech Technical University of Prague*, May 17-22, 1993; Proc., pp. 86-89.

[242] Voicu, M., Moroşan, B.-I., Variable structure control system characterization and design via flow -invariance method. *Int.l J. Automation Austria*, 1, vol. 5, 1997, pp. 12-15.

[243] Voicu, M., Componentwise absolute stability of endemic epidemic systems. În volumul Seminarului „*Teorii de tip Popov*, *prezent şi perspective*", Secția de Şt. şi Tehn. Inf., *Academia Română*, Bucureşti, 25.11.1999, pp. 97-104.

[244] Voicu, M., Păstrăvanu O., Setting up the reference input in sliding motion control. *Int. Symp. on Automatic Control and Comp. Sci.* (*SACCS 2001*), *Technical University of Iaşi*, October 25-26, 2001; Proc. CD, 5 pag.

[245] Voicu, M., Păstrăvanu, O., State feedback and observer design ensuring componentwise exponential asymptotic stability. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția IV, XLVII (LI), 2001, 1-4, pp. 85-98.

[246] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Exploring the componentwise absolute stability of endemic epidemic systems via SIR models. *Control Engrg and Appl. Informatics*, No. 4, 2002, pp. 23-28.

[247] Voicu, M., Păstrăvanu O., Componentwise asymptotic stability induced by symmetrical polyhedral time-dependent constraints. *IFIP Conf. on Analysis and optimiz. of diff. syst.*, 10-14.09.2002, *Universitatea* „*Ovidius*", Constanța. In V. Barbu et al. (Ed.), *Analysis and Optimization of Differential Systems*, *Kluwer Academic*, Boston, 2003; pp. 433-442.

[248] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Setting up the reference input in sliding motion control and its closed-loop tracking performance. In M. Voicu (Ed.), *Advances in Automatic Control*; *Kluwer Academic*, Boston, 2004; pp. 383 – 392.

[249] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Flow-invariance method in control – a survey of some results. In M. Voicu (Ed.), *Advances in Automatic Control*; *Kluwer Academic*, Boston, 2004; pp. 393-434.

[250] Voicu, M., Matcovschi, M. H., Păstrăvanu, O., Invariant and contractive sets in motion stability analysis of a mobile robot. *4th IFAC Conf. on Management and Control of Production and Logistics MCPL 2007*, Sibiu, September 27- 30, 2007. Proc., pp. 133-138.

Bibliografie pentru capitolul VI (conducerea optimală)

[251] Anderson, B.D.O., Moore, J.B., Optimal Control: Linear Quadratic Methods. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1990.

[252] Athans M., Falb, P.L., Optimal Control. *McGraw Hill*, New York, 1966.

[253] Barbu, V., Precupanu, Th., Convexity and Optimization in Banach Spaces, *Editura Academiei Române*, Bucureşti, *Reidel*, Dordrecht, 1986.

[254] Bellman, R., Kalaba, R., Dynamic Programming and Modern Control Thery. *Academic Press*, New York, 1965.

[255] Bryson, A.E., Ho, Y.C., Applied Optimal Control. *Blaisdell*, 1979.

[256] Cesari, L., Optimization – Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations. *Springer*, Berlin, 1984.

[257] Dorato, P., C. Abdallah, C., Cerone, V., Linear-Quadratic Control. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1995.

[258] Feldbaum, A., Principle théoriques des systèmes asservis optimaux. *Éditions Mir*, Moscou, 1973.

[259] Föllinger, O., Optimale Regelung und Steuerung. *Oldenbourg*, München, Wien, 1994.

[260] Kalman, R.E., Contributions to the Theory of Optimal Control. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 1960, pp. 102-119.

[261] Kalman, R.E., When is a linear control system optimal?, *Trans. ASME*, vol.86D, 1964, 1, pp. 51-60.

[262] Kirk, D.E., Optimal Control Theory. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1970.

[263] Kwakernaak, H., Sivan, R., Linear optimal control systems, *Wiley*, New York, 1972

[264] Pontriaguine, L., Boltianski, V., Gamkrelidze, R., Michtchenko, E., Théorie mathématique des processes optimaux. Éditions Mir, Moscou, 1974.

[265] Voicu M., Auto-optimal compensation of deforming regime (in Romanian). *Electrotehnica*, 1976, nr.8, pp. 287-294.

[266] Voicu M., Theoretical problems concerning the design of the variable filters for optimal compensation of the deforming regime (in Romanian). *Electrotehnica*, 1978, nr.5, pp. 155-159.

[267] Voicu M., Wienerfilter für die optimale Dämpfung des Verzerrungsbetriebes von industriellen elektrischen Netzwerken. *Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi*, secția III, XXV (XXIX), 1979, 1-2, pp. 51-64.

[268] Voicu M., Adaptive Wienerfilter für die optimale Dämpfung des Verzerrungsbetriebes von industriellen elektrischen Netzwerken. *Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi*, secția III, XXV (XXIX), 1979, 3-4, pp. 77-86.

[269] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Stepwise optimal control of linear continuous systems with unknown parameters. *7th Int. Conf. Contr. Syst. & Compo. Sci.*, *Bucharest Polytech. Inst.*, 1987; Preprints, vol. I, pp. 210-215.

[270] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Optimal control of systems with unknown parameters using non-recursive linear models. *IEEE Int. Workshop on Intelligent Motion Control*, *Bogazici University*, Istanbul, Aug. 20-22, 1990; Proc., pp. 755-760.

[271] Voicu, M., Păstrăvanu, O., An approach to linear-quadratic control problem using non-recursive models. *Bul. Instit. Politeh. Iaşi*, secția IV, XXXVIII (XLII), 1992, pp. 61-72.

[272] Voicu, M., Controllability analysis, pole assignment, structural synthesis and linear quadratic optimal control based on non-nerecursive mathematical models. *Research Report*, *Copernicus grant of the Comm. of EU*, *University of Karlsruhe*, 1993.

[273] Voicu, M., Păstrăvanu, O., Optimal control design based on non-recursive linear models. *3rd European Control Conf.*, *Universita La Sapienza*, Roma, 5-8 September 1995; Proc. vol. 1, pp. 501-506

CUPRINS

ISBN 978-973-27-1673-1

9 789732 716731